連続時間アファイン力学系の実現理論[†]

松 尾 強*・新 家 茂**

The Realization Theory of Affine Dynamical Systems

Tsuyoshi MATSUI* and Shigeru NIINOMI**

In this paper, we establish the realization theorems of Continuous Time Affine Dynamical Systems which are defined as the subclass of (general) Dynamical Systems.

The Affine Dynamical Systems are dynamical systems whose state spaces are the Affine Representations of the Concatenation Monoid Ω , called Affine Ω -module, and whose readout maps are affine maps.

Though the definition of Affine Dynamical System is given in the form of (general) dynamical systems and affine spaces, we convert it to a new form of Affine Dynamical Systems, called Normal Affine Dynamical Systems, which consist of linear space parts of affine spaces and the initial states 0. By this new form of Affine Dynamical Systems the realization theory of this class becomes almost the same as the realization theory of the Linear Representation Systems, except its initial object of the category of linear Ω -modules with affine input map. Then we obtain the existence and the uniqueness theorems of canonical Affine Dynamical Systems, i.e., any input response map can be realized by canonical Affine Dynamical Systems and they are isomorphic in the category of Affine Dynamical Systems.

Affine Dynamical Systems are quasi-reachable iff their state sets are the affine hulls of the strict reachable sets, and are canonical iff they are quasi-reachable and distinguishable. The definition of canonicity of Affine Dynamical Systems is different from that of Linear Representation Systems, hence we need to establish the realization theorems for Affine

Dynamical Systems.

Note that the class of Affine Dynamical Systems contains Linear Systems and Inhomogeneous Bilinear Systems as a subclass, and the realization theory of these classes can be discussed in the framework of Affine Dynamical Systems.

1. はじめに

与えられた観測データから、もとの現象の内部を記述するモデルを導出することは、各方面において重要な問題である。われわれは、このモデル化の問題を理想化された実現問題としてつぎのように考える。

因果律が成立する、与えられたブラックボックスに対して、完全な実験が可能とする。すなわち、ブラックボックスの入出力関係が入力応答関数 $a \in I/O$ により与えられる¹⁾。この時、ブラックボックスの内部を記述する（行動が a となる）力学系をモデルの圏 **CD** から少なくとも一つ具体的に探し出し、もしそれらが二つ以上あればそれらは圏 **CD** として同形であることを証明する。このように定式化した実現問題に対し、筆者らは、正準力学系（可到達で可識別な力学系）の圏の実現定理を得²⁾、この成果をもとに線形表現系の実現定理、すなわち、任意の入力応答関数を実現する正準線形表現系が必ず存在し、それらは線形表現系として同形であることを得た³⁾。そこで本論文でアファイン力学系においても完全な実現定理、すなわち、任意の入力応答関数を実現する正準なアファイン力学系の存在定理と、それらがアファイン力学系として同形であることを示す一意性定理を得る。

本論文では、文献3と同様に、出力値集合 Y を体 K 上の線形空間とする。

アファイン力学系は、状態空間が連鎖モノイド Ω^0 （入力関数の集合）のアファイン表現、すなわち、アファイン Ω -モジュールであり、観測機構がアファイン写像である力学系である。アファイン力学系のクラスが重要な理由の一つは、このクラスが線形系、非斉

[†] 第7回制御理論シンポジウムで発表（昭53・5）

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

** 労災義肢センター 名古屋市港区港明 1-10-5

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

** Labor Accidents Prosthetics & Orthotics Center, Nagoya

(Received November 29, 1979)

(Revised June 9, 1980)

次双線形系などを含むことである。

アフィン力学系は、擬可到達で可識別な時、正準といわれる。力学系が可到達であるとは、状態集合が真に到達可能なものからなることであり¹⁾、線形表現系が擬可到達であるとは、状態集合が可到達集合の線形包となることである³⁾。これに対し、アフィン力学系が擬可到達であるとは、状態集合が可到達集合のアフィン包となることである。したがって、アフィン力学系の実現理論は、文献 1, 3 とは別に確立されなければならない。

本論文の実現定理により、任意の入力応答関数 a は、正準（擬可到達で可識別）なアフィン力学系の構造を（アフィン力学系としての同形を除いて）一意にもつという結果が得られる。

なお、離散時間のアフィン力学系の実現理論に関する論文としては、これまで文献 7, 8, 9 などがある。

2. 準備

本章で、次章以後に必要な力学系の基礎概念を記述する。その詳細と、アフィン空間、アフィン射に関する数学的基礎については、文献 1 と付録を参照されたい。

〔連鎖モノイド, 入力集合〕 入力値集合を U とする。文献 1 で定義されたモノイド $F_s(\mathbf{R}^{++})$ 、ただし、単位元は 1、の中で、 u -階段関数の集合から生成される部分モノイド $S(\mathbf{R}^{++})$ を含み、切断写像 $C(t): F_s(\mathbf{R}^{++}) \rightarrow F_s(\mathbf{R}^{++})$ と移動写像 $S(t): F_s(\mathbf{R}^{++}) \rightarrow F_s(\mathbf{R}^{++})$ に関して閉じている部分モノイドを連鎖モノイドといい、 Ω と表わす。この Ω は実際に物理的対象に与えることができる入力関数の集合として考えられる。

〔入力応答関数〕 写像 $a: \Omega \rightarrow Y$ は入力応答関数といわれる。因果律を満たす入出力関係は入力応答関数により完全に決定される。文献 1, 定理 3.2 参照。

〔力学系〕 状態集合 X とモノイド射 $\varphi: \Omega \rightarrow F(X)$ 、ただし、 $F(X)$ はすべての関数 $X \rightarrow X$ の集合、の組 (X, φ) を Ω -モジュールという。

Ω -モジュール (X, φ) 、初期状態 $x^0 \in X$ 、関数 $h: X \rightarrow Y$ の組 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ を力学系という。

力学系 σ に対し、入力写像 $G^+: \Omega \rightarrow X; \omega \mapsto \varphi(\omega)x^0$ と観測写像 $H: X \rightarrow F(\Omega, Y); x \mapsto [\omega \mapsto h(\varphi(\omega)x)]$ が定義される。 σ は G^+ が全射の時、可到達といわれ、 H が単射の時、可識別といわれる。特に、可到達で可識別な時、正準といわれる。

〔力学系の行動, 力学系射〕 力学系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ に対し、写像 $a_\sigma: \Omega \rightarrow Y; \omega \mapsto h(\varphi(\omega)x^0)$ は σ の行

動といわれる。

力学系 $\sigma_1 = ((X_1, \varphi_1), x_1^0, h_1)$, $\sigma_2 = ((X_2, \varphi_2), x_2^0, h_2)$ に対し、写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は、 $f \cdot \varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega) \cdot f$, $\forall \omega \in \Omega$ を満たす時、 Ω -射: $(X_1, \varphi_1) \rightarrow (X_2, \varphi_2)$ といわれ、さらに $f(x_1^0) = x_2^0$, $h_1 = h_2 \cdot f$ を満たす時、力学系射: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ といわれる。

〔注 1〕 力学系射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ が存在するための必要条件は、 $a_{\sigma_1} = a_{\sigma_2}$ が成立することである¹⁾。

〔注 2〕 任意の入力応答関数を実現する、すなわち、行動が与えられた入力応答関数と一致する正準力学系が存在し、それらは力学系としての同形を除いて一意である。文献 1, 定理 5.3, 5.6 参照。

3. アフィン力学系

本章では、力学系の部分クラスとしてアフィン力学系を定義し、このアフィン力学系が、台集合部分と線形空間部分とに分けて表現されることを示す。また、この新しい表現をもとに、アフィン力学系の標準系を導く。

〔定義 3.1〕 Ω -モジュール (X^A, φ) は、 $X^A = (X, \mathbf{X})$ がアフィン空間、モノイド射 $\varphi: \Omega \rightarrow F(X)$ の像が $AM(X^A)$ [すべてのアフィン射: $X^A \rightarrow X^A$ の集合] に属する時、アフィン Ω -モジュールといわれる。

力学系 $\sigma = ((X^A, \varphi), x^0, h)$ は (X^A, φ) がアフィン Ω -モジュール、 $h: X \rightarrow Y$ がアフィン射である時、アフィン力学系といわれる。また、 σ は X が可到達集合 $\{\varphi(\omega)x^0 | \omega \in \Omega\}$ のアフィン包である時、擬可到達であるといわれる。アフィン包については (A. 9) を参照。

〔定義 3.2〕 アフィン力学系 $\sigma_1 = ((X^A_1, \varphi_1), x_1^0, h_1)$, $\sigma_2 = ((X^A_2, \varphi_2), x_2^0, h_2)$ に対し、アフィン射 $f^A: X^A_1 \rightarrow X^A_2$ は、 Ω -射の条件 $f \cdot \varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega) \cdot f$, $\forall \omega \in \Omega$ を満たす時、アフィン Ω -射: $(X^A_1, \varphi_1) \rightarrow (X^A_2, \varphi_2)$ といわれ、力学系射の条件、すなわち、 Ω -射であり、 $f(x_1^0) = x_2^0$, $h_1 = h_2 \cdot f$ を満たす時、アフィン力学系射: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ といわれる。

アフィン Ω -モジュール (X^A, φ) に対し、 $\varphi(\omega) \in AM(X^A)$, $\forall \omega \in \Omega$ である。命題 A.6 を適用すれば、 $\varphi(\omega)$ は、組 $(\Phi(\omega), G(\omega))$ 、ただし、 $\Phi(\omega) \in L(\mathbf{X})$ [すべての線形写像: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ の集合]、 $G(\omega) \in \mathbf{X}$, $\varphi(\omega)(x + x^0) = \Phi(\omega)x + G(\omega) + x^0$, $\forall x \in \mathbf{X}$ 、により一意に表わされる。

〔命題 3.3〕 写像 $\varphi = (\Phi, G): \Omega \rightarrow AM(X^A)$ 、ただし、 $X^A = (X, \mathbf{X})$ はアフィン空間、がモノイド射となるための必要十分条件は、つぎの条件 ①, ② が成立することである。

- ① $\Phi: \Omega \rightarrow L(\mathbf{X})$ はモノイド射である。
 ② $G(\omega_2|\omega_1) = \Phi(\omega_2)G(\omega_1) + G(\omega_2)$, $\forall \omega_2, \omega_1 \in \Omega$, $G(1) = 0$ が成立する。 □

(証明) $\varphi: \Omega \rightarrow AM(\mathbf{X}^A)$ をモノイド射とする。

$$\varphi(\omega_2|\omega_1)(x+x_0) = \Phi(\omega_2|\omega_1)x + G(\omega_2|\omega_1) + x_0 \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_2) \cdot \varphi(\omega_1)(x+x_0) \\ = \Phi(\omega_2) \cdot \Phi(\omega_1)x + \Phi(\omega_2)G(\omega_1) + G(\omega_2) + x_0 \quad \text{①} \end{aligned}$$

②, ① 両式の右辺が任意の $x \in \mathbf{X}$, $\omega_2, \omega_1 \in \Omega$ に対して等しい。したがって、条件 ①, ② が成立する。

逆は、明らかである。 □

(注) 以後、モノイド射 $\varphi: \Omega \rightarrow AM(\mathbf{X}^A)$ を、場合に応じて (Φ, G) により表わす。 □

アフライン力学系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ の観測機構 $h: X \rightarrow Y$ はアフライン射であるから、命題 A.6 により、 $h = (h, h^0)$, ただし、 $h^0 = h(x^0) \in Y$, $h: X \rightarrow Y$; 線形写像、と表わされる。この結果と命題 3.3 により、 σ を台集合部分と、線形空間部分とに分けて表現できる。

【定義 3.4】 組 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, \Phi), G, h))$ は、つぎの条件を満たす時、アフライン力学系である。

- ① $(X, \mathbf{X})$ はアフライン空間である。
 ② $x^0 \in X$ は初期状態であり、 $h^0 \in Y$ である。
 ③ $\Phi: \Omega \rightarrow L(\mathbf{X})$ はモノイド射である。
 ④ $G: \Omega \rightarrow \mathbf{X}$ は $G(\omega_2|\omega_1) = \Phi(\omega_2)G(\omega_1) + G(\omega_2)$, $\forall \omega_2, \omega_1 \in \Omega$, $G(1) = 0$, を満たす。

⑤ $h: X \rightarrow Y$ は線形写像である。 □

アフライン力学系 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, \Phi), G, h))$ の (X, Φ) を線形 Ω -モジュール、 G をアフライン入力写像、そして、 h を線形観測機構という。また、 $\sigma_L = ((X, \Phi), G, h)$ を線形部分アフライン力学系という。

(注) アフライン力学系 σ の状態推移は次式により表わされる。

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ x(t+s) = \Phi(\omega)x(s) + G(\omega) + x^0, |\omega| = t \\ \gamma(t) = h \cdot x(t) + h^0 \end{cases} \quad \square$$

【定義 3.5】 線形 Ω -モジュール (X_1, Φ_1) , (X_2, Φ_2) に対し、線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は、 $f \cdot \Phi_1(\omega) = \Phi_2(\omega) \cdot f$, $\forall \omega \in \Omega$, を満たす時、線形 Ω -射: $(X_1, \Phi_1) \rightarrow (X_2, \Phi_2)$ といわれる。 □

【命題 3.6】 アフライン Ω -モジュール (X_1, Φ_1) , (X_2, Φ_2) に対し、アフライン射 $f^A: X_1^A \rightarrow X_2^A$, ただし、 $X_1^A = (X_1, \mathbf{X}_1)$, $X_2^A = (X_2, \mathbf{X}_2)$, がアフライン Ω -射となるための必要十分条件は、線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$, ただし $f^A = (f, f)$, が線形 Ω -射: $(X_1, \Phi_1) \rightarrow (X_2, \Phi_2)$ となり $G_2 = f \cdot G_1$ が成立することである。 □

(証明) $f: X_1 \rightarrow X_2$ を線形 Ω -射とし、 $G_2 = f \cdot G_1$

が成立するものとする。

$$\begin{aligned} f \cdot \varphi_1(\omega)(x+x_0) &= f \cdot \Phi_1(\omega)x + f \cdot G_1(\omega) + f(x^0) \\ &= \Phi_2(\omega) \cdot f \cdot x + G_2(\omega) + f(x^0) \\ &= \varphi_2(\omega) \cdot f(x+x_0) \end{aligned}$$

が成立し、 f^A はアフライン Ω -射となる。

逆は、特殊な場合を考慮すれば明らかである。 □

【命題 3.7】 アフライン力学系 $\sigma_1 = ((X^A_1, x^0_1, h^0_1), ((X_1, \Phi_1), G_1, h_1))$, $\sigma_2 = ((X^A_2, x^0_2, h^0_2), ((X_2, \Phi_2), G_2, h_2))$ に対し、アフライン射 $f^A: X_1^A \rightarrow X_2^A$ がアフライン力学系射: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ となるための必要十分条件は、線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$, ただし $f^A = (f, f)$, が線形 Ω -射: $(X_1, \Phi_1) \rightarrow (X_2, \Phi_2)$ であり、 $G_2 = f \cdot G_1$, $h_1 = h_2 \cdot f$, そして、 $h^0_1 = h^0_2$ が成立することである。 □

(証明) 定義 3.2, 命題 3.6 により、 $h_1 = h_2 \cdot f$ (ただし、 $h_1 = (h_1, h^0_1)$, $h_2 = (h_2, h^0_2)$), $f(x^0_1) = x^0_2$ が成立することと、 $h_1 = h_2 \cdot f$, $h^0_1 = h^0_2$ が成立することとが同等であることを示せば命題の内容は明らかとなる。これらの条件が同等であることは次式からわかる。

$$\begin{aligned} h_1 \cdot x + h^0_1 &= h_1(x+x^0) = h_2 \cdot f \cdot (x+x^0) \\ &= h_2 \cdot f \cdot x + h^0_2 \end{aligned} \quad \square$$

【命題 3.8】 アフライン力学系 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, \Phi), G, h))$ に対し、アフライン力学系 $\sigma_N = ((X, 0, h^0), ((X, \Phi), G, h))$ は σ と同形である。 □

(証明) アフライン射 $f^A = (I, f): (X, X) \rightarrow (X, X)$ ただし、 $I: X \rightarrow X$; 恒等写像、 $f(x+x^0) = x+0$, は全単射なアフライン力学系射: $\sigma \rightarrow \sigma_N$ である。 □

【定義 3.9】 アフライン力学系 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, \Phi), G, h))$ に対し、アフライン力学系 $\sigma_N = ((X, 0, h^0), ((X, \Phi), G, h))$ を σ の標準系という。 □

(注) アフライン力学系 σ の標準系 σ_N は初期状態を 0 に固定したものであり、一意に決まる。今後、標準系 σ_N を組 $((X, \Phi), G, h, h^0)$ により表わし、標準系のみを考える。標準系 σ_N の状態推移は次式により表わされる。

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(t+s) = \Phi(\omega)x(s) + G(\omega), |\omega| = t \\ \gamma(t) = h \cdot x(t) + h^0 \end{cases} \quad \square$$

【例 3.10】 $\Omega = S(\mathbf{R}^{++})^{\mathbb{N}}$ とする。状態推移が次式で記述される (一般) 力学系を考える。

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ dx(t)/dt = ((F_0 + \omega(t)) \log x(t) + \omega(t))x(t) \\ \gamma(t) = \log x(t) + h^0, x(t) \in \mathbf{R}^+, \omega(t) \in U \end{cases}$$

組 $(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ は、作用 $+: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$; $(x, x) \mapsto x \cdot e^x$ によりアフライン空間である。この力学系は状態集合がアフライン空間 $(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ であるアフライン力学系であり、その標準系の微分方程式は、つぎの非斉次双線

形系となる。

$$\begin{cases} dx(t)/dt = (F_0 + \omega(t))x(t) + \omega(t) \\ \gamma(t) = x(t) + h^0, \quad x(t) \in R \end{cases} \quad \square$$

[例 3.11] $\Omega = S(R^{++})$ とする。状態推移が次式で記述される非斉次双線形系を考える。

$$\begin{cases} dx(t)/dt = (F_0 + \omega(t)F_1)x(t) + \omega(t)g \\ \gamma(t) = h \cdot x(t) + h^0, \quad x(t) \in R^n, \quad \omega(t) \in U \\ g \in R^{n \times 1}, \quad h \in R^{1 \times n}, \quad F_0, F_1 \in R^{n \times n}, \quad h^0 \in Y \end{cases}$$

このアファイン力学系のモノイド射 $\Phi: \Omega \rightarrow L(R^n)$ とアファイン入力写像 $G: \Omega \rightarrow R^n$ は、

$$\Phi(u_{(0,t_1)}x) = (\exp((F_0 + uF_1)t))x$$

$$G(u_{(0,t_1)}) = \int_0^t \Phi(u_{(0,t_1)}(t-\tau))ugd\tau$$

ただし、 $u_{(0,t_1)}(\tau) = u \quad 0 \leq \tau \leq t$,

$$\Phi(\omega_2|\omega_1) = \Phi(\omega_2) \cdot \Phi(\omega_1)$$

$$G(\omega_2|\omega_1) = \Phi(\omega_2)G(\omega_1) + G(\omega_2)$$

により決定される。標準系は $\sigma_N = ((R^n, \Phi), G, h, h^0)$ である。

[補題 3.12] $F(\Omega, Y)$ と $F_0(\Omega, Y) \oplus Y$, ただし、 $F_0(\Omega, Y) = \{a \in F(\Omega, Y); a(1) = 0\}$, とは対応: $a \mapsto (a - a(1)) + a(1)$ により線形空間として同形, すなわち、 $F(\Omega, Y) \cong F_0(\Omega, Y) \oplus Y$ である。 $\square$

[定義 3.13] 標準アファイン力学系 $\sigma_N = ((X, \Phi), G, h, h^0)$ に対し、 $a_L(\omega) = h \cdot G(\omega)$, $v\omega \in \Omega$ により定義される写像 $a_L \in F_0(\Omega, Y)$ を σ_N の線形部分の行動という。 σ_N の行動 a_σ は、 $a_\sigma(\omega) = a_L(\omega) + h^0$ である。 $\square$

4. アファイン力学系の洗練された形

本章では、前章で導出した標準系をもとに、アファイン力学系の洗練された形を確立する。洗練された形はアファイン入力写像、線形観測機構の代わりに、それらと1対1に対応する線形 Ω -射により表わしたものである。これらは、それぞれ、線形入力写像、線形観測写像といわれる。また、アファイン力学系が正準であることと、線形入力写像が全射であり、線形観測写像が単射であることが同等の条件であることを示す。

4.1 アファイン入力付き線形 Ω -モジュール

この節で、標準アファイン力学系の状態空間 (線形 Ω -モジュール) とアファイン入力写像との組の圏を考え、その始対象を導出し、始対象から線形 Ω -モジュールへの線形 Ω -射を線形入力写像として定義する。

[定義 4.1] 線形 Ω -モジュール (X, Φ) とアファイン入力写像 $G: \Omega \rightarrow X$ との組 $((X, \Phi), G)$ は、アファイン入力付き線形 Ω -モジュールといわれる。

アファイン入力付き線形 Ω -モジュール $((X_1, \Phi_1), G_1), ((X_2, \Phi_2), G_2)$ に対し、線形 Ω -射 $f: (X_1, \Phi_1) \rightarrow (X_2, \Phi_2)$ は $f \cdot G_1 = G_2$ を満たす時、アファイン入力付き線形 Ω -射: $((X_1, \Phi_1), G_1) \rightarrow ((X_2, \Phi_2), G_2)$ といわれる。 $\square$

(注) アファイン Ω -モジュール $(X^A, \varphi_1), (X^A, \varphi_2)$ に対し、写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ がアファイン Ω -射: $(X^A, \varphi_1) \rightarrow (X^A, \varphi_2)$ であることと、線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ がアファイン入力付き線形 Ω -射: $((X_1, \Phi_1), G_1) \rightarrow ((X_2, \Phi_2), G_2)$ であることは、命題 3.6 により同等である。ただし、 $f = (f, f)$ である。 $\square$

[定義 4.2] アファイン入力付き線形 Ω -モジュール $((X, \Phi), G)$ は状態集合 X が可到達集合, すなわち $\text{im}G$ の線形包となる時、擬可到達といわれる。 $\square$

(注) 標準アファイン力学系 $\sigma_N = ((X, \Phi), G, h, h^0)$ が擬可到達であることと、アファイン入力付き線形 Ω -モジュール $((X, \Phi), G)$ が擬可到達であることは同等である。また、アファイン力学系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$, ただし、 $X^A = (X, X)$, $\varphi = (\Phi, G)$, $h = (h, h^0)$, が擬可到達であることと、 σ_N が擬可到達であることも同等である。命題 A.8 参照。 $\square$

[例 4.3] $\Omega^0 = \Omega \setminus \{1\}$ とし、 $V(\Omega^0) = \{\lambda = \sum_{\omega \in \Omega^0} \lambda_\omega e_\omega \mid \lambda_\omega \in K, e_\omega(\bar{\omega}) = 1; \omega = \bar{\omega}, e_\omega(\bar{\omega}) = 0; \omega \neq \bar{\omega}\}$, すなわち、 $V(\Omega^0)$ を Ω^0 の有限個の要素以外で 0 となる K 値関数の集合とする。 $V(\Omega^0)$ は各点演算により線形空間である。

写像 $\Psi: \Omega \rightarrow L(V(\Omega^0)); \omega \mapsto [e_\omega \rightarrow e_\omega | \bar{\omega} - e_\omega]$ と、写像 $e: \Omega \rightarrow V(\Omega^0); \omega \mapsto e_\omega$ ³⁾, ただし、 $e(1) = 0$, は定義 3.4 の条件を満たし、組 $((V(\Omega^0), \Psi), e)$ は擬可到達なアファイン入力付き線形 Ω -モジュールである。

[命題 4.4] $((X, \Phi), G)$ をアファイン入力付き線形 Ω -モジュールとする。この時、アファイン入力付き線形 Ω -射 $G: ((V(\Omega^0), \Psi), e) \rightarrow ((X, \Phi), G)$ が一意に存在し、式 $G \cdot e_\omega = G(\omega)$, $v\omega \in \Omega^0$ により与えられる。

逆に、線形 Ω -射 $G: (V(\Omega^0), \Psi) \rightarrow (X, \Phi)$ に対し式 $G(\omega) = G \cdot e_\omega$, $v\omega \in \Omega^0$, $G(1) = 0$ により定義される写像 $G: \Omega \rightarrow X$ はアファイン入力写像, すなわち、定義 3.4 の条件を満たす。 $\square$

(証明) $\{e_\omega; \omega \in \Omega^0\}$ は $V(\Omega^0)$ の基底であるから、式 $G \cdot e_\omega = G(\omega)$ を満たす線形写像 $G: V(\Omega^0) \rightarrow X$ は線形空間 $V(\Omega^0)$ 上で一意に決まる。アファイン入力付き線形 Ω -射: $((V(\Omega^0), \Psi), e) \rightarrow ((X, \Phi), G)$ はこの式を満たす。また、この式により定義される線形写像 G は次式から明らかにアファイン入力付き線形 Ω -射である。

$$\begin{aligned} G \cdot \Psi(\bar{\omega})e_{\omega} &= G \cdot (e_{\bar{\omega}|\omega} - e_{\bar{\omega}}) = G \cdot e_{\bar{\omega}|\omega} - G \cdot e_{\bar{\omega}} \\ &= G(\bar{\omega}|\omega) - G(\bar{\omega}) = \Phi(\bar{\omega})G(\omega) \\ &= \Phi(\bar{\omega}) \cdot G \cdot e_{\omega}, \quad \forall \bar{\omega} \in \Omega, \quad \forall \omega \in \Omega^0 \end{aligned}$$

逆に、写像 G が、線形 Ω -射 G に対して式 $G(\omega) = G \cdot e_{\omega}$ により定義されるものとする。この時、次式が成立し、写像 G は定義 3.4 の条件を満たす。

$$\begin{aligned} G(\omega_2|\omega_1) &= G \cdot e_{\omega_2|\omega_1} = G \cdot (\Psi(\omega_2)e_{\omega_1} + e_{\omega_2}) \\ &= \Phi(\omega_2)G(\omega_1) + G(\omega_2) \quad \forall \omega_2, \omega_1 \in \Omega^0 \quad \square \end{aligned}$$

(注) 命題 4.4 により、アファイン入力付き線形 Ω -モジュール $((V(\Omega^0), \Psi), e)$ が、アファイン入力付き線形 Ω -モジュールの圏の始対象である。 $\square$

【定義 4.5】 線形 Ω -射 $G: (V(\Omega^0), \Psi) \rightarrow (X, \Phi)$ は、線形 Ω -モジュール (X, Φ) の線形入力写像といわれる。 $\square$

【補題 4.6】 アファイン入力付き線形 Ω -モジュール $((X, \Phi), G)$ が擬可到達となるための必要十分条件は、命題 4.4 において G に対応する線形入力写像 G が全射となることである。 $\square$

4.2 線形観測付き線形 Ω -モジュール

この節では、線形 Ω -モジュールと線形観測機構との組である線形観測付き線形 Ω -モジュールの圏を考え、その終対象を導出する。また、線形 Ω -モジュールから終対象への線形 Ω -射を線形観測写像として定義し、この線形観測写像が単射であることと、可識別とが同じ条件であることを示す。

この節の内容は、数学的には文献 3、第 4 節と同じであるため証明は省略する。

【定義 4.7】 線形 Ω -モジュール (X, Φ) と線形写像 $h: X \rightarrow Y$ の組 $((X, \Phi), h)$ は、線形観測付き線形 Ω -モジュールといわれる。

線形観測付き Ω -モジュール $((X_1, \Phi_1), h_1), ((X_2, \Phi_2), h_2)$ に対し、線形 Ω -射 $f: (X_1, \Phi_1) \rightarrow (X_2, \Phi_2)$ は、 $h_1 = h_2 \cdot f$ を満たす時、線形観測付き線形 Ω -射といわれる。

【定義 4.8】 線形観測付き線形 Ω -モジュール $((X, \Phi), h)$ は、 $h \cdot \Phi(\omega)x_1 = h \cdot \Phi(\omega)x_2, \quad \forall \omega \in \Omega$ ならば、 $x_1 = x_2$ となる時、可識別といわれる。 $\square$

(注) 上記の可識別の定義がアファイン力学系の可識別の定義と同等であることは、つぎの三つの式が同等であることからわかる。

$$h \cdot \Phi(\omega)(x_1 + x_0) = h \cdot \Phi(\omega)(x_2 + x_0)$$

$$h \cdot \Phi(\omega) \cdot x_1 + h \cdot G(\omega) + h^0$$

$$= h \cdot \Phi(\omega) \cdot x_2 + h \cdot G(\omega) + h^0$$

$$h \cdot \Phi(\omega)x_1 = h \cdot \Phi(\omega)x_2 \quad \square$$

【例 4.9】 文献 3、例 3.8 で考察した線形 Ω -モジュール $(F(\Omega, Y), S_i)$ と線形写像 $1: F(\Omega, Y) \rightarrow Y; a$

$\mapsto a(1)$ の組 $((F(\Omega, Y), S_i), 1)$ は線形観測付き線形 Ω -モジュールである。 $\square$

【命題 4.10】 線形観測付き線形 Ω -モジュール $((X, \Phi), h)$ に対し、線形観測付き線形 Ω -射 $H: ((X, \Phi), h) \rightarrow ((F(\Omega, Y), S_i), 1)$ が一意に存在し、式

$$(H \cdot x)(\omega) = h \cdot \Phi(\omega)x, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall x \in X$$

により与えられる。

逆に、線形 Ω -射 $H: (X, \Phi) \rightarrow (F(\Omega, Y), S_i)$ に対し、 $h = 1 \cdot H$ により定義される写像 $h: X \rightarrow Y$ は線形写像、すなわち線形観測機構である。 $\square$

(注) 命題 4.10 により線形観測付き線形 Ω -モジュール $((F(\Omega, Y), S_i), 1)$ が、線形観測付き線形 Ω -モジュールの圏の終対象である。 $\square$

【定義 4.11】 線形 Ω -射 $H: (X, \Phi) \rightarrow (F(\Omega, Y), S_i)$ は線形 Ω -モジュール (X, Φ) の線形観測写像といわれる。

【命題 4.12】 線形観測付き線形 Ω -モジュール $((X, \Phi), h)$ が可識別であるための必要十分条件は、命題 4.10 において、 h に対応する線形観測写像 $H: X \rightarrow F(\Omega, Y)$ が単射となることである。 $\square$

【命題 4.13】 線形 Ω -モジュール $(V(\Omega^0), \Psi)$ の線形観測機構の集合を $V(\Omega^0)^*$ と表わせば、 $V(\Omega^0)^* = L(V(\Omega^0), Y)$ であり、また、対応: $F_0(\Omega, Y) \rightarrow V(\Omega^0)^*; a_L \mapsto a_L$, ただし、 $a_L \cdot e_{\omega} = a_L(\omega)$, により $V(\Omega^0)^* \cong F_0(\Omega, Y)$ が成立する。 $\square$

(注) 命題 4.10、4.13 により、線形部分入力応答関数 $a_L \in F_0(\Omega, Y)$ と線形 Ω -射 $A: (V(\Omega^0), \Psi) \rightarrow (F(\Omega, Y), S_i)$ とが 1 対 1 に対応する。 $\square$

4.3 洗練された形のアファイン力学系

この節では、4.1、4.2 節で確立した成果をもとに、アファイン力学系の洗練された形と、その行動を定義する。さらに、任意の入力応答関数を実現するアファイン力学系の洗練された形の例を記述する。

【定義 4.14】 標準アファイン力学系 $\sigma_N = ((X, \Phi), G, h, h^0)$ に対し、組 $\Sigma = ((X, \Phi), G, H, h^0)$ は、 σ_N の洗練された形といわれる。ただし、写像 $G: V(\Omega^0) \rightarrow X$ は、命題 4.4 により G に対応する線形入力写像であり、写像 $H: X \rightarrow F(\Omega, Y)$ は命題 4.10 により h に対応する線形観測写像である。

式 $A_{\Sigma} = H \cdot G + h^0$ により定義される写像 $A_{\Sigma}: V(\Omega^0) \rightarrow F(\Omega, Y)$ は、 Σ の行動といわれる。 $\square$

【定義 4.15】 線形 Ω -射 $A: (V(\Omega^0), \Psi) \rightarrow (F(\Omega, Y), S_i)$ は、線形入出力写像といわれる。アファイン力学系 $\Sigma = ((X, \Phi), G, H, h^0)$ は、線形入出力写像 A と、ある数 $a(1) \in Y$ に対し、 $H \cdot G = A, h^0 = a(1)$ が成立する時、 $(A, a(1))$ を実現するといわれる。 $\square$

(注) 線形入出力写像 $\mathbf{A}$ は, 線形部分入力応答関数 $a_L \in F_0(\Omega, Y)$ と, 命題 4.10, 4.13 の(注)により, 1 対 1 に対応し, $(\mathbf{A} \cdot e_\omega)(\bar{\omega}) = a_L(\bar{\omega}|\omega) - a_L(\bar{\omega})$ により与えられる. $\square$

上記の(注), 補題 3.12, 命題 4.4, 4.10 と定義 4.15 によりつぎの命題が得られる.

【命題 4.16】 $\sigma_N = ((\mathbf{X}, \Phi), G, \mathbf{h}, h^0)$ を標準アファイン力学系, $\Sigma = ((\mathbf{X}, \Phi), G, \mathbf{H}, h^0)$ を σ_N の洗練された形とする. この時, σ_N が入力応答関数 $a: \Omega \rightarrow Y$ を実現するための必要十分条件は, Σ が $(\mathbf{A}, a(1))$ を実現することである. ただし, $\mathbf{A}: V(\Omega^0) \rightarrow F(\Omega, Y)$ は, $a_L \in F_0(\Omega, Y)$, $a_L = a - a(1)$, に対応する線形入出力写像である. $\square$

【定義 4.17】 洗練された形のアファイン力学系 $\Sigma = ((\mathbf{X}, \Phi), G, \mathbf{H}, h^0)$ は, G が全射の時, 擬可到達といわれ, $\mathbf{H}$ が単射の時, 可識別といわれる. 特に, 擬可到達で可識別な時, 正準といわれる. $\square$

(注) 命題 4.6, 4.12 により, 標準系が擬可到達, 可識別, そして正準であることと, その洗練された形が擬可到達, 可識別, そして正準であることは同等である.

【命題 4.18】 $\sigma_1 = ((\mathbf{X}_1, \Phi_1), G_1, \mathbf{h}_1, h_1^0)$, $\sigma_2 = ((\mathbf{X}_2, \Phi_2), G_2, \mathbf{h}_2, h_2^0)$ を標準アファイン力学系, $\Sigma_1 = ((\mathbf{X}_1, \Phi_1), G_1, \mathbf{H}_1, h_1^0)$, $\Sigma_2 = ((\mathbf{X}_2, \Phi_2), G_2, \mathbf{H}_2, h_2^0)$ を σ_1, σ_2 の洗練された形とする.

線形 Ω -射 $\mathbf{f}: (\mathbf{X}_1, \Phi_1) \rightarrow (\mathbf{X}_2, \Phi_2)$ がアファイン力学系射: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ となるための必要十分条件は, $G_2 = \mathbf{f} \cdot G_1$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{f}$, $h_1^0 = h_2^0$ が成立することである.

(証明) 命題 3.7, 4.4, 4.10 により, 明らかである. $\square$

【例 4.19】 入力応答関数 $a: \Omega \rightarrow Y$ に対し, 標準アファイン力学系 $\sigma_N = ((V(\Omega^0), \Psi), e, a_L, a(1))$ は a を実現する. ただし, $a_L: V(\Omega^0) \rightarrow Y$ は命題 4.13 において, $a_L \in F_0(\Omega, Y)$, $a_L = a - a(1)$, により得られる線形写像である.

$\Sigma = ((V(\Omega^0), \Psi), I, \mathbf{A}, a(1))$ は $(\mathbf{A}, a(1))$ を実現する σ_N の洗練された形のアファイン力学系である. ただし, $\mathbf{A}: V(\Omega^0) \rightarrow F(\Omega, Y)$ は a_L に対応する線形入出力写像であり, $I: V(\Omega^0) \rightarrow V(\Omega^0)$ は恒等写像である. $\square$

【例 4.20】 入力応答関数 a に対し, 標準アファイン力学系 $\sigma_N = ((F(\Omega, Y), S_I), \xi, \mathbf{1}, a(1))$ は, a を実現する. ただし, $\xi: \Omega \rightarrow F(\Omega, Y)$ は $(\xi(\omega))(\bar{\omega}) = a_L(\bar{\omega}|\omega) - a_L(\bar{\omega})$ である.

$\Sigma = ((F(\Omega, Y), S_I), \mathbf{A}, I, a(1))$ は, $(\mathbf{A}, a(1))$ を実現する σ_N の洗練された形のアファイン力学系である.

ただし, $I: F(\Omega, Y) \rightarrow F(\Omega, Y)$ は恒等写像であり, $\mathbf{A}: V(\Omega^0) \rightarrow F(\Omega, Y)$ は例 4.19 と同様である. $\square$

5. 実現理論

本章で, 任意の入力応答関数 $a: \Omega \rightarrow Y$ を実現する正準なアファイン力学系の存在定理と, それらがアファイン力学系として同形であることを示す一意性定理を与える.

前章の例 4.19, 4.20 により, 任意の入力応答関数 a を実現するアファイン力学系の存在は明らかである.

《定理 5.1》 線形入出力写像 $\mathbf{A}: V(\Omega^0) \rightarrow F(\Omega, Y)$ と, ある数 $a(1) \in Y$ [入力応答関数 $a: \Omega \rightarrow Y$] に対し, つぎのアファイン力学系は $(\mathbf{A}, a(1))[a]$ を実現する正準系である.

$$\textcircled{1} \quad \Sigma_q = ((V(\Omega^0)/\ker \mathbf{A}, \Psi), \pi, \mathbf{A}', a(1))$$

$$[\sigma_q = ((V(\Omega^0)/\ker \mathbf{A}, \Psi), e, \hat{a}_L, a(1))]$$

$$\textcircled{2} \quad \Sigma_s = ((\text{im } \mathbf{A}, S_I), \mathbf{A}', j, a(1))$$

$$[\sigma_s = ((\text{im } \mathbf{A}, S_I), \xi, \mathbf{1}, a(1))]$$

ただし, 写像 $\pi: V(\Omega^0) \rightarrow V(\Omega^0)/\ker \mathbf{A}$, 写像 $j: \text{im } \mathbf{A} \rightarrow F(\Omega, Y)$ は, 標準的全射, 標準的単射であり, 写像 $\mathbf{A}': V(\Omega^0)/\ker \mathbf{A} \rightarrow F(\Omega, Y)$, 写像 $\mathbf{A}': V(\Omega^0) \rightarrow \text{im } \mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ に付随する単射, 全射である.

また, 写像 $\hat{a}_L: V(\Omega^0)/\ker \mathbf{A} \rightarrow Y$ は, $\hat{a}_L \cdot [\epsilon_\omega]_{\ker \mathbf{A}} = a_L(\omega)$, $a_L = a - a(1)$, により定義される線形写像であり, 写像 $\xi: \Omega \rightarrow \text{im } \mathbf{A}$ は例 4.20 において定義されるアファイン入力写像である. $\square$

(証明) 写像 $\pi, j, \mathbf{A}'$, そして $\mathbf{A}'$ がすべて線形 Ω -射となるから定理の内容は明らかである. 例 4.19, 4.20, 文献 3 の定理 8.1 参照. $\square$

線形入出力写像 $\mathbf{A}$ と数 $a(1)$ との組 $(\mathbf{A}, a(1))$ を実現する正準アファイン力学系が同形を除いて一意であることは, 文献 3 と同様の手順で, つぎの補題を加えることにより得られる.

【補題 5.2】 洗練された形のアファイン力学系 $\Sigma_1 = ((\mathbf{X}_1, \Phi_1), G_1, \mathbf{H}_1, h^0)$, $\Sigma_2 = ((\mathbf{X}_2, \Phi_2), G_2, \mathbf{H}_2, h^0)$ に対し, $G_r(T_{12}^{\max})[G_r(T_{12}^{\min})]^{39}$, ただし, $T_{12}^{\max} = H_2^{-1} \cdot H_1[T_{12}^{\min} = G_2 \cdot G_1^{-1}]$, $G_r(\circ)$ は関係 $\circ$ のグラフ, は線形 Ω -モジュール $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2, \Phi_1 \times \Phi_2)^{39}$ の不変部分空間である. $\square$

《定理 5.3》 正準なアファイン力学系 $\Sigma_1 = ((\mathbf{X}_1, \Phi_1), G_1, \mathbf{H}_1, h^0)$, $\Sigma_2 = ((\mathbf{X}_2, \Phi_2), G_2, \mathbf{H}_2, h^0)$ に対し, 全単射なアファイン力学系射 $\mathbf{f}: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ が存在するための必要十分条件は, Σ_1 と Σ_2 の行動が等しいこと, すなわち, $\mathbf{H}_1 \cdot G_1 = \mathbf{H}_2 \cdot G_2$ が成立することである. この時アファイン力学系射は, $\mathbf{f} = G_2 \cdot G_1^{-1} (=$

$H_2^{-1} \cdot H_1$) により与えられる. $\square$

(証明) $(x_1, x_2) \in G_r(T_{12}^{\max})$ とする.

$$\begin{aligned} H_1 \cdot \Phi_1(\omega) \cdot x_1 &= S_1(\omega) \cdot H_1 \cdot x_1 = S_1(\omega) \cdot H_2 \cdot x_2 \\ &= H_2 \cdot \Phi_2(\omega) x_2 \quad \forall \omega \in \Omega \end{aligned}$$

が成立し, $(\Phi_1(\omega) \times \Phi_2(\omega))(x_1, x_2) \in G_r(T_{12}^{\max})$, $\forall \omega \in \Omega$ となる. 文献 3 参照. $\square$

[系 5.4] 正準なアファイン力学系 $\sigma_1 = ((X_1, x_1^0, h^0), ((X_1, \Phi_1), G_1, h_1))$, $\sigma_2 = ((X_2, x_2^0, h^0), ((X_2, \Phi_2), G_2, h_2))$ に対し, 全単射なアファイン力学系射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ が存在するための必要十分条件は $h_1 \cdot G_1 = h_2 \cdot G_2$ が成立することである. $\square$

(証明) 定理 5.3, 命題 3.7, 4.16, 4.18 により, この系が得られる. $\square$

参 考 文 献

- 1) 松尾: 数学的システム理論の基礎, 計測と制御, 16-8, 648/654 (1977)
- 2) 松尾: アファイン力学系の実現理論, 第 7 回制御理論シンポジウム資料 (1978)
- 3) 松尾, 新家: 連続時間線形表現系の実現理論, 第 8 回制御理論シンポジウム資料 (1979)
- 4) ブルバキ: 数学原論代数 2, 東京図書 (1970)
- 5) A. Isidori, P. D'Alessandro and A. Rubert: Realization and Structure Theory of Bilinear Dynamical Systems, SIAM. J. Control, 12-3, 517/535 (1974)
- 6) 長谷川, 松尾: 離散時間線形表現系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 15-3, 298/305 (1979)
- 7) 松尾, 上田: 線形表現系とアファイン力学系の関係, Dynamical System Theory シンポジウム資料 (1978)
- 8) T. J. Tarn and S. Nonoyama: An Algebraic Structure of Discrete-Time Biaffine System, IEEE Trans., AC-24-2 (1979)
- 9) E. D. Sontag: Realization Theory of Discrete-Time Nonlinear Systems Part 1—The Bounded Case, IEEE Trans., CAS-26-4 (1979)
- 10) 松尾, 新家: 連続時間線形表現系とアファイン力学系の関係について, 第 9 回制御理論シンポジウム資料 (1980)

《付 録》

本論文に必要なアファイン空間, アファイン射に関連する数学的基礎を, ここにまとめて記述する.

【定義 A.1】 アファイン空間 (X, X) とは, つぎの条件を満たす作用 $+: X \times X \rightarrow X; (x, x) \mapsto x+x$ をもつ集合 X と可換体 K 上のベクトル空間 X の組 (X, X) をいう. 特に, X を台集合, X を随伴ベクトル空間という.

① 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し, $x_2 = x+x_1$ を満たす $x \in X$ がただ一つ存在する.

② 任意の $x \in X$, $x_1, x_2 \in X$ に対し, $x_2 + (x_1 + x) = (x_2 + x_1) + x$ が成立する.

この定義により, 今, 任意の 1 点 $x^0 \in X$ を固定し

て考えた時, すべての点 $x \in X$ は $x = x + x^0$, $x \in X$ と一意に表わされる. また, $0 \in X$ により, $0+ : X \rightarrow X; x \mapsto 0+x$ と定義される作用 $0+$ は恒等写像である.

【定義 A.2】 アファイン空間 (X_1, X_1) , (X_2, X_2) に対し, 写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$, $f: X_1 \rightarrow X_2$ がつぎの条件を満たす時, 組 (f, f) をアファイン射: $(X_1, X_1) \rightarrow (X_2, X_2)$ という.

① $f: X_1 \rightarrow X_2$ は線形写像である.

② 任意の $x \in X_1$, $x \in X_1$ に対し, $f(x+x) = f \cdot x + f(x)$ が成立する. $\square$

(注) 本論文では写像 $f^A: X^A_1 \rightarrow X^A_2$ を, 場合に依じて, アファイン射 $(f, f): (X_1, X_1) \rightarrow (X_2, X_2)$ として, 用いている. $\square$

アファイン空間 (X, X) の任意の 1 点 $x \in X$ は, ある点 $x^0 \in X$ を固定した時, 一意に $x = x + x^0$, $x \in X$ と表わすことができた. この x^0 を原点として決めたアファイン空間を, 原点付きアファイン空間 (X, X, x^0) という.

【定義 A.3】 原点付きアファイン空間 (X_1, X_1, x_1^0) , (X_2, X_2, x_2^0) に対し, アファイン射 $(f, f): (X_1, X_1) \rightarrow (X_2, X_2)$ が, $f(x_1^0) = x_2^0$ を満たす時, (f, f) を原点付きアファイン射という. $\square$

アファイン空間 (X_1, X_1) , (X_2, X_2) と任意の点 $x_1^0 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ に対し, アファイン射 $(f, f): (X_1, X_1) \rightarrow (X_2, X_2)$ は原点付きアファイン射: $(X_1, X_1, x_1^0) \rightarrow (X_2, X_2, f(x_1^0))$ と考えられ, $f(x_1^0) = x_2 + x_2$ となる $x_2 \in X_2$ が一意に決まる.

逆に, 任意の $x \in X_2$ に対し, 原点付きアファイン射 $(f, f): (X_1, X_1, x_1^0) \rightarrow (X_2, X_2, x_2^0)$, ただし, $x_2^0 = x + x_2$, はアファイン射: $(X_1, X_1) \rightarrow (X_2, X_2)$ である.

【補題 A.4】 $AM((X_1, X_1), (X_2, X_2)) \cong \{PAM((X_1, X_1, x_1^0), (X_2, X_2, x+x_2)) | x \in X\}$. ただし, $x_1^0 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ は任意であり, $AM((X_1, X_1), (X_2, X_2)) [PAM((X_1, X_1, x_1^0), (X_2, X_2, x_2^0))]$ は, $(X_1, X_1) [(X_1, X_1, x_1^0)]$ から $(X_2, X_2) [(X_2, X_2, x_2^0)]$ へのすべての〔原点付き〕アファイン射の集合である.

【補題 A.5】 (X_1, X_1, x_1^0) , (X_2, X_2, x_2^0) を原点付きアファイン空間, $f: X_1 \rightarrow X_2$ を線形写像, $f \in L(X_1, X_2)$ とする. $(f, f): (X_1, X_1, x_1^0) \rightarrow (X_2, X_2, x_2^0)$ が原点付きアファイン射であるための必要十分条件は, $f(x+x_1^0) = f \cdot x + x_2^0$, $\forall x \in X_1$ が成立すること, すなわち, 写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が上式により定義されることである. $\square$

補題 A.4, A.5 から, つぎの命題が得られる.

【命題A.6】 アファイン空間 $(X_1, \mathbf{X}_1)$, $(X_2, \mathbf{X}_2)$ と任意の点 $x_1^0 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ に対し, 集合 $L(X_1, X_2) \times X_2$ と集合 $AM((X_1, \mathbf{X}_1), (X_2, \mathbf{X}_2))$ とは, 対応: $L(X_1, X_2) \times X_2 \rightarrow AM((X_1, \mathbf{X}_1), (X_2, \mathbf{X}_2)); (f, x_2) \mapsto (f, f)$, ただし, $f: X_1 \rightarrow X_2; x_1 + x_1^0 \mapsto f \cdot x_1 + x_2 + x_2$, により同形である. $\square$

【定義A.7】 アファイン空間 $(X_1, \mathbf{X}_1)$, $(X_2, \mathbf{X}_2)$ に対し, アファイン射 (f, f) は, f が Surjective の時, Epimorphism, f が Injective の時, Monomorphism, そして, f が Bijective の時 Isomorphism といわれる. $\square$

【命題A.8】 アファイン射 $(f, f): (X_1, \mathbf{X}_1) \rightarrow (X_2,$

$\mathbf{X}_2)$ が Epimorphism, Monomorphism, Isomorphism となるための必要十分条件は, 線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が, それぞれ, Surjective, Injective, Bijective となることである. $\square$

【定義A.9】 $X^A = (X, \mathbf{X})$ をアファイン空間とする. 部分集合 $Y \subset X$ と線形部分空間 $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ の組 $(Y, \mathbf{Y})$ は, 条件 $y + \mathbf{y} \in Y$, $\forall y \in Y$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ を満たす時, 部分アファイン空間といわれる.

任意の部分集合 $X_i \subset X$ に対し, 条件 $Y \supset X_i$ を満たす部分アファイン空間 $(Y, \mathbf{Y})$ の中で最小のものを $(Y_m, \mathbf{Y}_m)$ とする. この時, Y_m を X_i のアファイン包という. $\square$