離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法[†]

藤井省三*・水野直樹*

A Design Method for a Discrete Model Reference Adaptive Control System

Seizo FUJII* and Naoki MIZUNO*

This paper presents a new method for designing a discrete model reference adaptive control (DMRAC) system by input synthesis adaptation. The controlled plant is a single-input and single-output, continuous-time, linear plant. The control is performed by a digital computer. Liapunov's direct method is used to establish a parameter-adjustment law which ensures an asymptotic stability of the error signal. A sufficient condition of stability for the DMRAC system is clarified. The derived adaptive control algorithm can be implemented through a simple and systematic design procedure. In the implementation only available input-output data of the plant are used and no parameters of the reference model or of the plant are used.

Moreover, this paper presents the equivalent parameter adaptation of this method. The results of computer simulation of the adaptive control applied to a stable plant and to an unstable plant are included to illustrate the effectiveness of the proposed method.

1. 緒 言

プラントの特性が未知で、目標値、外乱あるいは経時により変化する場合には、その特性をたえず認知して制御装置の特性を所期の目的を満たすように変化させる制御、すなわち適応制御を行うことが必要である。

適応制御に関しては、これまでいろいろな手法が提案されている^{1),2)}。そのなかで、モデル規範形適応制御方式は不変、あるいはゆっくりと変化する未知パラメータを含むプラントの制御に対し有力な手段を与える。それは、プラントに対し、その動作の手法となる

系すなわち規範モデルを用意して、両者の応答が一致するように適応制御を行うものである。その制御法には二つの基本的な考え方がある²⁾。一つはパラメータ適応とよばれ、プラントの可調整パラメータまたはプラントに付加された可変パラメータを調整するもので、他の一つは信号合成適応とよばれ、プラントへの入力を調整するものである。いずれも測定可能な信号のみを用いて、制御系の安定性が保証された調整則を作ることが望ましい。一般の系において、規範モデルのすべてのパラメータに対応してプラント側のパラメータを可調整にするように構成し、安定な設計法を確立することは一般に困難であるので、後者の手法が現在ではより実際の融通性のある設計法とみなされ、主流をなしている。

一般に適応制御系においては、制御装置はかなり複雑な動作が要求されるので、デジタル計算機を用いることになる。したがって連続時間で動作するプラントを離散化したものに対して、離散時間形式の適応制御系を設計する必要がある。適応制御系は一般に非線形で時変系であることにより、連続時間形式の適応制御の設計結果をそのまま離散時間系へ適用することはできない。別に安定性の保証された離散時間形式のモデル規範形適応制御系の設計法を確立する必要がある。

信号合成適応によるこの種の設計法の研究がすでに二、三報告されている^{3),4)}。Ionescuら³⁾は、Monopoliの提案した拡張誤差を用いる連続時間形式の適応制御系の設計法を離散時間領域で Liapunov の安定論に基づいて論じている。鈴木ら⁴⁾もこれと同種の問題を Popov の超安定論を用いて論じている。しかしいずれの論文においても、系の安定性を保証するために、プラントの入力に關係する信号の有界性を仮定している。また前者においては、多くの高次のフィルタを使用するため制御装置の構造が非常に複雑であり、後者においては、さらにそのアルゴリズムにおいて3次代数方程式の求解が要求される。

[†] 第21回自動制御連合講演会で発表(昭53・11)

* 名古屋工業大学工学部 名古屋市昭和区御器所町

* Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya

(Received March 3, 1980)

(Revised May 12, 1980)

本論文では、単一入出力系に対して、Liapunov の安定論に基づいて、測定可能な信号のみを用いて規範モデルとプラントのパラメータをまったく必要としない、離散時間モデル規範形適応制御系を信号合成適応によって構成する一つの設計法を提案する。この設計法は体系的で、より一般的な調整則を容易に導出でき、また構造も簡潔で、しかも多入出力系に容易に拡張できる⁵⁾という利点をもっている。

以下では、本論文で扱う問題を述べ、設計の基礎となる出力誤差に関する方程式を導く。つぎにこの方程式に Liapunov の安定論を適用することにより、適応制御系の安定性を保証するための条件および調整則を導出する。さらに、パラメータ適応との関係を明確にする。最後に、ここに提案する適応制御法の有効性を示すために、計算機シミュレーションの結果を述べる。

2. 問題の設定

ここでは、 n 次の単一入出力の伝達関数が s の右半面に零点をもたない。連続時間集中定数線形系(以下、ここではこれを略して連続時間系とよぶ)でモデル化できるプラントを、ディジタル計算機を制御装置に用いて離散時間で適応制御を行う場合を考える。したがって、プラントを、その連続時間系の入力側へサンブラと零次ホールド回路を前置し、出力側にサンブラを後置してえられる離散時間系で記述する。以下、連続時間系での Krishnan の方法⁶⁾と同様の定式化を進めるが、離散時間系であるためのいくつかの創意工夫を行っている。いま、その離散時間系が可観測であるとき、つぎの Lüders-Narendra の正準形⁷⁾に書くことができる。

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{b}_p u(k) \quad (1. a)$$

$$y_p(k) = \mathbf{c}_p^T \mathbf{x}_p(k) \quad (1. b)$$

ここで、

$$\mathbf{x}_p^T(k) = [x_{p1}(k), x_{p2}(k), \dots, x_{pn}(k)]$$

$$\mathbf{c}_p^T = [1, 0, \dots, 0]$$

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} a_{p1} & 1 & \dots & 1 \\ a_{p2} & -\lambda_2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{pn} & \mathbf{0} & & -\lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} b_{p1} \\ b_{p2} \\ \vdots \\ b_{pn} \end{bmatrix}$$

また $(\cdot)^T$ は $(\cdot)$ の転置を示す。添字 p はプラントを示す。 $\mathbf{x}_p(k)$, $u(k)$, $y_p(k)$ はそれぞれ k 時点における n 次元状態変数ベクトル、スカラー入力、スカラー出力である。 $\mathbf{A}_p$ の要素である λ_i ($i=2, \dots, n$) はすべて相異なり、絶対値が 1 より小さい既知の任意定数である。 $\mathbf{A}_p$ のその他の要素 a_{pi} ($i=1, \dots, n$) およ

び $\mathbf{b}_p$ の要素 b_{pi} ($i=1, \dots, n$) のすべては未知とする。さらに次数 n はプラントの構造に関する知識より既知であるとする。さらに(1)式のシステムは可制御とする。そのとき(1)式の伝達関数表現はつぎになる。

$$\begin{aligned} Y_p(z)/U(z) &= \mathbf{c}_p^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{b}_p = G_p(z) \\ &= \frac{b_{p1} + b_{p2}(z + \lambda_2) + \dots + b_{pn}(z + \lambda_n)}{z - a_{p1} - a_{p2}(z + \lambda_2) - \dots - a_{pn}(z + \lambda_n)} \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、 $z = e^{sT}$, s はラプラス演算子、 T はサンプリング周期を示す。

(2)式より明らかなように、 b_{p1} は、 $u(k)$ に単位ステップ入力をいれたときの $k=1$ 時点における出力 $y_p(k)$ の値を与える。零次ホールド回路と組み合わされた連続時間系の離散時間表現においては、 $b_{p1} \neq 0$ である。それゆえ、 $G_p(z)$ の分母、分子の z の次数差は、実現可能な連続時間系の伝達関数における分母、分子の s の次数差にかかわらず、つねに 1 になることに注意する。

ここで、 $G_p(z)$ の零点はすべて z 平面上の単位円内にあるものとする。これは、のちに述べるようにプラントの入力 $u(k)$ を有界にするための十分条件として必要である。

(1)式で与えられるプラントに対して、同じ構造と次元をもつ、つぎの規範モデルを考える。

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(k) + \mathbf{b}_m r(k) \quad (3. a)$$

$$y_m(k) = \mathbf{c}_m^T \mathbf{x}_m(k) \quad (3. b)$$

ここで

$$\mathbf{x}_m^T(k) = [x_{m1}(k), x_{m2}(k), \dots, x_{mn}(k)]$$

$$\mathbf{c}_m^T = [1, 0, \dots, 0]$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & 1 & \dots & 1 \\ a_{m2} & -\lambda_2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{mn} & \mathbf{0} & & -\lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix}$$

添字 m はモデルを示す。 $r(k)$ はモデルへのスカラー入力で有界であり、またモデルは安定とする。

モデルのパラメータ a_{mi} , b_{mi} ($i=1, \dots, n$) は通常既知であるが、モデルがパラメータ未知の機械で与えられ、プラントがその応答を規範とする場合を考慮して、以下に述べる設計法では未知として取り扱う。もちろん既知の場合には、その結果を容易に変更し簡単化できる(後章参照)。

ここで考えるモデル規範形適応制御の目的は、適応速度に比べて未知パラメータの変動速度がおそい場合に、プラントの出力 $y_p(k)$ を、その入力 $u(k)$ を測定可能な信号のみを用いて適応的に調整して、理想的な応答であるモデルの出力 $y_m(k)$ に追従させることであ

る。

3. 誤差方程式の導出

状態誤差を

$$e_i(k) = x_{mi}(k) - x_{pi}(k), \quad i=1, \dots, n \quad (4)$$

と定めると, (3.a)式より(1.a)式を差し引いて, 各状態誤差について次式をうる。

$$e_1(k+1) = a_{m1}e_1(k) + d_1x_{p1}(k) + b_{m1}r(k) - b_{p1}u(k) + \sum_{i=2}^n e_i(k) \quad (5)$$

$$e_i(k+1) = -\lambda_i e_i(k) + a_{mi}e_1(k) + d_i y_p(k) + b_{mi}r(k) - b_{pi}u(k) \quad i=2, \dots, n \quad (6)$$

ただし, $d_i = a_{mi} - a_{pi}$, $i=1, \dots, n$

(5)式の $e_i(k)$ ($i=2, \dots, n$) を消去するために, 次式の1次フィルタから発生される補助信号 $p_i(k)$, $q_i(k)$, $v_i(k)$, $w_i(k)$ ($i=2, \dots, n$) を導入する。

$$\left. \begin{aligned} p_i(k+1) &= -\lambda_i p_i(k) + K_{1i}e_1(k) \\ q_i(k+1) &= -\lambda_i q_i(k) + K_{2i}y_p(k) \\ v_i(k+1) &= -\lambda_i v_i(k) + K_{3i}r(k) \\ w_i(k+1) &= -\lambda_i w_i(k) - K_{4i}u(k) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし, K_{ji} ($i=2, \dots, n$, $j=1, \dots, 4$) は零でない任意定数である。

(5)~(7)式より $e_i(k)$ を消去するとつぎの結果をうる。

$$\begin{aligned} e_1(k+1) &= a_{m1}e_1(k) + d_1y_p(k) + b_{m1}r(k) - b_{p1}u(k) \\ &+ \sum_{i=2}^n \{a_{mi}p_i(k)/K_{1i} + d_iq_i(k)/K_{2i} \\ &+ b_{mi}v_i(k)/K_{3i} + b_{pi}w_i(k)/K_{4i}\} + h(k) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,

$$\begin{aligned} h(k) &= \sum_{i=2}^n (-\lambda_i)^k \{e_i(0) - a_{mi}p_i(0)/K_{1i} \\ &- d_iq_i(0)/K_{2i} - b_{mi}v_i(0)/K_{3i} \\ &- b_{pi}w_i(0)/K_{4i}\} \end{aligned} \quad (9)$$

$h(k)$ は出力誤差 $e_1(0)$ を除く状態誤差と補助信号の初期値からなっており, $|\lambda_i| < 1$ ($i=2, \dots, n$) より $k \rightarrow \infty$ で零となる。

つぎに, プラントの入力 $u(k)$ を測定可能な信号のみを用いて, つぎのように発生させる。

$$\begin{aligned} u(k) &= [\theta_1(k)e_1(k) + \phi_1(k)y_p(k) + \phi_i(k)r(k) \\ &+ \eta_1(k)e_1(k-1) + \sum_{i=2}^n \{\theta_i(k)p_i(k) \\ &+ \phi_i(k)q_i(k) + \phi_i(k)v_i(k) \\ &+ \eta_i(k)w_i(k)\}]/\pi(k) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $\theta_i(k)$, $\phi_i(k)$, $\phi_i(k)$, $\eta_i(k)$ ($i=1, \dots, n$) および $\pi(k)$ は $(4n+1)$ 個の適応ゲインで, 次章で述

べる調整則によって定める。

(10)式を(8)式に代入して整理し, その結果の式に e_1 に関して PID 動作(注1)を実現するために, 両辺に $\alpha e_1(k) + \beta e_1(k-1)$ (設計パラメータ α , β の定め方はのちに述べる)を加えると次式をうる。

$$\tilde{e}_1(k+1) = r^T(k)\delta(k) + h(k) \quad (11)$$

ただし,

$$\tilde{e}_1(k+1) = e_1(k+1) + \alpha e_1(k) + \beta e_1(k-1) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} r^T(k) &= [a_{m1} + \alpha - \theta_1(k), \quad d_1 - \phi_1(k), \quad b_{m1} - \phi_1(k), \\ &\beta - \eta_1(k), \quad a_{m2}/K_{12} - \theta_2(k), \dots, a_{mn}/K_{1n} \\ &- \theta_n(k), \quad d_2/K_{22} - \phi_2(k), \dots, d_n/K_{2n} \\ &- \phi_n(k), \quad b_{m2}/K_{32} - \phi_2(k), \dots, b_{mn}/K_{3n} \\ &- \phi_n(k), \quad b_{p2}/K_{42} - \eta_2(k), \dots, b_{pn}/K_{4n} \\ &- \eta_n(k), \quad \pi(k) - b_{p1}] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \delta^T(k) &= [e_1(k), \quad y_p(k), \quad r(k), \quad e_1(k-1), \quad p_2(k), \\ &\dots, \quad p_n(k), \quad q_2(k), \dots, \quad q_n(k), \quad v_2(k), \dots, \quad v_n(k), \\ &w_2(k), \dots, \quad w_n(k), \quad u(k)] \end{aligned} \quad (14)$$

(12)~(14)式はそれぞれスカラー $\tilde{e}_1(k+1)$, $(4n+1)$ 次元ベクトルの未知パラメータと適応ゲインからなる $r(k)$, および測定可能な信号からなる $\delta(k)$ を示す(注2)。

次章では, (11)式をもとにして, $k \rightarrow \infty$ で $\tilde{e}_1(k) \rightarrow 0$ を保証するための $r(k)$ すなわち適応ゲイン $\theta_i(k)$, $\phi_i(k)$, $\phi_i(k)$, $\eta_i(k)$ ($i=1, \dots, n$) および $\pi(k)$ の調整則と条件を求める。そのとき, (12)式において, α , β を多項式 $z^2 + \alpha z + \beta$ が安定となるように選べば $k \rightarrow \infty$ で $e_1(k) \rightarrow 0$ をうる。

4. 適応制御系の設計

適応ゲインの調整則に関連して, つぎのことがいえる。

(11)式のシステムは, $r(k)$ を

$$r(k) = r(k-1) - \varepsilon(k)\tilde{e}_1(k)\delta(k-1) \quad (15)$$

$$\varepsilon(k) = \rho / [\delta^T(k-1)\delta(k-1)], \quad 0 < \rho < 2 \quad (16)$$

に従って調整することにより, $k \rightarrow \infty$ で $\tilde{e}_1(k) \rightarrow 0$ すなわち $e_1(k) \rightarrow 0$ にすることができる。(証明とその条件については次章で述べる。なお, 文献8に示されて

(注1) $e_1(k+1) + \alpha e_1(k) + \beta e_1(k-1)$
 $= [e_1(k+1) + \alpha' \{e_1(k+1) - e_1(k)\} + \beta' \{e_1(k+1) - 2e_1(k) + e_1(k-1)\}]/(1 + \alpha' + \beta')$
 ただし, $\alpha = -(\alpha' + 2\beta')/(1 + \alpha' + \beta')$
 $\beta = \beta'/(1 + \alpha' + \beta')$

(注2) β は通常, 既知の設計パラメータであり, $\eta_i(k) \equiv \beta$ として固定することができるが, 後述のように, 十分一般的でない規範入力では $r=0$ とならないために, $\eta_i(k)$ を適応ゲインとして調整することにより, 制御系の過渡特性の改善を図ることを考慮して, 他のパラメータと同様, ここでは統一的に扱っている。

Fig. 1 Schematic diagram of the model reference adaptive control system

いる，より一般の調整則に対しても成立する.)

(15)式は $(4n+1)$ 個の適応ゲインの調整則について書き直すとつぎになる.

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(k) &= \theta_1(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) e_1(k-1) \\ \phi_1(k) &= \phi_1(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) y_p(k-1) \\ \psi_1(k) &= \psi_1(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) r(k-1) \\ \eta_1(k) &= \eta_1(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) e_1(k-2) \\ \theta_i(k) &= \theta_i(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) p_i(k-1) \\ \phi_i(k) &= \phi_i(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) q_i(k-1) \\ \psi_i(k) &= \psi_i(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) v_i(k-1) \\ \eta_i(k) &= \eta_i(k-1) + \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) w_i(k-1) \end{aligned} \right\} \quad i=2, \dots, n$$

$$\pi(k) = \pi(k-1) - \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) u(k-1) \quad (17)$$

Fig. 1 に，上述した測定可能な信号のみを用いた信号合成適応によって構成する，モデル規範形適応制御系の概略を示す.

規範モデルのパラメータが既知である場合には，(17)式中の適応ゲイン θ_i, ϕ_i ($i=1, \dots, n$) と η_1 をつぎの値に固定して， $2n$ 個の適応ゲインについての調整則を構成すればよい.

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= a_m + \alpha, \quad \phi_1 = b_m, \quad \eta_1 = \beta \\ \theta_i &= a_m / K_{1i}, \quad \phi_i = b_m / K_{3i} \quad (i=2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

5. 安定性に関する考察

まず，(11)式において $h(k)=0$ のとき，システムが一樣漸近安定な原点をもてば， $k \rightarrow \infty$ で零となる $h(k)$ を加えたシステム(11)式は，eventually asymptotically stable な原点になることが示されている⁹⁾ので，以下では，(11)式において $h(k)=0$ の場合のシステムが $k \rightarrow \infty$ で $\tilde{e}_1(k) \rightarrow 0$ になる証明と条件を与える.

まず， $r(k)$ に関するリアプノフ関数としてつぎのような $V(k)$ を考える.

$$V(k) = r^T(k) r(k) \quad (19)$$

$V(k)$ の差分 $\Delta V(k)$ は，(11)，(15)，(16)式を用いてつぎになる.

$$\Delta V(k) = V(k) - V(k-1)$$

$$\begin{aligned} &= r^T(k) r(k) - r^T(k-1) r(k-1) \\ &= [r^T(k-1) - \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) \delta^T(k-1)] \\ &\quad \times [r(k-1) - \varepsilon(k) \tilde{e}_1(k) \delta(k-1)] \\ &\quad - r^T(k-1) r(k-1) \\ &= -\varepsilon(k) [2 - \varepsilon(k) \delta^T(k-1) \delta(k-1)] \tilde{e}_1^2(k) \\ &= -\rho(2 - \rho) \tilde{e}_1^2(k) / [\delta^T(k-1) \delta(k-1)] \leq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$\Delta V(k)$ は有限時間発散が起こらなければ準負定であり，つぎの3通りの場合に零となる.

- (1) $\|\delta\|$ が有界で， $\tilde{e}_1=0$ の場合
- (2) $\|\delta\|$ が無限大で， $\tilde{e}_1$ が有界である場合
- (3) $\|\delta\|, |\tilde{e}_1|$ がともに無限大で， $\|\delta\|$ の無限大への移行が $|\tilde{e}_1|$ のそれより速い場合

いずれの場合も， $k \rightarrow \infty$ で $\Delta V(k) \rightarrow 0$ より， $V(k)$ は一定となり， $r(k)$ は一定に収束する. また， $r(k)$ は有界である.

(1) の場合は， $k \rightarrow \infty$ で $e_1 \rightarrow 0$ となるので，所望の結果である.

(2) の場合について考察する. $\tilde{e}_1$ が有界であれば，(12)式から e_1 は有界となり，(4)式と r の有界性の仮定より y_p も有界となる. プラントの伝達関数 $G_p(z)$ の分母分子の次数差は1である. さらに $G_p(z)$ の零点はすべて z 面の単位円内にあるとすれば， $1/[z + \lambda] G_p(z)$ (ただし $|\lambda| < 1$ とする) は安定で，プロパーな伝達関数である. それゆえに， $\mathcal{Z}^{-1}\{1/[z + \lambda] G_p(z) Y_p(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{1/(z + \lambda) \cdot U(z)\}$ は有界となる (ここで， $\mathcal{Z}^{-1}$ は逆 z 変換を示す). したがって， u は有界である.

つぎに補助信号 p_i, q_i, v_i, w_i ($i=2, \dots, n$) は，(7)式と e_1, y_p, r, u が有界であることから有界となる. 以上より， δ は有界になる (可制御であるとき，(4)，(6)式から x_p も有界である). 結局， r が有界， $G_p(z)$ の零点がすべて z 面の単位円内にあれば， $|\tilde{e}_1|$ が有界で $\|\delta\|$ が無限大になる解は存在せず，(2) の場合は起りえない.

(3) の場合をつぎに考察する. (20)式の ΔV の分母，分子は，それぞれ(12)，(14)式を用いて，プラントの入出力がモデルのそれに比して十分大きくなったときを考えると，つぎのように近似できる.

$$\rho(2 - \rho) \tilde{e}_1^2(k) \doteq \rho(2 - \rho) [y_p(k) + \alpha y_p(k-1) + \beta y_p(k-2)]^2 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta^T(k-1) \delta(k-1) &\doteq 2y_p^2(k-1) + y_p^2(k-2) \\ &\quad + u^2(k-1) + \sum_{i=2}^n \{p_i^2(k-1) \\ &\quad + q_i^2(k-1) + w_i^2(k-1)\} \end{aligned} \quad (22)$$

上式とともに、プラントの入出力のみで書き表わすことができるので、 $G_p(z)$ の零点が単位円内にあれば、すべての発散入力も消去されることなく出力に影響を及ぼすので、 ΔV の分母、分子の大きさは同じオーダーである。すなわち ΔV は零とはならず、 $\Delta V < c < 0$ なる c が存在する。したがって、 V 関数の初期値が有限であることより、プラントの零点が単位円内にあれば(3)の場合は起り得ない。

なお、上述の証明においては、有限時間発散が起らないことを仮定している。いま、ある有限な k の値 (k_0+1 とする) で、 $|\tilde{e}_1(k_0+1)|$ が無限大となる有限時間発散は、以下に述べるようにアルゴリズムにおいて容易にさけることができる。 $|\tilde{e}_1(k_0+1)|$ が無限大となるのは、(11)式において $r(k_0)$ の有界性より $\|\delta(k_0)\|$ が無限大すなわち $|u(k_0)|$ が無限大になるときである。(10)式より、ある有限な k_0 で $|u(k_0)|$ が無限大となるのは、 $\pi(k_0)=0$ 以外にはない。 $\pi(k_0)=0$ をさけるには、(17)式の π の調整則で ρ を $0 \sim 2$ の範囲で変えて、 $\pi(k_0) \neq 0$ とすればよい(計算機シミュレーションにおいて、 π の初期値を適当な大きさにとれば、 $\pi(k_0)=0$ となる例を経験していないので、実用上これが動作することはほとんどないと考え)。

以上より、 r が有界、プラントの零点が単位円内にあれば、 u が有界で $k \rightarrow \infty$ で $\tilde{e}_1(k) \rightarrow 0$ となる。そして(12)式において、 α, β を多項式 $z^2 + \alpha z + \beta$ が安定となるように選定すれば、 $k \rightarrow \infty$ で $\tilde{e}_1(k) \rightarrow 0$ を保証する。 α, β の安定条件は容易に知れるように

$$\beta < 1, 1 + \alpha + \beta > 0, 1 - \alpha + \beta > 0 \quad (23)$$

である。

6. パラメータ適応との関連

これまでの設計法において、補助信号を用いて記述を行ってきたが、(7)式より明らかなように補助信号をすべて測定可能な信号によって書くことができる。実際の計算においては、補助信号を用いたほうが便利であるが、補助信号をまったく使用しなくても制御系の記述を行うことができる。ここでは、補助信号を消去することにより、本設計法において信号合成適応形のモデル規範形適応制御系が、パラメータ適応形のそれで記述できることを示そう。

(10)式に(7)式を代入した結果(ただし、初期条件を零とおく)を用いて、Fig. 1の制御系は適応ゲインのある一定値に対して Fig. 2 のように書くことができる。ここで、

$$G_\theta(z) = \theta_1 + \eta_1/z + \sum_{i=2}^n K_{1i} \theta_i / (z + \lambda_i) \quad \left. \begin{aligned} G_\phi(z) &= \phi_1 + \sum_{i=2}^n K_{2i} \phi_i / (z + \lambda_i) \\ G_\gamma(z) &= \gamma_1 + \sum_{i=2}^n K_{3i} \gamma_i / (z + \lambda_i) \\ G_\eta(z) &= \sum_{i=2}^n K_{4i} \eta_i / (z + \lambda_i), \quad G_\pi = 1/\pi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Fig. 2 Equivalent parameter adaptation representation of the input synthesis adaptation in Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} G_\phi(z) &= \phi_1 + \sum_{i=2}^n K_{2i} \phi_i / (z + \lambda_i) \\ G_\theta(z) &= \theta_1 + \sum_{i=2}^n K_{3i} \theta_i / (z + \lambda_i) \\ G_\eta(z) &= \sum_{i=2}^n K_{4i} \eta_i / (z + \lambda_i), \quad G_\pi = 1/\pi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

なるパルス伝達関数を示す。

適応制御は、(24)式の適応ゲインに相当するパラメータを調整することにより、プラントの出力をモデルの出力に一致させるパラメータ適応とみなすことができる。ただし、モデルの伝達関数 $G_m(z)$ の次数に比して、プラント側全体の伝達関数の次数が高いパラメータ適応の問題となっている¹⁰⁾。すなわち、Fig. 2より容易に $R(z)$ から $Y_p(z)$ までの伝達関数は、

$$\begin{aligned} \frac{Y_p(z)}{R(z)} &= G(z) \\ &= \frac{G_\pi G_p(z) [G_\phi(z) + G_m(z) G_\theta(z)]}{1 + G_\pi [G_\gamma(z) + G_p(z) \{G_\theta(z) - G_\phi(z)\}]} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。モデルの伝達関数 $G_m(z)$ の分母、分子の次数がそれぞれ $n, n-1$ であるのに対し、 $G(z)$ のそれらは $3n, 3n-1$ となる。モデルのパラメータが既知のときには、 G_θ, G_ϕ のパラメータは固定され、時不変の伝達関数となる。

$r=0$ のとき、モデルとプラント側の伝達関数は一致する。すなわち $G(z) = G_m(z)$ になる。 r がステップ信号のときには、通常 $r \neq 0$ であるので、次数の一致はえられず、ただ定常ゲインが合うだけである。

7. 数値計算例

上述の適応制御系の動作を検討するため、安定および不安定なプラントについて計算機シミュレーションを実施した。ともにつぎの3次系の伝達関数で記述されるプラントおよび規範モデルを用い、それらすべてのパラメータを未知とする調整則を用いた。

$$G(s) = \frac{K\sigma\omega_n^2(T_1s+1)}{(s+\sigma)(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)} \quad (26)$$

【例 1】 安定なプラントと規範モデルに対して、(26) 式の各パラメータをつぎのように選定した。

プラント： $\zeta=1.2$, $\omega_n=1.0$, $\sigma=1.0$, $T_1=0.333$

$K=1.3$

規範モデル： $\zeta=0.7$, $\omega_n=1.0$, $\sigma=1.5$, $T_1=2.0$

$K=1.0$

上記の伝達関数に零次ホールド回路を組み合わせたものを、サンプリング周期 $T=0.2$ で離散化して、Lüders-Narendra の正準形に書き直したとき、プラントと規範モデルのパラメータはつぎになる。

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 2.21 & 1 & 1 \\ 4.69 & 0.13 & 0 \\ -6.17 & 0 & 0.067 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} 0.00838 \\ -0.0613 \\ 0.0665 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 2.26 & 1 & 1 \\ 5.32 & 0.13 & 0 \\ 6.90 & 0 & 0.067 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 0.0511 \\ 0.618 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

ただし、 $\lambda_2=-0.13$, $\lambda_3=-0.067$ と選んだ。

さらに、規範入力としては、 $r(k)=1$ なる単位ステップ信号を用いた。Fig. 3 にシミュレーション結果を示す。この例では設計パラメータとしてつぎの値を用いた。

$$\rho=1.0, \quad \alpha'=40 (\alpha=-1.58), \quad \beta'=60 (\beta=0.594),$$

$$\pi(0)=0.025, \quad K_{1i}=K_{2i}=K_{3i}=10, \quad K_{4i}=0.1$$

$$(i=2, 3)$$

適応ゲイン、補助信号、プラントおよびモデルの状態変数の初期値はすべて零としている。Fig. 3 の白丸はモデルの出力、黒丸はプラントの出力、実線はプラントの単位ステップ応答を示す。プラントの出力は規範モデルの出力によく追従しており、適応制御系として有効に動作していることがわかる。なお、 $k \rightarrow \infty$ で $e_1 \rightarrow 0$ であるが、 $r \rightarrow 0$ とはならない。

【例 2】 プラントが不安定である場合である。(26)

Fig. 3 Simulation results for a stable third order plant

Fig. 4 Simulation results for an unstable third order plant

式におけるプラントの各パラメータをつぎに示す。

$$\zeta=-1.2, \quad \omega_n=0.3, \quad \sigma=5.0, \quad T_1=0.5, \quad K=1.3$$

また、規範モデルのパラメータは例 1 と同じである。

離散時間形式の正準形のパラメータはつぎになる。

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1.42 & 1 & 1 \\ -0.183 & 0.2 & 0 \\ -0.0220 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_p = \begin{bmatrix} 0.00518 \\ 0.00370 \\ 0.00300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 1.36 & 1 & 1 \\ -0.349 & 0.2 & 0 \\ 0.00384 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 0.0511 \\ 0.0542 \\ -0.000619 \end{bmatrix}$$

ただし、 $\lambda_1=-0.2$, $\lambda_2=-0.9$ に選んである。

規範入力としては、 $r(k)=1$ なる単位ステップ信号を用いた。Fig. 4 にシミュレーション結果を示す。設計パラメータはつぎの値を用いた。

$$\rho=1.0, \quad \alpha'=3.0 (\alpha=-9/7), \quad \beta'=3.0 (\beta=3/7),$$

$$\pi(0)=0.003, \quad K_{1i}=K_{2i}=K_{3i}=10, \quad K_{4i}=0.5$$

$$(i=2, 3)$$

各信号の初期値は例 1 と同様に、すべて零とおいた。プラントが不安定であるにもかかわらず、その出力は安定化して規範モデルの出力によく追従していることがわかる。なお、例 1, 2 に対して規範入力 r に多段ステップ信号を入れた場合も行ったが、良好な結果をえている。

モデルのパラメータを既知として簡単化された調整則を用いた場合に対するシミュレーションも行った。設計パラメータ値は異なるが、ほとんど同様な結果をえた。

8. 結 言

単一入出力の連続時間集中定数線形系を計算機制御する、離散時間形式のモデル規範形適応制御系の一設計法を示した。特に Liapunov の安定論に基づき、離散時間形式の適応制御系の安定性の考察を行い、十分条件を明確にした。またパラメータ適応との関連を考

察した。本設計法によれば、規範モデルとプラントのパラメータをまったく必要としないで、現時点までの測定可能な信号のみを用い、プラントへの入力を信号合成適応させることができる。

なお、設計パラメータの最適選定法は今後の重要な研究課題である。さらに、本手法の多入出力系への拡張と、実プラントへの応用については、別に報告する予定である。

参考文献

- 1) I. D. Landau: A Survey of Model Reference Adaptive Techniques-Theory and Applications, *Automatica*, **10**-4, 353/379 (1974)
- 2) 小林: モデル規範形適応制御系, 計測と制御, **17**-8, 602/612 (1973)
- 3) T. Ionescu and R. V. Monopoli: Discrete Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, *Automatica*, **13**-5, 507/517 (1977)
- 4) 鈴木, 高島: 超安定離散時間モデル規範形適応制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **13**-5, 433/438 (1977)
- 5) 藤井, 柴田, 水野, 後藤: 多変数離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法とその応用, 第8回制御理論シンポジウム資料, 53/56 (1979)
- 6) K. R. Krishnan: Adaptive Model-Reference Control of an Unknown Plant with Limited Knowledge of Model, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-22**-3, 484/486 (1977)
- 7) G. Lüders and K. S. Narendra: An Adaptive Observer and Identifier for a Linear System, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-18**-5, 496/499 (1973)
- 8) P. Kudva and K. S. Narendra: An Identification Procedure for Discrete Multivariable Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-19**-5, 549/552 (1974)
- 9) J. P. Lasalle and R. J. Rath: Eventual Stability, *Proc. 2nd Congr. IFAC*, 415, 1/4 (1963)
- 10) 伊藤: 適応制御系におけるパラメータ可調整, 計測と制御, **8**-4, 240/246 (1969)