最適満足化問題のペナルティ法による新しい解法

相 吉 英太郎*・米 田 良 樹*・志 水 清 孝*

An Optimization-Satisfaction Problem and Its New Solution Method by a Penalty Method

Eitaro ARIYOSHI*, Yoshiki YONEDA* and Kiyotaka SHIMIZU*

This paper is concerned with an optimization-satisfaction problem to determine an optimal solution such that a certain objective function is minimized subject to satisfaction conditions against uncertainties of any opponents' decisions or disturbances. Such satisfaction conditions require that plural performance criteria are always less than specified values against any opponents' decisions or disturbances. Therefore, this problem is formulated as a minimization problem with the constraints which include max operations with respect to the opponents' decision variables. The most general class of those problems where the objective and constraint functions depend on the maximizers as well as the minimizers is studied. A new computational method is proposed such that a series of approximate problems transformed by applying a penalty function method to the max operations within the satisfaction condition are solved by usual nonlinear programming. It is proved that a sequence of approximated solutions converges to the true optimal solution. The proposed algorithm may be useful for the systems design under unknown parameters, the process control under uncertainties, the study of general approximation theory, the strategic weapon allocation program etc.

1. はじめに

外乱の存在するシステムや敵対者のいるシステムにおいて、外乱や敵の決定に関し確率的な情報すら得られない場合の決定問題は、一般に不確実さのもとでの決定問題とよばれている。この種の問題の一般形式として、ある種の満足条件を満たす満足解の中から目的関

数を最小にするような最適満足解を求める問題を考える。この満足条件とは、外乱や敵の決定がどのように与えられても、複数の評価基準がそれぞれある許容水準以下であるという制約条件である。したがって、この種の問題は制約条件の一部に、別の変数に関する最大化操作を含む最小化問題として定式化される。この問題の特徴は、(1) 2 レベル構造のためにパラメトリックアプローチを取らねばならないこと、(2) 最大化操作による微分不可能関数の最適化を考えねばならないことである。

最適満足化問題はすでに志水^{7),8)}, Bracken³⁾, Gehner⁵⁾, Blankenship²⁾ らによって研究された。しかしこれらの研究は、目的関数および制約条件式が自己の決定変数のみの関数で敵の決定変数(外乱変数)を含まないなど、最も簡単な形の問題だけであり、本論文で考えるような一般的な問題はまったく研究されていない。また文献 2,8 で提案された緩和法(あるいは非線形切除平面法)による計算方法も、ここで考えるような問題に適用することはできない。

本論文では、最も一般的な形の最適満足化問題に対して、内点ペナルティ法¹⁾の理論を応用した新しい計算方法を提案する。この方法は満足条件内の最大化問題に対して、ペナルティ法を適用することによって元の最適満足化問題の変換問題を構成し、これを通常の非線形計画法を用いて解く逐次解法である。このとき、一連の変換問題から生成される最適解の点列が元の最適満足化問題の解に収束することが証明される。

ここで定式化される最適満足化問題は、外乱のあるシステムの設計問題、軍事戦略における兵器配分問題³⁾、市場競争下での投資問題などに応用が広く、また min-max 問題⁹⁾の一般的な拡張にもなっている。

2. 最適満足化問題の定式化

$x \in R^n$ を自己の決定変数、 $y_j \in R^{n_j}$ を外乱 j あるいは敵 j の決定変数とし、 y_j の制約集合は y_j に固有

* 慶応義塾大学工学部 横浜市港北区日吉町 3-14-1

* School of Engineering, Keio University, Yokohama
(Received November 16, 1979)

(Revised June 6, 1980)

の集合 Y_j と制約関数 g_j を用いて

$$Q_j(x) = \{y_j \in Y_j | g_j(x, y_j) \leq 0\}$$

で与えられるものとする。このとき外乱や敵の決定がどのように与えられても、複数の評価基準 f_j , $j=1, \dots, p$ がそれぞれ許容値 α_j , $j=1, \dots, p$ 以下であることを保証する満足条件は

$$f_j(x, y_j) \leq 0 \text{ for } \forall y_j \in Q_j(x), j=1, \dots, p \quad (1)$$

で与えられる。ただし定数 α_j , $j=1, \dots, p$ は一般性を失うことなく0としてある。ところで満足条件(1)は

$$\max_{y_j \in Q_j(x)} f_j(x, y_j) \leq 0, j=1, \dots, p$$

と等価だから、 $\max_{y_j \in Q_j(x)} f_j(x, y_j)$ のパラメトリック最大解を $\hat{g}_j(x)$ とおくと、最適満足化問題は満足条件 $f_j(x, \hat{g}_j(x)) \leq 0$, $j=1, \dots, p$ と一般制約条件 $G(x, \hat{g}_1(x), \dots, \hat{g}_p(x)) \leq 0$ のもとで、目的関数 $F(x, \hat{g}_1(x), \dots, \hat{g}_p(x))$ を最小にするような $x^* \in X$ を選ぶ問題である。これはつぎのように定式化される。

$$\min_x F(x, \hat{g}(x)) \quad (2.a)$$

$$\text{subj. to } x \in X \quad (2.b)$$

$$G(x, \hat{g}(x)) \leq 0 \quad (2.c)$$

$$f_j(x, \hat{g}_j(x)) = \max_{y_j \in Q_j(x)} f_j(x, y_j) \leq 0, j=1, \dots, p \quad (2.d)$$

$$\text{where } Q_j(x) = \{y_j | y_j \in Y_j, g_j(x, y_j) \leq 0\} \\ j=1, \dots, p \quad (2.e)$$

ここで $\hat{g}(x) = (\hat{g}_1(x)^T, \dots, \hat{g}_p(x)^T)^T$ である。また関数 f_j, g_j は $R^n \times R^{n_j}$ 上で、関数 F, G は $R^n \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_p}$ 上で定義されているものとする。(2.c)式は x と $\hat{g}(x)$ に対する制約、(2.e)式は x によって限定される y_j 側の制約集合である。以後、任意の $x \in X$ に対し $\hat{g}(x)$ が存在し、さらに(2.b~d)式を満たす許容解 x および問題(2)の最適満足解 x^* は存在するものと仮定する。

ところで、(2.a)式のように $F(x, \hat{g}(x))$ と一般的に表現しておけば、以下で与えられる計算方法はつぎの2通りの場合に有効である。

(i) 決定者サイドの評価基準 f_j が敵 j に知られており、敵 j が f_j を最悪にするような $\hat{g}_j(x)$ をとることがわかっている場合。

(ii) y_j には外乱などのように敵意がなく、任意の y_j に対して満足条件を満たすことが要求されている場合。ただし、このときは F, G は単に x のみの関数である。

一方、満足条件(2.d)式の評価基準 f_j はおのおの異なる変数 y_j の関数と考えているが、実際はつぎの2通りの場合を考えることができる。

(i) 評価基準 f_j ごとに物理的に異なる種類の外乱 y_j が作用する場合。

(ii) $y_1 = y_2 = \dots = y_p = y$ のように物理的に同一の外乱だが、各評価基準 f_j ごとに最悪に作用する場合を考えるという機能上の意味から、数値上異なる $\hat{g}_j(x)$ を与えるための変数とみなす場合。

最適満足化問題の解法は、制約式 $G \leq 0, g_j \leq 0$ が存在せず、かつ F が $\hat{g}(x)$ の関数になっていない最も基礎的な問題に対してのみ、緩和法による計算方法が与えられた⁸⁾。一方、問題(2)のように関数 F, G が $\hat{g}(x)$ の関数になっているような場合には、 $\hat{g}(x)$ を x の関数として陽的に与えることが必要である。このためには最大化問題 $\max_{y_j \in Q_j(x)} f_j(x, y_j)$ をパラメトリックに解かねばならないが、このことは一般に不可能である。そこで次章において、内点ペナルティ法¹⁾ (あるいはSUMT⁴⁾) の理論を応用して、問題(2)を解きやすい形に変換することを考える。

3. 最適満足化問題の変換

内点ペナルティ法の理論に基づき、 y_j に関する f_j の最大化を、制約式を組み込んだ拡張目的関数の制約なし最大化で置き換え、この最大解で $\hat{g}(x)$ を近似することを考える。ここで集合 Y_j は関数 h_j を用いて $Y_j = \{y_j | h_j(y_j) \leq 0\}$

で与えられるものとし、さらにつぎの仮定を置く。

(a) 任意に固定された x に対し、 $Q_j(x)$ の内部 $\text{int } Q_j(x)$ は

$$\text{int } Q_j(x) = \{y_j | h_j(y_j) < 0, g_j(x, y_j) < 0\}$$

で与えられかつ空でなく、その閉包は $Q_j(x)$ に等しい。

また $x \times \text{int } Q_j(x)$ (x は R^n 内の任意の点) で定義された拡張目的関数 P_j^r をつぎのように定義する。

$$P_j^r(x, y_j) = f_j(x, y_j) - r \phi_j(h_j(y_j), g_j(x, y_j)), \\ \text{where } r > 0$$

ここで関数 $\phi_j(h_j, g_j)$ は負領域で定義される。つぎのような連続関数である。

$$\phi_j(h_j(y_j), g_j(x, y_j)) > 0, \text{ if } y_j \in \text{int } Q_j(x)$$

$$\phi_j(h_j(y_j), g_j(x, y_j)) \rightarrow +\infty, \text{ if } y_j \rightarrow \partial Q_j(x)$$

ただし、 $\partial Q_j(x)$ は集合 $Q_j(x)$ の境界を表わす。

また y_j に関する最大化問題

$$\max_{y_j} f_j(x, y_j) \\ \text{subj. to } y_j \in Q_j(x) \quad (3)$$

に対し、拡張目的関数の制約なし最大化問題

$$\max_{y_j} P_j^r(x, y_j) \quad (4)$$

を考える。ここで

(b) 関数 $f_j(x, y_j), g_j(x, y_j)$ は (x, y_j) に関し, $h_j(y_j)$ は y_j に関し連続である.

(c) 集合 Y_j はコンパクトである (このとき任意に固定された x に対し $Q_j(x)$ もコンパクトになる).

と仮定すると, 任意に与えられた x に対し, 問題 (3) の最適解 $\theta_j(x)$ および問題 (4) の最適解 $\theta_j^r(x) \in \text{int } Q_j(x)$ の存在が保証され, さらに

(d) 任意に固定された x に対し, 関数 $f_j(x, y_j)$ が y_j に関し狭義の凹関数, 関数 $g_j(x, y_j), h_j(y_j)$ が y_j に関し凸関数である. また関数 ϕ_j が負の g_j, h_j に関し単調増加な凸関数である (このとき f_j の狭義の凹性, g_j, h_j の凸性より関数 P_j^r も狭義の凹関数となる).

が満たされるとき, 最適解 $\theta_j(x)$ および $\theta_j^r(x)$ の唯一性が保証される.

また関数 ϕ_j にはよく知られたつぎのようなものがある.

$$\phi_j(h_j, g_j) = \sum_{i=1}^{\dim h_j} \frac{1}{h_{ji}} + \sum_{i=1}^{\dim g_j} \frac{1}{g_{ji}}$$

$$\phi_j(h_j, g_j) = \sum_{i=1}^{\dim h_j} \frac{1}{h_{ji}^2} + \sum_{i=1}^{\dim g_j} \frac{1}{g_{ji}^2}$$

さて, $\tilde{x}$ に収束する点列 $\{x^k\} \subset X$ と狭義に単調減少してゼロに収束する正数列 $\{r^k\}$ に対応した問題 (4) の解の点列 $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ と問題 (3) の解 $\theta_j(x)$ との関係を考える. 点列 $\{x^k\}$ が一定のとき, すなわちすべての k に対し $x^k = \tilde{x}$ であるときは, 点列 $\{\theta_j^{rk}(\tilde{x})\}$ が $\theta_j(\tilde{x})$ に収束することが, 内点ペナルティ法の理論より直ちに得られる. しかし $\{x^k\}$ が変動するときは, $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ に関するこのような収束性はもはや明らかではない. そこでつぎの補題を用意する.

[補題 1] $\tilde{x}$ に収束する点列 $\{x^k\} \subset X$ と狭義に単調減少してゼロに収束する正数列 $\{r^k\}$ に対応した問題 (4) の最適解の点列を $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ とする. もし仮定 (a) ~ (d) が満たされるならば, つぎのことが成り立つ.

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_j^{rk}(x^k) = \theta_j(\tilde{x})$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_j^r(x^k, \theta_j^{rk}(x^k)) = f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x}))$$

(証明) (i) まず仮定 (a) ~ (c) を用いて点列 $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ の集積点の性質を示す.

(集積点の存在性) ペナルティ法の理論より, 任意の $x^k \in \{x^k\}$ に対して $\theta_j^{rk}(x^k) \in \text{int } Q_j(x^k) \in Y_j$ が成り立つ. このことと Y_j のコンパクト性より $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ の集積点の存在がいえる.

(集積点の許容性) 任意の集積点を $\tilde{y}_j$ とし, この点に収束する $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ の部分点列をあらためて $\{\theta_j^{rk}(x^k)\}$ とおく. Hogan⁶⁾ によれば g_j が (x, y_j) に関し連続のとき, 点対集合写像 $Q_j(x)$ は x で閉 (注 1) になるから, 閉性の定義より $\{x^k\} \subset X, x^k \rightarrow \tilde{x}, \theta_j^{rk}(x^k) \in Q_j(x^k)$ かつ $\theta_j^{rk}(x^k) \rightarrow \tilde{y}_j$ ならば $\tilde{y}_j \in Q_j(\tilde{x})$ である. すなわち集積点 $\tilde{y}_j$ は $\tilde{x}$ に対する問題 (3) の許容解である.

(集積点の最適性) $\tilde{y}_j$ が $\tilde{x}$ に対する問題 (3) の最適解でないとする, ある $y_j' \in Q_j(\tilde{x})$ が存在して

$$f_j(\tilde{x}, y_j') > f_j(\tilde{x}, \tilde{y}_j)$$

が成り立つ. ここで y_j' を中心とする半径 δ の開球 $B(y_j'; \delta) \subset R^{n_j}$ を考えると, f_j の連続性より

$$f_j(\tilde{x}, y_j) > f_j(\tilde{x}, \tilde{y}_j) \text{ for } \forall y_j \in B(y_j'; \delta_1)$$

であるような正数 δ_1 が存在する. さらに, 仮定 (a) より $Q_j(\tilde{x}) = \text{cl}(\text{int } Q_j(\tilde{x}))$ だから $\text{int } Q_j(\tilde{x}) \cap B(y_j'; \delta_1) \neq \emptyset$ が成り立ち, このことから y_j' とは別に

$$y_j'' \in \text{int } Q_j(\tilde{x}) \cap B(y_j'; \delta_1) \subset Q_j(\tilde{x})$$

なる点 y_j'' をとることができて,

$$f_j(\tilde{x}, y_j'') > f_j(\tilde{x}, \tilde{y}_j)$$

が成り立つ. そこでつぎのようにおく.

$$f_j(\tilde{x}, y_j'') - f_j(\tilde{x}, \tilde{y}_j) = 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0 \quad (5)$$

一方, Hogan⁶⁾ によると, 仮定 (b) の (x, y_j) に関する g_j の連続性と仮定 (a) のもとで $Q_j(x)$ は開 (注 1) であるから, $\{x^k\} \subset X, x^k \rightarrow \tilde{x}$ かつ $y_j'' \in Q_j(\tilde{x})$ ならば

$$y_j^k \in Q_j(x^k) \text{ for } \forall k > K_1 \quad (6)$$

であり, かつ $y_j^k \rightarrow y_j''$ であるような点列 $\{y_j^k\} \subset Y_j$ と正整数 K_1 が存在する.

一方, $y_j'' \in \text{int } Q_j(\tilde{x})$ だから $\phi_j(h_j(y_j''), g_j(\tilde{x}, y_j''))$ は有限, つまり点 $(\tilde{x}, y_j'')$ は合成関数 $\phi_j(h_j(y_j), g_j(x, y_j))$ の定義域内に存在する. また g_j, h_j および ϕ_j の連続性より, この合成関数もその定義域内で連続である. 以上のことから $x^k \rightarrow \tilde{x}, y_j^k \rightarrow y_j''$ のとき

$$\phi_j(h_j(y_j^k), g_j(x^k, y_j^k)) \rightarrow \phi_j(h_j(y_j''), g_j(\tilde{x}, y_j'')).$$

ゆえに, $k \rightarrow \infty$ のとき $r^k \rightarrow 0$ だから

$$r^k \phi_j(h_j(y_j^k), g_j(x^k, y_j^k)) \rightarrow 0$$

すなわち

(注 1) X 内の各点を Y の部分集合に写す点対集合写像 $S(x)$ の開および閉性はつぎのように定義される.

(i) $\{x^k\} \subset X, x^k \rightarrow \tilde{x}, y^k \in S(x^k)$ かつ $y^k \rightarrow \tilde{y}$ ならば $\tilde{y} \in S(\tilde{x})$ が成り立つとき, $S(x)$ は点 $\tilde{x} \in X$ で閉であるという.

(ii) $\{x^k\} \subset X, x^k \rightarrow \tilde{x}$ かつ $\tilde{y} \in S(\tilde{x})$ ならば, $k > K$ なる k に対し $y^k \in S(x^k)$ であり, かつ $y^k \rightarrow \tilde{y}$ であるような点列 $\{y^k\} \subset Y$ と正整数 K が存在するとき, $S(x)$ は $\tilde{x} \in X$ で開であるという.

$$P_j r^k(x^k, y_j^k) \rightarrow f_j(\tilde{x}, y_j'') \quad (15)$$

である。したがって(5)式のような ε_1 に対してある正整数 K_2 が存在して

$$|P_j r^k(x^k, y_j^k) - f_j(\tilde{x}, y_j'')| < \varepsilon_1 \text{ for } \forall k > K_2 \quad (7)$$

が成り立つ。また (x, y_j) に関する f_j の連続性より

$$|f_j(\tilde{x}, \tilde{y}_j) - f_j(x^k, \theta_j r^k(x^k))| < \varepsilon_1 \text{ for } \forall k > K_3 \quad (8)$$

であるような正整数 K_3 が存在する。 $K = \max(K_1, K_2, K_3)$ とおき(7), (5), (8)式を順に用いると、すべての $k > K$ に対してつぎのような関係を得る。

$$\begin{aligned} P_j r^k(x^k, y_j^k) &> f_j(\tilde{x}, y_j'') - \varepsilon_1 \\ &= f_j(\tilde{x}, \tilde{y}_j) + \varepsilon_1 > f_j(x^k, \theta_j r^k(x^k)) \end{aligned} \quad (9)$$

ところで $\phi_j > 0$ だから

$$f_j(x^k, \theta_j r^k(x^k)) > P_j r^k(x^k, \theta_j r^k(x^k)) \quad (10)$$

が成り立ち、(9)と(10)式よりつぎの関係式を得る。

$$P_j r^k(x^k, y_j^k) > P_j r^k(x^k, \theta_j r^k(x^k)) \text{ for } \forall k > K \quad (11)$$

(6), (11)式は、 $\theta_j r^k(x^k)$ が x^k および r^k に対する問題(4)の最適解であることに矛盾する。ゆえに $\{\theta_j r^k(x^k)\}$ の集積点は $\tilde{x}$ に対する問題(3)の最適解である。

つぎに、仮定(d)のもとでは $\tilde{x}$ に対する問題(3)の最適解は唯一であるから、 $\{\theta_j r^k(x^k)\}$ の集積点は唯一であり、点列 $\{\theta_j r^k(x^k)\}$ の極限になる。ゆえに $\{\theta_j r^k(x^k)\}$ は $\theta_j(\tilde{x})$ に収束する。

(ii) 数列 $\{P_j r^k(x^k, \theta_j r^k(x^k))\}$ が $f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x}))$ に収束しないと仮定すると、つぎのような正数 ε_2 と整数 K_4 が存在する。

$$|P_j r^k(x^k, \theta_j r^k(x^k)) - f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x}))| \geq 2\varepsilon_2 \text{ for } \forall k > K_4 \quad (12)$$

ここで $\theta_j(\tilde{x})$ を中心とする開球 $B(\theta_j(\tilde{x}); \delta) \subset R^{n_j}$ を考えると、 f_j の連続性より

$|f_j(\tilde{x}, y_j) - f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x}))| < \varepsilon_2 \text{ for } \forall y_j \in B(\theta_j(\tilde{x}); \delta_2)$ であるような正数 δ_2 が存在する。仮定(a)より $\theta_j(\tilde{x})$ とは別に、 $y_j'' \in \text{int } Q_j(\tilde{x}) \cap B(\theta_j(\tilde{x}); \delta_2)$ なる点 y_j'' をとることができて、つぎの式が成り立つ。

$$|f_j(\tilde{x}, y_j'') - f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x}))| < \varepsilon_2 \quad (13)$$

(i) の証明と同じ理由により、

$$y_j^k \in Q_j(x^k) \text{ for } \forall k > K_5 \quad (14)$$

であり、かつ $y_j^k \rightarrow y_j''$ であるような点列 $\{y_j^k\} \subset Y_j$ と正整数 K_5 が存在する。また $y_j'' \in \text{int } Q_j(\tilde{x})$ だから、(i) の証明と同様にして、(12)式のような ε_2 に対して

$$|P_j r^k(x^k, y_j^k) - f_j(\tilde{x}, y_j'')| < \varepsilon_2 \text{ for } \forall k > K_6$$

であるような正整数 K_6 が存在する。 $K = \max(K_4, K_5, K_6)$ とおき(15), (13), (12)式を順に用いると、すべての $k > K$ に対してつぎのような関係を得る。

$$\begin{aligned} P_j r^k(x^k, y_j^k) &> f_j(\tilde{x}, y_j'') - \varepsilon_2 \\ &> f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x})) - 2\varepsilon_2 \\ &\geq P_j r^k(x^k, \theta_j r^k(x^k)) \end{aligned} \quad (16)$$

(14), (16)式は、 $\theta_j r^k(x^k)$ が x^k および r^k に対する問題(4)の最適解であることに矛盾する。ゆえに $P_j r^k(x^k, \theta_j r^k(x^k))$ は $f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x}))$ に収束する。 ■

問題(2)の満足条件(2.d)を

$$P_j r(x, \theta_j r(x)) = \max_{y_j} P_j r(x, y_j) \leq 0$$

で置き換えたつぎのような問題を考える。

$$\min_x F(x, \theta^r(x)) \quad (17.a)$$

$$\text{subj. to } x \in X \quad (17.b)$$

$$G(x, \theta^r(x)) \leq 0 \quad (17.c)$$

$$\begin{aligned} P_j r(x, \theta_j r(x)) &= \max_{y_j} P_j r(x, y_j) \leq 0 \\ j &= 1, \dots, p \end{aligned} \quad (17.d)$$

ただし $\theta^r(x) = (\theta_1^r(x)^T, \dots, \theta_p^r(x)^T)^T$ で、 $\theta_j^r(x)$ は問題(4)の最適解とする。またある正数 R 以下のすべての r に対し、問題(17)は許容で最適解が存在するものとする。狭義に単調減少してゼロに収束する正数列 $\{r^k\}$ をパラメータ r に与えたときの問題(17)の最適解の点列を $\{x^{r^k}\}$ とし、この点列と元の問題(2)の最適解との関係を示すために、つぎの仮定を用意する。

(e) 関数 $F(x, y)$ および $G(x, y)$ は (x, y) に関し連続である。

(f) 集合 X はコンパクトで連結である。

(g) 集合 $\{x \in X | G(x, \theta(x)) < 0\}$ の閉包は $\{x \in X | G(x, \theta(x)) \leq 0\}$ に等しい。換言すれば、 $x \in \{x \in X | G(x, \theta(x)) \leq 0\}$ なる任意の点 x と、これを中心とするすべての開球 $B(x; \delta) \subset R^n$ に対し、 $\{x \in X | G(x, \theta(x)) < 0\} \cap B(x; \delta) \neq \emptyset$ が成り立つ。

仮定(g)は、たとえば集合

$$\begin{aligned} \{(x, \theta(x)) | \theta_j(x) \max_{y_j} f_j(x, y_j) \\ \text{subj. to } y_j \in Q_j(x), j=1, \dots, p, \\ \theta(x) = (\theta_1(x)^T, \dots, \theta_p(x)^T)^T\} \end{aligned}$$

が集合 $\{(x, y) | G(x, y) \leq 0\}$ と、その境界上 $\{(x, y) | G(x, y) = 0\}$ だけで共有点をもつような特殊な場合を排除する仮定である。

このとき、つぎの定理が成り立つ。

《定理1》狭義に単調減少してゼロに収束する正数列 $\{r^k\}$ に対する問題(17)の最適解の点列を $\{x^{r^k}\}$ とする。もし仮定(a)~(g)が満たされるならば、点列

$\{x^{rk}\}$ に集積点が存在し、その任意の集積点 $\tilde{x}$ は問題 (2) の最適満足解である。

(証明) (集積点の存在と許容性) $\{x^{rk}\}$ はコンパクト集合 X 内の点列だから集積点が存在することは明らか。任意の集積点を $\tilde{x}$ とし、これに収束する $\{x^{rk}\}$ の部分点列をあらためて $\{x^{rk}\}$ とおく。まず補題 1 の (i) より $x^{rk} \rightarrow \tilde{x}$ のとき $\theta^{rk}(x^{rk}) \rightarrow \theta(\tilde{x})$ である。またすべての k に対し $G(x^{rk}, \theta^{rk}(x^{rk})) \leq 0$ だから、この収束性と G の連続性より

$$G(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) \leq 0.$$

一方、すべての k に対し $P_j^{rk}(x^{rk}, \theta_j^{rk}(x^{rk})) \leq 0$, $j=1, \dots, p$ だから、補題 1 の (ii) より

$$f_j(\tilde{x}, \theta_j(\tilde{x})) \leq 0, \quad j=1, \dots, p$$

を得る。以上のことと $\tilde{x} \in X$ であることより、 $\tilde{x}$ は問題 (2) の許容解である。

(集積点の最適性) $\tilde{x}$ が問題 (2) の最適解でないとする、つぎの式を満たすような $x' \in X$ が存在する。

$$G(x', \theta(x')) \leq 0 \quad (18)$$

$$f_j(x', \theta_j(x')) \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (19)$$

$$F(x', \theta(x')) < F(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) \quad (20)$$

ところで拡張目的関数のペナルティ項 $-r\phi_j$ は負であることと、 $\theta_j^{rk}(x') \in Q_j(x')$ であることから

$$\begin{aligned} P_j^{rk}(x', \theta_j^{rk}(x')) &< f_j(x', \theta_j^{rk}(x')) \\ &\leq f_j(x', \theta_j(x')), \quad j=1, \dots, p \end{aligned}$$

がすべての k に対し成り立ち、(19) 式より

$$P_j^{rk}(x', \theta_j^{rk}(x')) < 0, \quad j=1, \dots, p \quad (21)$$

となる。

まず、Hogan⁶⁾ によれば、仮定 (a) ~ (d) のもとでは $\theta_j(x)$, $j=1, \dots, p$ は x に関し連続だから、 F の (x, y) に関する連続性のもとで $F(x, \theta(x))$ もまた x に関し連続になる。同様にして $P_j^{rk}(x, \theta_j^{rk}(x))$ の x に関する連続性もいえるから、 x' を中心とした半径 δ の開球 $B(x'; \delta) \subset R^n$ を考えると、(20), (21) 式より

$$F(x, \theta(x)) < F(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) \quad \text{for } \forall x \in B(x'; \delta)$$

$$P_j^{rk}(x, \theta_j^{rk}(x)) < 0, \quad j=1, \dots, p$$

$$\text{for } \forall x \in B(x'; \delta)$$

であるような $\delta > 0$ が存在する。しかも (18) 式と仮定 (g) より、このような開球 $B(x'; \delta)$ に対し、 $x'' \in \{x \in X | G(x, \theta(x)) < 0\} \cap B(x'; \delta)$ であるような、 x' とは異なる点 x'' を選ぶことができる。

$$F(x'', \theta(x'')) < F(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) \quad (22)$$

$$P_j^{rk}(x'', \theta_j^{rk}(x'')) < 0, \quad j=1, \dots, p \quad (23)$$

が成り立つ。また $G(x'', \theta(x'')) < 0$ であることと G の連続性および $k \rightarrow \infty$ のとき $\theta^{rk}(x'') \rightarrow \theta(x'')$ であることから、ある整数 K' が存在して

$$G(x'', \theta^{rk}(x'')) \leq 0 \quad \text{for } \forall k < K' \quad (24)$$

が成り立つ。(23), (24) 式と $x'' \in X$ であることから、まず x'' が問題 (17) の許容解になることがわかる。

つぎに、(22) 式により

$$F(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) - F(x'', \theta(x'')) = 2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (25)$$

とおく。ペナルティ法の理論より $k \rightarrow \infty$ のとき $\theta^{rk}(x'') \rightarrow \theta(x'')$ であり、補題 1 より $(x^{rk}, \theta^{rk}(x^{rk})) \rightarrow (\tilde{x}, \theta(\tilde{x}))$ である。これらの収束性と F の連続性より、(25) 式のような ε に対し、つぎのような正整数 $K'', \tilde{K}$ が存在する。

$$\begin{aligned} |F(x'', \theta^{rk}(x'')) - F(x'', \theta(x''))| &< \varepsilon \\ &\text{for } \forall k > K'' \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F(x^{rk}, \theta^{rk}(x^{rk})) - F(\tilde{x}, \theta(\tilde{x}))| &< \varepsilon \\ &\text{for } \forall k > \tilde{K} \quad (27) \end{aligned}$$

$K = \max(K', K'', \tilde{K})$ とおき、(26), (25) および (27) 式を順に用いると、すべての $k > K$ に対してつぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned} F(x'', \theta^{rk}(x'')) &< F(x'', \theta(x'')) + \varepsilon \\ &= F(\tilde{x}, \theta(\tilde{x})) - \varepsilon \\ &< F(x^{rk}, \theta^{rk}(x^{rk})) \quad (28) \end{aligned}$$

すでに示した x'' の問題 (17) に対する許容性と (28) 式は、 x^{rk} が問題 (17) の最適解であることに矛盾する。ゆえに $\tilde{x}$ は問題 (2) の最適解である。■

この定理は、数列 $\{r^k\}$ に対する一連の問題 (17) を解いたとき、その最適解の点列が収束すれば、その点が元の問題 (2) の最適解であることを保証している。すなわち $\{r^k\}$ はゼロに収束する数列だから、十分小さな正数 r^k に対して得られる問題 (17) の最適解 x^{rk} は元の問題 (2) の最適解 x^* の十分近傍に存在し、対応する $\theta^{rk}(x^{rk})$ も $\theta(x^*)$ の十分近傍に存在することが保証される。したがって問題 (17) の解が問題 (2) の十分よい近似解となるようにパラメータ r が与えられていれば、問題 (2) のかわりに問題 (17) を考えればよい。

4. 変換問題の解法

この章では、パラメータ r は与えられているものとして、変換問題 (17) の解法を考える。変換問題は y_j による最大化に関して制約条件が存在しないという点で、元の問題 (2) よりかなり扱いやすい問題である。しかし、パラメトリック最適解 $\theta_j^r(x)$ を x の関数として陽に与えることはやはり困難である。そこで関数 $\theta_j^r(x)$ を、 y_j に関する最大化の停留条件を満たす陰関数として与えることにする。

まず、つぎの仮定を置く。

(h) 任意に固定された x に対し、関数 $P_j^r(x, y_j)$

は $y_j \in \text{int } Q_j(x)$ に関し微分可能である。

仮定(d)より P_j^* は y_j に関し狭義の凹関数だから、任意に与えられた x に対し $\theta_j^*(x)$ が最大化問題(4)の最適解であるための必要十分条件は、つぎの式が成り立つことである。

$$\nabla_{y_j} P_j^*(x, \theta_j^*(x)) = 0 \quad (29)$$

したがって、仮定(d)のもとでは問題(17)の解 $(x^*, \theta^*(x^*))$ はつぎの問題の解と一致する。

$$\min_{(x, y)} F(x, y) \quad (30. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X \quad (30. b)$$

$$G(x, y) \leq 0 \quad (30. c)$$

$$\nabla_{y_j} P_j^*(x, y_j) = 0, \quad j=1, \dots, p \quad (30. d)$$

$$P_j^*(x, y_j) \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (30. e)$$

一方、仮定

(i) 任意の (x, y_j) に対し連続な $\nabla^2_{y_j y_j} P_j^*(x, y_j)$, $\nabla^2_{x y_j} P_j^*(x, y_j)$ (注2) が存在し、かつ $\nabla^2_{y_j y_j} P_j^*(x, y_j)$ が正則である。

が成り立つならば、陰関数の定理により

$$\nabla_{y_j} P_j^*(x, \eta_j(x)) = 0 \quad (31)$$

となるような、 x に関して微分可能な陰関数 $y_j = \eta_j(x)$ の存在が保証され、そのヤコビ行列 (Jacobian) はつぎのように与えられる。

$$\nabla \eta_j(x) = -[\nabla^2_{y_j y_j} P_j^*(x, y_j)]^{-1} \nabla^2_{x y_j} P_j^*(x, y_j) \quad (32)$$

(29), (31)式より

$$\theta_j^*(x) \equiv \eta_j(x) \quad (33)$$

と置くことができ、問題(17)は(31)式のもとで、つぎの数理計画問題と等価になる。

$$\min_x F(x, \eta(x)) \quad (34. a)$$

$$\text{subj. to } x \in X \quad (34. b)$$

$$G(x, \eta(x)) \leq 0 \quad (34. c)$$

$$P_j^*(x, \eta_j(x)) \leq 0, \quad j=1, \dots, p \quad (34. d)$$

ただし、 $\eta(x) = (\eta_1(x)^T, \dots, \eta_p(x)^T)^T$ である。

以後、問題(17)のかわりに問題(34)を適当な非線形計画法で解くことを考える。そのために制約集合 X は微分可能なベクトル関数 $q(x)$ を用いて

$$X = \{x | q(x) \leq 0\}$$

のように与えられているものとし、また

(j) 関数 $F(x, y)$, $G(x, y)$ は (x, y) に関し微分可能である。

とする。さらに記述簡略化のためつぎのように置く。

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= F(x, \eta(x)), \quad \tilde{G}(x) = G(x, \eta(x)), \\ \tilde{P}_j^*(x) &= P_j^*(x, \eta_j(x)) \end{aligned} \quad (35)$$

ところで関数 $\eta(x)$ の形を陽に与えることが不可能なため、関数 $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{P}_j^*$ を表現することも不可能である。しかし一般の非線形計画法で必要とする数値は、現在の点 x' における関数値 $\tilde{F}(x')$, $\tilde{G}(x')$, $\tilde{P}_j^*(x')$ やそれらの勾配の値 $\nabla \tilde{F}(x')$, $\nabla \tilde{G}(x')$, $\nabla \tilde{P}_j^*(x')$ だけである。われわれの場合、 $\eta_j(x')$ の値は x' に対応した最大化問題(4)の最適解 $\theta_j^*(x')$ に他ならぬから((33)式参照)、問題(4)を適当な降下法で解くことによって $\eta_j(x')$ を求め、(35)式より $\tilde{F}(x')$, $\tilde{G}(x')$, $\tilde{P}_j^*(x')$ の値を得ることができる。また勾配に関しては、仮定(j)のもとで(32)式を用いて得られるつぎの式によって与えることができる。

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{F}(x) &= \nabla_x F(x, y) + \sum_{j=1}^p \nabla_{y_j} F(x, y) \nabla \eta_j(x) \\ &= \nabla_x F(x, y) - \sum_{j=1}^p \nabla_{y_j} F(x, y) \\ &\quad \times [\nabla^2_{y_j y_j} P_j^*(x, y_j)]^{-1} \nabla^2_{x y_j} P_j^*(x, y_j) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{G}(x) &= \nabla_x G(x, y) - \sum_{j=1}^p \nabla_{y_j} G(x, y) \\ &\quad \times [\nabla^2_{y_j y_j} P_j^*(x, y_j)]^{-1} \nabla^2_{x y_j} P_j^*(x, y_j) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{P}_j^*(x) &= \nabla_x P_j^*(x, y_j) \\ &\quad + \nabla_{y_j} P_j^*(x, y_j) \nabla \eta_j(x) \\ &= \nabla_x P_j^*(x, y_j) \end{aligned} \quad (\because (14) \text{式より } \nabla_{y_j} P_j^*(x, y_j) = 0) \quad (38)$$

ただし $y_j = \eta_j(x)$, $y = (\eta_1(x)^T, \dots, \eta_p(x)^T)^T$ である。

以上のような数値を用いれば、適当な非線形計画法を用いて問題(34)を解くことができる。以下では問題(34)に Zoutendijk の許容方向法¹⁰⁾を適用した場合のアルゴリズムを示す。

(アルゴリズム)

ステップ 1 初期パラメータ $r^1 > 0$ を選び、 $k=1$ とする。

ステップ 2 Zoutendijk の許容方向法を用いて以下のステップ 2.1~2.8 の手順で問題(34)を解き、その最適解を x^{rk} とする。

ステップ 2.1 適当な降下法で求めた制約なし最大化問題 $\max_{y_j} P_j^{rk}(x^1, y_j)$, $j=1, \dots, p$ の解 $y_j^1 =$

(注2) つぎのように記号を定義する。

$$\begin{aligned} \nabla^2_{y_j y_j} f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y_1 \partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y_m \partial y_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y_m^2} \end{pmatrix} \\ \nabla^2_{x y_j} f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x_n \partial y_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x_n \partial y_m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ 。

$\theta_j^{rk}(x^1)$, $j=1, \dots, p$, $y^1=(y_1^{1T}, \dots, y_p^{1T})^T$ が,
 $G(x^1, y^1) \leq 0$, $P_j^{rk}(x^1, y_j^1) \leq 0$, $j=1, \dots, p$ を満たすように初期点 $x^1 \in X$ を選ぶ.

ステップ 2.2 $\tilde{F}(x^1)=F(x^1, y^1)$ を計算し, $t=1$ とする.

ステップ 2.3 $\nabla_x F(x^t, y^t)$, $\nabla_{y_j} F(x^t, y^t)$, $j=1, \dots, p$, $\nabla_x G(x^t, y^t)$, $\nabla_{y_j} G(x^t, y^t)$, $j=1, \dots, p$, $\nabla_x P_j^{rk}(x^t, y_j^t)$, $j=1, \dots, p$, $\nabla^2_{y_j y_j} P_j^{rk}(x^t, y_j^t)$, $j=1, \dots, p$, および $[\nabla^2_{y_j y_j} P_j^{rk}(x^t, y_j^t)]^{-1}$ を計算し, これらをもとに (36)~(38) 式から $\nabla \tilde{F}(x^t)$, $\nabla \tilde{G}(x^t)$, $\nabla \tilde{P}_j^{rk}(x^t)$, $j=1, \dots, p$ を求める. また (35) 式より $\tilde{G}(x^t)$, $\tilde{P}_j^{rk}(x^t)$ および $q(x^t)$, $\nabla q(x^t)$ も求める.

ステップ 2.4 ステップ 2.3 の数値をもとに, つぎのような方向発見問題 (LP) を解き, 最適方向を s^t とする.

$$\begin{aligned} \max \quad & \xi \\ \text{subj. to} \quad & \nabla \tilde{F}(x^t)s + \xi \leq 0 \\ & \nabla q_i(x^t)s + \theta_i^1 \xi \leq 0, \\ & i \in C^t = \{i | q_i(x^t) = 0\} \\ & \nabla \tilde{G}_i(x^t)s + \theta_i^2 \xi \leq 0, \\ & i \in D^t = \{i | \tilde{G}_i(x^t) = 0\} \\ & \nabla \tilde{P}_j^{rk}(x^t)s + \theta_j \xi \leq 0, \\ & j \in J^t = \{j | \tilde{P}_j^{rk}(x^t) = 0\} \\ & -1 \leq s_i \leq 1, \quad i=1, \dots, n \end{aligned}$$

ただし $\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_j \geq 0$ は安全係数である.

ステップ 2.5 方向発見問題の最適解 ξ^* に対し $\xi^* < \varepsilon_1$ が成り立てば計算を終了し, x^t を問題 (34) の最適解 x^{rk} とする. ただし ε_1 はあらかじめ与えられた正数である. そうでなければステップ 2.6 へいく.

ステップ 2.6 1次元最小化問題 $\min_{\alpha} \{\tilde{F}(x^t + \alpha s^t) | q(x^t + \alpha s^t) \leq 0, \tilde{G}(x^t + \alpha s^t) \leq 0, \tilde{P}_j^{rk}(x^t + \alpha s^t) \leq 0, j=1, \dots, p\}$ を適当な直線探索法(注3)で解き, 最適ステップ幅 α^t を求め, $x^{t+1} = x^t + \alpha^t s^t$ とする. このとき $\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{P}_j^{rk}$ の評価は $\max_{y_j} P_j^{rk}(x^t + \alpha s^t, y_j)$, $j=1, \dots, p$ を解き, (35) 式に基づいて行われる.

ステップ 2.7 x^{t+1} に対応した制約なし最大化問題 $\max_{y_j} P_j^{rk}(x^{t+1}, y_j)$, $j=1, \dots, p$ を解き, $y_j^{t+1} = y_j^{rk}(x^{t+1})$, $j=1, \dots, p$, $y^{t+1} = (y_1^{t+1T}, \dots, y_p^{t+1T})^T$ とおく. また $\tilde{F}(x^{t+1}) = F(x^{t+1}, y^{t+1})$ を

計算する.

ステップ 2.8 $\tilde{F}(x^t) - \tilde{F}(x^{t+1}) < \varepsilon_2$ かつ $\|x^{t+1} - x^t\| < \varepsilon_3$ ならば計算を終了し, x^{t+1} を問題 (34) の最適解 x^{rk} とする. そうでなければ, $t=t+1$ としてステップ 2.3 へ戻る. $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ はあらかじめ与えられた正数である.

ステップ 3 $k=1$ ならばステップ 5 へ, そうでなければステップ 4 へ行く.

ステップ 4 $|\tilde{F}(x^{rk-1}) - \tilde{F}(x^{rk})| < \delta_1$ かつ $\|x^{rk} - x^{rk-1}\| < \delta_2$ ならば計算を終了し, x^{rk} を元の問題 (2) の最適解とみなす.

そうでなければステップ 5 へ行く. ここで δ_1, δ_2 はあらかじめ与えられた正数である.

ステップ 5 $r^{k+1} = r^k/c$ とおく. ただし $c > 1$ である. $k=k+1$ としてステップ 2 へ戻る.

もし問題 (34) の解が問題 (2) の解の十分近くに存在するようにパラメータ r が与えられれば, 上のアルゴリズム中の r の更新手続は不要で, 単にステップ 2.1~2.8 を実行すればよい.

5. 数 値 例

定理 1 で示した収束性を確認するために, つぎのような簡単な数値例を考える.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & [(x-10)^2 + (y(x)-20)^2] \\ \text{subj. to} \quad & x \in X = \{x | 0 \leq x \leq 15\} \\ & -(x+2y(x)-40)^2 \\ & = \max_{y \in Q(x)} -(x+2y-40)^2 \leq -100 \\ \text{where } Q(x) = & \{y | 0 \leq y \leq 20, x+y \leq 20\} \end{aligned}$$

この数値例に対し拡張目的関数を

$$\begin{aligned} P^r(x, y) = & -(x+2y-40)^2 \\ & + r \left(\frac{1}{x+y-20} + \frac{1}{y-20} - \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

とおき, 変換問題 (17) を構成して上のアルゴリズムを適用すると, Table 1 のような結果を得る. パラメータ r の数列 $\{r^k\}$ が小さくなるにつれて, 変換問題の最適解の点列 $\{x^{rk}\}$ とこれに対応する点列 $\{y^{rk}(x^{rk})\}$ がそれぞれ元の問題の解 $x^0=10$ および $y(x^0)=10$ に収束することが確認される.

ところで拡張目的関数の構成の仕方から, $x \in X$ かつ $y_j \in Q_j(x)$ を満たすすべての点 (x, y_j) で

$$P_j^r(x, y_j) < f_j(x, y_j)$$

が成り立つ. このことは, 集合 $\{(x, y_j) | x \in X \text{ かつ } y_j \in Q_j(x)\}$ 上において, 満足条件不等式 $P_j^r(x, y_j) \leq 0$ によって限定される領域のほうが, 元の満足条件不等式 $f_j(x, y_j) \leq 0$ によって限定される領域より広い

(注3) 直線探索法の具体的な説明は数値例の検討の項参照.

Table 1 Computational results for approximate optimization-satisfaction problems in response to various r

r^k	x^{rk}	$y^{rk}(x^{rk})$	$F(x^{rk}, y^{rk}(x^{rk}))$	$f(x^{rk}, y^{rk}(x^{rk}))$
50	4.486	14.17	64.40	-51.46
10	7.833	11.63	74.68	-79.33
1	9.353	10.49	90.93	-93.45
0.1	9.799	10.15	97.04	-98.03
0.01	9.937	10.05	99.04	-99.26
True values	10.00	10.00	100.0	-100.0

ことを意味する。したがって本例のように、変換問題より生成される点列 $\{(x^{rk}, y^{rk}(x^{rk}))\}$ が、元の満足条件不等式 $-(x+2y-40)^2 \leq -100$ に関してすべて非許容になる場合があることに注意すべきである（点列の収束点は元の満足条件を満たしている）。

ところでステップ 2.4 における最適ステップ方向 s^i の生成、ステップ 2.8 における $\tilde{F}(x^i) - \tilde{F}(x^{i+1}) < \varepsilon_2$ のチェックには $\nabla \tilde{F}(x^i)$, $\nabla \tilde{P}_{j^k}(x^i)$ や $\tilde{F}(x^i)$ などの値を精度良く求める必要があり、さらにこれらの精度は制約条件なし問題 $\max_{y_j} P_{j^k}(x^i, y_j)$ の解 $y_{j^k}(x^i)$ の精度に大きく依存する。そこで本数値例の場合は、この最大化問題を解くために、イテレーションごとにステップ幅が小さくなる最急降下法を用いた。この降下法の停止時点のステップ幅は $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 程度である。

本数値例の場合、ステップ 2.6 の直線探索には、厳密な 1 次元最小化でなく単純な等分探索法を用いた。この手法は制約式 $q(x) \leq 0$, $\tilde{G}(x) \leq 0$, $\tilde{P}_{j^k}(x) \leq 0$, $j = 1, \dots, p$ を満たす s^i 方向の半直線上の区間で適当な個数の等分点 $x^i = x^i + \alpha^i s^i$, $i = 1, 2, \dots$ を取り、この中で目的関数 $\tilde{F}$ を最も小さくする x^i を x^{i+1} とするものである。各試行点 x^i に対する $\tilde{G}(x^i) \leq 0$, $\tilde{P}_{j^k}(x^i) \leq 0$ のチェックや $\tilde{F}(x^i)$ の評価には $\max_{y_j} P_{j^k}(x^i, y_j)$ を解くことが必要である。

6. おわりに

不確かさが存在する場合の決定問題として一般的な形の最適満足化問題を定式化し、その解法としてペナルティ法に基づく新しい計算方法を与えた。最適満足化問題は、敵の決定あるいは外乱に対して最悪の状況を想定するという点で、min-max 問題と共通の思想がみられるが、この最悪の状況が制約条件(満足条件)としてある許容水準の範囲内に抑えられている点で、最悪の状況を目的関数として考慮する min-max 問題とは本質点に異なっている。したがって最適満足化問題の解は、悲観的すぎる min-max 解に代わる有効な解概念である。また計算方法に関しては、ここで定式化したような形に対する有効な手法が開発されておらず、本論文で与えた計算方法は十分実用性がある。

参考文献

- 1) M. Avriel: Nonlinear Programming, 371/385, Prantice-Hall (1976)
- 2) J.M. Blankenship and J.E. Falk: Infinitely Constrained Optimization Problems, J. of Optimization Theory and Applications, 19-2, 261/281 (1976)
- 3) J. Bracken and J.T. McGill: Defense Applications of Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints, Operations Research, 22-5, 1086/1096 (1974)
- 4) A.V. Fiacco and G.P. McCormic: The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming, Management Science, 10-2, 360/366 (1964)
- 5) K.R. Gehner: Necessary and Sufficient Optimality Conditions for the Fritz John Problem with Linear Equality Constraints, SIAM J. on Control, 12-1, 140/149 (1974)
- 6) W.W. Hogan: Point-to-Set Maps in Mathematical Programming, SIAM Review, 15-3, 591/603 (1973)
- 7) 志水: 最適満足制御の定式化と Lagrange 関数法による解析, 計測自動制御学会論文集, 5-4, 1/10 (1969)
- 8) 志水, 相吉: 不確かさの下での最適満足化問題の理論と計算方法, 電子通信学会論文誌 A, 62-5, 278/285 (1979)
- 9) 相吉, 志水: Min-Max 計画法—理論と計算方法, 計測自動制御学会論文集, 15-6, 754/761 (1979)
- 10) G. Zoutendijk: Methods of Feasible Directions, Elsevier (1960)