線形系と多項式表示ゼロメモリー要素の直列接続からなる 非線形系のパラメータ同定*

若 松 秀 俊*

Parameter Identification of Nonlinear Cascade System of Linear
Subsystem and Polynomial Zero-Memory

Hidetoshi WAKAMATSU*

1. はじめに

著者らは先に、線形代数方程式の逐次解をもとにして、離散化ボルテラ汎関数で表示した非線形プラントを同定する方法を提案した¹⁾。ここでは、この同定法で得られる解の一部を用いて、線形系と多項式表示されたゼロメモリー要素の直列接続よりなる非線形系のパラメータを同定する簡便な方法を提案する。

2. 非線形システムの表示

2.1 測定対象の表示とその単純化

測定の対象とする非線形系が、(1)式に示す線形動的システム (A, b, c) と(2)式に示す非線形ゼロメモリー要素の直列接続よりなるものとする。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \quad (1.2)$$

$$z(t) = \rho_1 y + \rho_2 y^2 + \dots + \rho_m y^m \quad (2)$$

ただし、 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}^T$ は n 次元列ベクトル、 $u(t)$, $y(t)$, $z(t)$ はスカラー、 $\mathbf{A}$ は相異なる固有値 $\lambda_i (\text{Re}(\lambda_i) < 0)$ $i=1, 2, \dots, n$ をもつ $n \times n$ 行列であるとする。

行列 $\mathbf{A}$ を適当な変数変換 $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{X}$ により対角化して、 $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{c}' = \rho_1 \mathbf{c}\mathbf{T}$ と置き換える。また $y(t) = \rho_1^{-1}Y(t)$ とおき

$$\rho_r' = \rho_r \rho_1^{-r} \quad (r=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

とすれば、(1), (2)式より(4), (5)式を得る。

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}'u(t) \quad (4.1)$$

$$Y(t) = \mathbf{c}'\mathbf{X}(t) \quad (4.2)$$

$$z(t) = Y + \rho_2' Y^2 + \dots + \rho_m' Y^m \quad (5)$$

この操作によって一般性を失うことはない。

2.2 測定対象の離散化ボルテラ汎関数表示

サンプル間隔を τ , $u(t)$, $z(t)$ の時刻 $p\tau$ における

値を U_p, Z_p とすれば、(1), (2)式はまとめて、(6)式で表わすことができる¹⁾。

$$Z_p = \sum_{r=1}^m \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p \dots \sum_{i_r=i_{r-1}}^p h_{r,i_1,i_2,\dots,i_r} U_{p+1-i_1} U_{p+1-i_2} \dots U_{p+1-i_r} \right) \quad (6)$$

3. 非線形システムのパラメータ同定

3.1 一般化インパルス応答とパラメータとの関係

(4), (5)式をサンプル間隔 τ ごとに離散化して得られる出力 Z_p の m 次までの非線形応答成分に関して、(6)式の離散化した一般化インパルス応答との間の関係を求めると、線形成分について(7)式、非線形成分については(8)式が得られる。

$$\mathbf{c}'e^{i\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}' = h_1^{i_1} \quad (7)$$

$$\rho_r' \prod_{s=1}^r (\mathbf{c}'e^{i\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}') = h_{r,i_1,i_2,\dots,i_r} \quad (r=2, \dots, m) \quad (8)$$

なお(8)式は(7)式を代入することにより(9)式のように変形できる。

$$\rho_r' = h_{r,i_1,i_2,\dots,i_r} (h_1^{i_1} h_1^{i_2} \dots h_1^{i_r})^{-1} \quad (9)$$

ここで $\mathbf{b}'^T = [b_1', b_2', \dots, b_n']$, $\mathbf{c}' = [c_1', c_2', \dots, c_n']$,

$$\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n], \quad \gamma_i = c_i' b_i' \text{ とし,}$$

$$\text{また } \mu_i = e^{\lambda_i \tau}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \dots & \mu_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

を定義し、(7)式において $i_1=1, 2, \dots, 2l$ (注1)とすれば(10)式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{2l-1} & \mu_2^{2l-1} & \dots & \mu_n^{2l-1} \end{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} h_1^{1^1} \\ h_1^{1^2} \\ \vdots \\ h_1^{1^{2l}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

さらに、 $1 \leq k \leq l$ について n 次元列ベクトル $\mathbf{H}_k$ を

(注1) $\mathbf{\Gamma}$ および $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ を決定するために必要な方程式の数を示す l の最小の値は n である。

† 電気学会全国大会で一部発表 (昭 55・4)

第19回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 55・8)

* 東京医科歯科大学医用器材研究所 東京都千代田区神田駿河台 2-3-10

(Received May 29, 1980)

(Revised October 24, 1980)

$$\mathbf{H}_k^T = [h_1^k, h_1^{k+1}, \dots, h_1^{k+n-1}] \quad (11)$$

のように定義すれば, (10), (11) 式より (12) 式を得る.

$$\mathbf{L}^T \mathbf{M}^T \mathbf{F} = \mathbf{H}_k \quad (12.1)$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{M}^{k+1} \mathbf{F} = \mathbf{H}_{k+1} \quad (12.2)$$

(12) 式より $\mathbf{F}$ を消去すれば (13) 式が得られる.

$$\mathbf{L} \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{k+1} \quad (13)$$

(13) 式を (14) 式に示すように具体的に表現する.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \dots & \nu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^k \\ h_1^{k+1} \\ \vdots \\ h_1^{k+n-2} \\ h_1^{k+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{k+1} \\ h_1^{k+2} \\ \vdots \\ h_1^{k+n-1} \\ h_1^{k+n} \end{bmatrix} \quad (14)$$

(13), (14) 式において $\mathbf{L} \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{D}$ とおくと

$$\mathbf{L} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^n & \mu_2^n & \dots & \mu_n^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

が得られる. このとき

$$d_{nj} = \sum_{\xi=1}^n \nu_{\xi} \mu_j^{n-\xi} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

であるから, 相異なる $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ は (16) 式に示す代数方程式の解で与えられる.

$$\mu^n - \nu_1 \mu^{n-1} - \nu_2 \mu^{n-2} - \dots - \nu_{n-1} \mu - \nu_n = 0 \quad (16)$$

ここで (14) 式の n 行目のみに注目して $1 \leq q \leq 2l-2n+1$ とし, あらためて $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ を $\nu_1^{(q)}, \nu_2^{(q)}, \dots, \nu_n^{(q)}$ とおけば, (17) 式が得られる.

$$\begin{bmatrix} h_1^q & h_1^{q+1} & h_1^{q+2} & \dots & h_1^{q+n-1} \\ h_1^{q+1} & h_1^{q+2} & h_1^{q+3} & \dots & h_1^{q+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{q+n-1} & h_1^{q+n} & h_1^{q+n+1} & \dots & h_1^{q+2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_n^{(q)} \\ \nu_{n-1}^{(q)} \\ \vdots \\ \nu_1^{(q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{q+n} \\ h_1^{q+n+1} \\ \vdots \\ h_1^{q+2n-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

よって $h_1^{i_1}$ ($1 \leq i_1 \leq q+2n-1$) が既知なら, $\nu_1^{(q)}, \nu_2^{(q)}, \dots, \nu_n^{(q)}$ が (17) 式より求めることができる.

ここで, 同定の精度をあげるために q を変化させて, ν_i ($i=1, 2, \dots, n$) を (18) 式より平均値として算出する.

$$\nu_i = \left(\sum_{q=1}^{2l-2n+1} \nu_i^{(q)} \right) / (2l-2n+1) \quad (18)$$

つぎにこれらの $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ の値を用いて, (16) 式より相異なる $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ を求めることができる. この結果を用いれば, 固有値 λ_i は (19) 式で与えられる (注 2).

(注 2) 整理する系を対象としているので, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ としている. $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ として求める場合は, 線形系の次元 n の設定が不適当な場合である.

$$\lambda_i = \frac{1}{\tau} \ln \mu_i \quad (19)$$

また (12.1) 式において, $\mathbf{H}_k$ を用いて算出できる $\mathbf{F}$ を $\mathbf{F}_k$ ($k=1, 2, \dots, l$) と置き換えれば (20) 式を得る.

$$\mathbf{F}_k = (\mathbf{L}^T \mathbf{M}^k)^{-1} \mathbf{H}_k \quad (20)$$

ここで ν_i を求める場合と同様にして

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \mathbf{F}_k \quad (21)$$

を用いて, 演算誤差, ノイズによるパラメータ同定誤差を軽減することができる.

こうして求めた $\gamma_i = c_i' b_i'$ において, 適当な c_i', b_i' さらに ρ_1 , 行列 $\mathbf{T}$ を与えることによって, $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{T} \mathbf{b}'$, $\mathbf{c} = \rho_1^{-1} \mathbf{c}' \mathbf{T}^{-1}$ として線形部分のすべてのパラメータが決定できる. また, これとは独立に, (3) 式を考慮して $r=2, 3, \dots, m$ に対する非線形応答成分に関するパラメータは, (9) 式より得られる (22) 式を用いて決定できる.

$$\rho_r' = h_{r,11} \dots h_{r,11} (h_1^{(1)})^{-r} \quad (22.1)$$

$$\rho_r = h_{r,11} \dots h_{r,11} \rho_1^r (h_1^{(1)})^{-r} \quad (22.2)$$

3.2 一般化インパルス応答の測定法

対象とする系のパラメータ決定に必要な一般化インパルス応答の測定法について, 以下に述べる.

(6) 式で, 観測時刻 $p\tau$ において, $U_p = U_p^{(d)}$ ($d=1, 2, \dots, s_p$; $s_p(m) = (p+1)(p+2) \dots (p+m-1)/(m-1)!$) なる入力を考え, それに対応する出力を $Z_p^{(d)}$ とする. このとき $\mathbf{v}_{p,1}^{(d)} = U_1^{(d)} [1]$, $\mathbf{v}_{p,2}^{(d)} = U_1^{(d)} [U_p^{(d)}, U_{p-1}^{(d)}, \dots, U_1^{(d)}]$, $\mathbf{v}_{p,3}^{(d)} = U_1^{(d)} [U_p^{(d)} U_p^{(d)}, U_p^{(d)} U_{p-1}^{(d)}, \dots, U_p^{(d)} U_1^{(d)}, U_{p-1}^{(d)} U_{p-1}^{(d)}, \dots, U_2^{(d)} U_1^{(d)}, U_1^{(d)} U_1^{(d)}] \dots$ また $\mathbf{h}_{p,1} = [h_p]$, $\mathbf{h}_{p,2} = [h_2^{1p}, h_2^{2p}, \dots, h_2^{pp}]$, $\mathbf{h}_{p,3} = [h_3^{1p}, h_3^{12p}, \dots, h_3^{pp}, h_3^{22p}, \dots, h_3^{ppp}] \dots$ を導入して

$$\mathbf{w}_p^{(d)} = [\mathbf{v}_{p,1}^{(d)} \mid \mathbf{v}_{p,2}^{(d)} \mid \dots \mid \mathbf{v}_{p,r}^{(d)} \mid \dots \mid \mathbf{v}_{p,m}^{(d)}] \quad (23.1)$$

$$\mathbf{H}_p^T = [\mathbf{h}_{p,1} \mid \mathbf{h}_{p,2} \mid \dots \mid \mathbf{h}_{p,r} \mid \dots \mid \mathbf{h}_{p,m}] \quad (23.2)$$

$$\alpha_{p-1}^{(d)} = \sum_{r=1}^m \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1}^{p-1} \dots \sum_{i_r=i_{r-1}}^{p-1} h_{r,i_1 i_2 \dots i_r} \right) \times U^{(d)}_{p+1-i_1} U^{(d)}_{p+1-i_2} \dots U^{(d)}_{p+1-i_r} \quad (23.3)$$

$$\mathbf{Z}_p^T = [Z_p^{(1)} - \alpha_{p-1}^{(1)}, Z_p^{(2)} - \alpha_{p-1}^{(2)}, \dots, Z_p^{(s_p)} - \alpha_{p-1}^{(s_p)}] \quad (23.4)$$

$$\mathbf{P}_p^T = [\mathbf{w}_{p,1}^{(1)T} : \mathbf{w}_{p,2}^{(2)T} : \dots : \mathbf{w}_{p,s_p}^{(s_p)T}] \quad (23.5)$$

とすれば観測時刻 $p\tau$ ごとに (24) 式を得る.

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{P}_p \mathbf{H}_p \quad (24)$$

時刻 $p\tau$ において, s_p 個の独立な入力関数より構成される行列 $\mathbf{P}_p$ が正則であれば, 時刻 $(p-1)\tau$ で求めた $\mathbf{H}_{p-1}$ を用いて $\alpha_{p-1}^{(d)}$ が算出できるので (24) 式

から H_p が求められる. $p=1, 2, \dots, 2l (l \geq n)$ について, この操作を繰り返せば, 対象とする系のパラメータ同定に必要なすべての一般化インパルス応答の値が一意に決定できる.

3.3 パラメータ同定のための具体的な手続

(1) 非線形部分のパラメータ同定

非線形部分のパラメータ同定に不可欠な一般化インパルス応答のベクトルは, (22)式より時刻 $p=1$ に対応するベクトル $H_1=[h_1^1, h_2^1, \dots, h_m^1 \dots]^T$ のみである. H_1 を決定するために, (24)式において $p=1$ として, 測定対象の $s_1(m)$ 対の入出力値を観測する. このとき (23.1)式より

$$w_1^{(d)} = U_1^{(d)} [1 \ U_1^{(d)}, (U_1^{(d)})^2, \dots, (U_1^{(d)})^{m-1}]$$

を得るから, $\alpha_0^{(d)}=0$ を考慮して $w_1^{(d)}/U_1^{(d)} \rightarrow w_1^{(d)}$, $Z_1^{(d)} \rightarrow Z_1^{(d)}/U_1^{(d)}$ と置き換えれば (23.5)式において, $d=1, 2, \dots, s_1 (s_1=m)$ について選択した入力関数の離散値より構成される行列 P_1 は Vandermonde 行列になる.

したがって, $U_1^{(j)} \neq U_1^{(j')} (j \neq j')$ であれば P_1 は正則であるから解 H_1 は一意に定まり, これより非線形性を示す係数が (22)式から算出可能である他に, その次数も定まる (注 3).

(2) 線形系のパラメータ同定

線形系のパラメータ同定に必要な線形インパルス応答 $h_1^i (i_1=1, 2, \dots, 2l; l \geq n)$ を分離して決定する. 観測時刻 $p=1$ については (1) で決定済なので, 観測時刻 $p(\geq 2)$ において $d=1, 2, \dots, s_p$ について独立な入力関数群を選択し¹⁾, $p=2, 3, \dots, 2l$ のおのおのについて $H_p = P_p^{-1} Z_p$ としてベクトル H_p を求めて, その最初の要素 h_1^p を取り出せば必要なすべての h_1^i が求まる. このとき $l \geq n$ にすることによって, 3.1 節に述べたように演算誤差やノイズによるパラメータ同定精度の低下に対処できる.

4. 非線形系のパラメータ同定の具体例

ここでは線形系が3次元, ゼロメモリー要素が3次の非線形性をもつ既知非線形系を測定対象とする. そのパラメータとして, 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, (3)式の ρ_2' , ρ_3' および係数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ をそれぞれ $\lambda_1=-3.0$, $\lambda_2=-5.0$, $\lambda_3=-2.5$, $\rho_2'=-1.0$, $\rho_3'=4.0$, $\gamma_1=1.0$, $\gamma_2=3.0$, $\gamma_3=-2.0$ であるとした. $\tau=0.3\text{sec}$,

テスト入力関数として擬似ランダム信号を用いて, つぎのように同定を行った. まず非線形部分については, $m \leq 6$ を仮定し $p=1$ として ρ_2' を求めると ρ_2' , ρ_3' は ρ_2', ρ_3' に比べて, 絶対値が 0.01% 以下になるので, 4 次以上の非線形成分の寄与がないものとして $m=3$ を決定した. つぎに線形部分については $n \leq 5$ を仮定し, 1 個の入力あたりのサンプル個数を $2l (\geq 2n)$ とし, $m=3$ の条件のもとで $s_p(m)$ 個の独立な入力関数を用いて線形インパルス応答を分離した. このとき相異なる固有値が安定領域にある条件を考慮し, さらに入出力関係を再現して出力相対誤差率が一定値以下になるような n を選ぶことにより $n=3$ を得た. $l=3$ として同定したパラメータは $\lambda_1=-3.05$, $\lambda_2=-4.92$, $\lambda_3=-2.52$, $\gamma_1=0.98$, $\gamma_2=2.99$, $\gamma_3=-2.05$ であるが, $l=6$ とし平均値をもとにして同定した場合には, $\lambda_1=-2.99$, $\lambda_2=-5.01$, $\lambda_3=-2.50$, $\gamma_1=1.04$, $\gamma_2=2.99$, $\gamma_3=-2.03$ のように改善された. 非線形項のパラメータについては, 平均値を求めるといずれの場合も $\rho_2'=-1.001$, $\rho_3'=4.005$ となり, 測定対象のパラメータによく一致した.

5. おわりに

本稿では, 線形代数方程式の逐次求解による非線形系の同定法に基づいて測定した一般化インパルス応答の一部を用いて, n 次元線形系と m 次非線形ゼロメモリー要素の直列接続からなる非線形系のパラメータの値を同定する方法について述べた. この方法では, $s_1(m)=m$ 個のテスト入力関数より構成される係数行列 P_1 が常に $m \times m$ の Vandermonde 行列になり, H_1 が決定されるので, $p=1$ における各入力関数値を適当に選ぶことによって, 非線形ゼロメモリー要素の非線形性の次数およびパラメータの同定が可能である. また最小限 $s_{2n}(m)$ 個の独立な入力関数の選択アルゴリズムを用いて, サンプル時刻ごとに測定した一般化インパルス応答より分離した線形インパルス応答 $h_1^i (i_1=1, 2, \dots, 2n)$ から線形部分のパラメータを同定できる. パラメータ同定時のノイズおよび演算誤差影響分は, サンプル個数を多くとり, 非線形部分については (9)式より得られる ρ_2' の平均値を求めることによって, また線形部分については (17), (20) 式における q, k の取りうる範囲を拡大し, おおのこの q, k について得られる $v_1, v_2, \dots, v_n$ および $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ の平均値を求めることによって軽減できることを示した.

参考文献

- 1) 若松秀俊, 関口 隆: 連立 1 次方程式の逐次求解による非線形系の同定, 計測自動制御学会論文集, 16-2, 154/161 (1980)

(注 3) 非線形性を示す次数 m の決定については, 第 4 章で具体的に述べる. なお各項の係数 ρ_i' については, 観測時刻の最大値が $2l$ であるとき, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq 2l$ を満足する添字 $i_1, i_2, \dots, i_r$ の組合せの最大個数 $r(2l+1)/2$ 個の ρ_i' を (9)式から求めて, その平均値をとれば, より精度の高い同定が可能である.