低次元最小積分逆システムとその二、三の性質

小林 伸明*・中 溝 高 好*

Low Order Minimal Integral Inverse Systems

Nobuaki KOBAYASHI* and Takayoshi NAKAMIZO*

A procedure is presented in this paper to construct the low order minimal integral left inverse of linear multivariable systems. The approach is based on the design of an observer to estimate a linear function of state variables of a linear system. Some simplified criteria for obtaining the minimal order of the minimal integral inverse are shown. Under a mild condition, it is shown that the minimal order is uniquely determined from the knowledge of ranks of appropriate augmented matrices. Then the stability of the reduced order minimal integral inverse is examined, and the results are also used to make a comparison between the integral inverse and the Silverman type inverse systems.

1. 緒 論

逆システム理論は、モデルマッチング¹⁾、非干渉問題²⁾をはじめ広い応用分野があり、従来から多くの研究がなされている。この逆システムは大別して、Silverman^{3), 4)}による逆システムと Sain & Massy⁵⁾による L 積分逆システム、および両者の中間にある Dorato⁶⁾による逆システムがある。このうち Silverman による逆システムは、その安定性の議論⁷⁾や低次元化^{8), 9)}などについて詳しい報告がある。また Sain & Massy の L 積分逆システムの低次元化¹⁰⁾についても考えられている。近年 L 積分逆システムに対して、入力を再構成するために必要な微分器を最小とする最小積分逆システムが神山、古田^{11), 12)}によって考察された。しかし、この最小積分逆システムの低次元化や安定性については論じられていない。本論文では、最小積分逆システムの低次元化について考察し、逆システムの簡単化をはかると同時に、その安定性など二、三の性質

について述べる。

2. 最小積分逆システムの次元の低下

システムは、つぎのような線形モデルで記述されるものとする。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (1)$$

$x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^r$ で、 A, B, C は定係数である。ここでは左可逆だけを考察の対象とし、 B, C はフルランクで、 $r \geq m$ を仮定しておく。ここでつぎの行列を定義する。

$$C^* = [CA^{d_1-1}b_1, CA^{d_2-1}b_2, \dots, CA^{d_m-1}b_m] \quad (2)$$

ただし、 $d_i = \min\{j | CA^{j-1}b_i \neq 0, i=1, 2, \dots, m\}$ である。

まず、この章では $\text{rank } C^* = m$ が成立する場合について考える。システム (A, B, C) のラプラス変換

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}Bu(s)$$

の右辺を $R(x_0, u(s))$ で表わす。これに対し、つぎのような線形システム

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F^*z + G^*y \\ v &= H^*z + J^*y\end{aligned}\quad (3)$$

を考える。ただし $z \in R^n$, $v \in R^m$ である。(3)式のラプラス変換

$$\begin{aligned}v(s) &= H^*(sI - F^*)^{-1}z_0 \\ &\quad + \{H^*(sI - F^*)^{-1}G^* + J^*\}y(s)\end{aligned}$$

の右辺を $\hat{R}(z_0, y(s))$ で表わす。

このとき、いかなる $u(s)$ に対しても、(1)式のすべての初期値 x_0 について

$$\hat{R}(z_0, y(s)) = Q(s)u(s),$$

$$Q(s) = \text{diag}(s-d_1, s-d_2, \dots, s-d_m)$$

となる z_0 が存在するとき、(3)式を(1)式の $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ 積分逆システムと言い、特に $d_1 + d_2 + \dots + d_m$ が最小のものを最小積分逆システムと言う^{11), 12)}。

【補題 1】 $\text{rank } C^* = m$ であるとき、システム (A, B, C) は左可逆であって、 $\text{diag}(s-d_1, s-d_2, \dots, s-d_m)$

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka

(Received February 5, 1980)

(Revised July 7, 1980)

となる最小積分左逆システムが存在する。

(証明) 文献 11, 定理 1 (または文献 12) から明らかである。

さて

$$\text{rank } C^* = m \quad (4)$$

を満たすとき, 最小 $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ 積分逆システムの低次元化を考える。条件 (4) 式から

$$TC^* = \begin{pmatrix} \bar{C}^* \\ 0 \end{pmatrix}_{r-m}^m \quad (5)$$

とする正則行列 T が存在する。 $T = [T_1' : T_2']'$, $T_1 \in R^{m \times r}$, $T_2 \in R^{(r-m) \times r}$ とすると, 条件 (2), (4) 式から

$$TCA^{j-1}b_i = 0 \quad j \leq d_i - 1 \quad (6)$$

$$\text{rank}[T_1CA^{d_1-1}b_1, T_1CA^{d_2-1}b_2, \dots, T_1CA^{d_m-1}b_m] = m \quad (7)$$

$$[T_2CA^{d_1-1}b_1, T_2CA^{d_2-1}b_2, \dots, T_2CA^{d_m-1}b_m] = 0 \quad (8)$$

なる関係が得られる。そこで (1) 式の出力方程式に左から T を掛けて, つぎのようなシステムに変換する。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y_1 &= TCx \end{aligned} \quad (9)$$

ただし $y_1 = Ty$ である。つぎに入力 u を

$$u = \begin{pmatrix} p^{d_1} & 0 \\ & p^{d_2} \\ & & \ddots \\ 0 & & & p^{d_m} \end{pmatrix} v = Mv$$

とおく。ここに p は微分作用素を表わし, $p = d/dt$ である。これを使って (9) 式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BMv \\ y_1 &= TCx \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(10) 式の任意の x_0 に対し, y_1 を入力として v を再構成するシステムが $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ 積分逆システムである。

ところで (10) 式は, $B^* = [A^{d_1}b_1, A^{d_2}b_2, \dots, A^{d_m}b_m]$, $C^* = [CA^{d_1-1}b_1, CA^{d_2-1}b_2, \dots, CA^{d_m-1}b_m]$ と定義すれば

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B^*v \\ y_1 &= TCx + TC^*v \\ x_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (11)$$

と書ける。このことは (11) 式のラプラス変換が

$$\begin{aligned} y_1(s) &= TC(sI - A)^{-1}x_0 \\ &\quad + [TC(sI - A)^{-1}B^* + TC^*]v(s) \end{aligned}$$

となるから, 右辺第 2 項の係数行列における k 番目の列を表わすと

$$\begin{aligned} TC(sI - A)^{-1}b_k^* + TC_k^* \\ = TCA^{d_k-1}b_k + TCb_k^*s^{-1} + TCAb_k^*s^{-2} \\ + TCA^2b_k^*s^{-3} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

である。一方, (10) 式のラプラス変換は

$$\begin{aligned} y_1(s) &= TC(sI - A)^{-1}x_0 \\ &\quad + TC(sI - A)^{-1}BM(s)v(s) \end{aligned}$$

であるから, 上式第 2 項の展開における k 番目の列は

$$\begin{aligned} [TC(sI - A)^{-1}BM(s)]_k \\ = TCAb_k^*s^{d_k-1} + TCAb_k^*s^{d_k-2} \\ + TCA^2b_k^*s^{d_k-3} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

で表わされる。(6)~(8) 式を考慮して (12), (13) 式を比較すると, (10) と (11) 式が等価であることがわかる。

以上のことから, 最小次元の最小積分逆システムは (11) 式で記述されるシステムの入力 v を再構成する最小次元逆システムを構成すればよいことになる。(11) 式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B^*v \\ y_1 &= \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{C}^* \\ 0 \end{pmatrix} v \end{aligned} \quad (14)$$

と書けるので, 逆システムは

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A - B^*\bar{C}^{*-1}\bar{C}_1)z + B^*\bar{C}^{*-1}\bar{y}_1 \\ v &= -\bar{C}^{*-1}\bar{C}_1z + \bar{C}^{*-1}\bar{y}_1 \quad z_0 = x_0 \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる。ここで $\bar{C}_1 = T_1C$, $\bar{C}_1 = T_2C$ である。逆システム (15) 式の動的部分は $\bar{C}_1x$ を生成するために

$$\dot{x} = (A - B^*\bar{C}^{*-1}\bar{C}_1)x + B^*\bar{C}^{*-1}\bar{y}_1$$

のモデルを作っていることになる, また x の一部は出力の一部 $\bar{y}_1 = \bar{C}_1x$ から得られるので, 逆システムの動的部分の構成は線形関数観測器の構成問題^{8), 13), 14)} に一致する。

《定理 1》 条件 (4) を満足するシステム (A, B, C) の最小積分逆システムの最小次数は, $\bar{A} \triangleq A - B^*\bar{C}^{*-1}\bar{C}_1$ とおけば

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \text{rank}(\bar{A}^{i-1}(\bar{C}_1', \bar{C}_1'), \bar{A}^{i-1}(\bar{C}_1', \bar{C}_1'), \dots, \\ &\quad \bar{A}^{i-1}(\bar{C}_1', \bar{C}_1'), \bar{C}_1', \bar{C}_1') \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} p_i &= \text{rank}(\bar{A}^{i-1}\bar{C}_1', \bar{A}^{i-1}(\bar{C}_1', \bar{C}_1'), \dots, \\ &\quad \bar{A}^{i-1}(\bar{C}_1', \bar{C}_1'), \bar{C}_1', \bar{C}_1') \end{aligned} \quad (17)$$

と定義して, $\delta_i = \bar{p}_i - p_i$ とするとき

$$l = \min\{i | \delta_i = 0\} \quad (18)$$

ならば

$$q = \text{rank } \bar{C}_1 + \sum_{i=1}^l \delta_i \quad (19)$$

である。

(証明) $\text{rank } \bar{C}^* = m$ であって, T は正則行列であるから $\text{rank}(\bar{C}_1', \bar{C}_1') = \text{rank } \bar{C}_1 + \text{rank } \bar{C}_1'$ である。(14) 式のシステムは文献 8 の定理 1 の特別な場合, すなわち $\text{rank } D = m$ の場合に相当する。(Q. E. D.)

〔系〕 可観測な m 入力 m 出力系 (入出力が同数)

において条件(4)式を満足すれば、最小積分逆システムの最小次数は n 次である。

(証明) 入出力数が同じ場合、(14)式の出力方程式は $\bar{C}_1 = C$, $\bar{C}_1 = 0$ である。これを定理 1 にあてはめれば、(19)式で与えられる次数 q は

$$q = \text{rank}(\bar{C}_1', \bar{A}'\bar{C}_1', \dots, \bar{A}'^{p-1}\bar{C}_1') \quad (20)$$

$$p^* = \min\{i | \text{rank}(\bar{C}_1', \bar{A}'\bar{C}_1', \dots, \bar{A}'^i\bar{C}_1') \\ = \text{rank}(\bar{C}_1', \bar{A}'\bar{C}_1', \dots, \bar{A}'^{i+1}\bar{C}_1')\}$$

である。(C, A) が可観測であるなら $(\bar{C}_1, \bar{A})$ は可観測であり、 p^* は可観測指数に一致し $q = n$ が成り立つ。

(Q. E. D.)

さらに、もし初期値 $x_0 = 0$ であれば、逆システムの次数は定理 1 で与えられるものより低次のものが存在する。これを示す。まず (A, B) が可制御であって (A, B*) が可制御であるとは限らない。

【補題 2】 システム (A, B, C) において、(A, B) が可制御のとき、(A, B*) が可制御となる必要十分条件は $\det A \neq 0$ である。

(証明) 必要性; (A, B*) が可制御なら

$$V = [B^*, AB^*, \dots, A^{n-1}B^*] \quad (21)$$

で定義される行列 V は $\text{rank } V = n$ である。システム (A, B, C) では $d_i \geq 1$ であるから

$$B^* = A[A^{d_1-1}b_1, A^{d_2-1}b_2, \dots, A^{d_m-1}b_m] \\ = A\bar{B}^* \quad (22)$$

と書ける。ただし $\bar{B}^* = [A^{d_1-1}b_1, A^{d_2-1}b_2, \dots, A^{d_m-1}b_m]$ である。(21)式は(22)式を使って

$$V = A[\bar{B}^*, A\bar{B}^*, \dots, A^{n-1}\bar{B}^*] = A\bar{V} \quad (23)$$

と表わせる。ここで $\bar{V} = [\bar{B}^*, A\bar{B}^*, \dots, A^{n-1}\bar{B}^*]$ である。 $\text{rank } V \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } \bar{V})$ であるので $\text{rank } A = n$ は必要である。

十分性; $\bar{V} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ とおく。 $d = \max(d_1, d_2, \dots, d_m)$ として、 $\det A \neq 0$ ならば (A, B) 可制御であるから $\text{rank } A^d \bar{V} = n$ である。ところが (A, B*) が可制御でないとする

$$[A^{d_1}b_1, A^{d_2}b_2, \dots, A^{d_m}b_m, A^{d_1+1}b_1, \dots, \\ A^{d_1+n-1}b_1, \dots, A^{d_m+n-1}b_m, \dots]$$

なる行列は、Cayley-Hamilton の定理からランク n 以下であり、この行列は $A^{d_m}\bar{V}$ の行列を含むから $\text{rank } \bar{V} = n$ に反する。(Q. E. D.)

さて、(A, B*) が可制御でない(すなわち $\det A = 0$) 場合、初期値 $x_0 = 0$ であれば、つぎのようにして定理 1 で与えられるものより次数の低い最小積分逆システムが得られることが示せる。

$$\text{rank } V = \phi < n \quad (24)$$

とする。ここで(14)式を変換行列 P によって可制御正準形に変換して

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1^* \\ 0 \end{pmatrix} v \quad (25)$$

$$\bar{y}_1 = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} \bar{C}^* \\ 0 \end{pmatrix} v$$

と表わすことができる。ただし

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi \\ n-\phi \end{matrix} \quad PB = \begin{pmatrix} \bar{B}_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi \\ n-\phi \end{matrix}$$

$$CP^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ r-m \end{matrix}$$

である。

このとき、 $x_0 = 0$ であるならば最小積分逆システムの最小次数はつぎのように与えられる。

《定理 2》 定理 1 の条件のもとで初期値 $x_0 = 0$ である場合、最小積分逆システムの最小次数は、(16), (17), (19)式において、係数 $\bar{A}, \bar{C}_1, \bar{C}_1$ の代わりに、おのおの $\bar{A}_{11} \triangleq \bar{A}_{11} - \bar{B}_1^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_{11}$, $\bar{C}_{11}, \bar{C}_{11}$ とおくことによって(19)式で与えられる。

(証明) まず(25)2式から

$$v = \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1 - \bar{C}^{*-1} (\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}) \bar{x} \quad (26)$$

を得る。これを(25)1式に代入すると

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} - \bar{B}_1^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_{11} & \bar{A}_{12} - \bar{B}_1^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \bar{x} \\ + \begin{pmatrix} \bar{B}_1^* \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。ここで(26)式の v を再構成するために $\bar{x}$ が必要であるが、 $\bar{x}_0 = 0$ であるから $\bar{x}_2 \equiv 0$ である。そこで(26), (27)式は

$$v = \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1 - \bar{C}^{*-1} \bar{C}_{11} \bar{x}_1 \quad (28)$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{B}_1^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_{11}) \bar{x}_1 + \bar{B}_1^* \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1 \quad (29)$$

のようになる。また $\bar{y}_1 = (\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}) \bar{x}$ は

$$\bar{y}_1 = \bar{C}_{11} \bar{x}_1 \quad (30)$$

である。(28)式の v を構成するのに必要な状態は $\bar{C}_{11} \bar{x}$ であるから、これを(29), (30)式に用いて構成する問題は(29), (30)式のシステムに対する線形関数 $\bar{C}_{11} \bar{x}_1$ を再構成する観測器の構成問題となり、定理 1 の係数に(28)~(30)式の係数に対応させればよい。定理 2 で得られる次数が定理 1 で得られる次数より小さいことは、(25), (27)式から明らかである。(Q. E. D.)

(注意 1) 定理 1 では $\text{rank}(\bar{C}_1', \bar{C}_1') < \text{rank } \bar{C}_1' + \text{rank } \bar{C}_1'$ という退化⁸⁾は生じえなかったが、定理 2 では $\text{rank}(\bar{C}_{11}', \bar{C}_{11}') < \text{rank } \bar{C}_{11}' + \text{rank } \bar{C}_{11}'$ の場合が起こりうる。この場合には文献 8 の注意 2 に示した手順を行った後、定理を適用する必要がある。

(注意 2) 補題 2 はシステムの極に原点と一致するものがあると(11)式の伝達関数において零点と極の相

殺が起こり、不可制御部分を生ずることを示している。

(注意3) 定理2で示したように不可制御部分がある場合、 $x_0=0$ ならば、前に報告した α 微分逆システム⁸⁾に対しても、まったく同様に最小次数を示すことができる。

つぎに定理1,2に関する簡単な例題を示しておく。

【例題1】

つぎのようなシステム (A, B, C) を考える。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

まず行列 C^* を定義に従って算出すると

$$Cb_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Cb_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから条件(4)式を満足している。また、 $d_1=d_2=1$ であるので $\text{diag}[s^{-1}, s^{-1}]$ なる最小積分逆システムが存在する。 $T=I_3$ として(14)式の形式に変換すると、係数はおのおの

$$B^* = [Ab_1 \ Ab_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{C}^{*-1}$$

$$\bar{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = (0 \ 0 \ 1)$$

である。また $\bar{y}_1 = (y_1, y_2)'$, $\bar{y}_3 = y_3$ である。このとき $\hat{A}$ は $A - B^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_1$ で算出されるから、定理1にこれらの係数をあてはめると、最小次数 q は $q = \text{rank } \bar{C}_1 + \sum_{i=1}^1 \delta_i = 2$ のように求まる。線形関数観測器の構成手順^{13), 14)}に従って、つぎのような2次の最小次元最小積分逆システムが得られる。

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

つぎに初期値が零の場合を考える。 $\det A = 0$ であるから定理2の手順に従うと $\bar{C}_{11}' = (0, 1)$, $\tilde{C}_{11} = 1$ となる。注意1から零次の逆システムが存在し、つぎのようになる。

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

3. 低次元化最小積分逆システムとその性質

最小次数については定理1,2でふれた。しかし、定

理に基づいて最小次元最小積分逆システムの性質や、 α 微分逆システムとの関係を直接論ずることは、定理1で得られる形式が複雑となって見通しがよくない。そこで、ここでは $n - \text{rank } \tilde{C}_1$ 次の低次元最小積分逆システムを導入して、その構造について考察を進めることにする。

(17)式と $\bar{y}_1 = \tilde{C}_1 x$ なる関係を考慮して、低次元観測器の構成手順を用いれば、 $n - \text{rank } \tilde{C}_1$ 次の低次元最小積分逆システムは容易に得られる。すなわち

$$\dot{x} = (A - B^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_1) x + B^* \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1$$

$$v = -\bar{C}^{*-1} \bar{C}_1 x + \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1$$

$$\bar{y}_1 = \tilde{C}_1 x$$

において、 $\tilde{C}_1 U = [I_{r-m} : 0]$ とする変換行列 U が存在する。この変換行列 U を使って上式で $\hat{x} = U^{-1} x$ と変換すれば

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \overbrace{\hat{A}_{11}}^{r-m} & \overbrace{\hat{A}_{12}}^{n+m-r} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} \hat{B}_1^* \\ \hat{B}_2^* \end{pmatrix} \bar{y}_1 \quad (31)$$

$$v = (\hat{C}_1^* \ \hat{C}_2^*) \hat{x} + \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1$$

$$\bar{y}_1 = (I_{r-m} : 0) \hat{x} \quad (32)$$

の形に書ける。 $\hat{x}_2 = (0 : I_{n-r+m}) \hat{x}$ とすれば(32)式の1回微分は(31)式を使って

$$\dot{\bar{y}}_1 - \hat{A}_{11} \bar{y}_1 - \hat{B}_1^* \bar{y}_1 = \hat{A}_{12} \hat{x}_2 \quad (33)$$

となるから、 $n - \text{rank } \tilde{C}_1$ 次の逆システムは

$$\dot{\hat{x}}_2 = (\hat{A}_{22} + K \hat{A}_{12}) \hat{x}_2 + (\hat{A}_{21} + K \hat{A}_{11}) \bar{y}_1 + (K \hat{B}_1^* + \hat{B}_2^*) \bar{y}_1 - K \dot{\bar{y}}_1 \quad (34)$$

$$v = \hat{C}_2^* \hat{x}_2 + \hat{C}_1^* \bar{y}_1 + \bar{C}^{*-1} \bar{y}_1$$

のように与えられる。ただし K は任意の定数行列である。(34)式の逆システムにおける $\bar{y}_1$ の1回微分は $\dot{z}_2 = \theta_2 - K \bar{y}_1$ と変換して消去できるので、この逆システムに入力 y の微分値は必要としない。

【補題3】 m 入力 m 出力系 (A, B, C) において(4)式を満足するとき、最小次元最小積分逆システムの $\sum_{i=1}^m d_i$ 個の極は原点に存在し、残り $(n - \sum_{i=1}^m d_i)$ 個の極はすべて不変零点に一致する。

(証明) 定理1の系に示したように、最小積分逆システムの最小次数は、入出力系が同一であるから n であり、逆システムは

$$\dot{z} = (A - B^* C^{*-1} C) z + B^* y$$

$$v = -C^{*-1} C z + C^{*-1} y \quad (35)$$

である。一方、システム (A', C', B') に対する Silverman の逆システム³⁾は、(4)式の条件のもとで

$$\dot{z}_s = (A' - C' C^{*-1} B^*) z_s + C' C^{*-1} y$$

$$u = -C^{*-1} B^* z_s + C^{*-1} y \quad (36)$$

となるから、(36)式で示される最小積分逆システムの極は、(35)式の逆システムの極に一致する。 $(A', C',$

B') に対して Silverman のアルゴリズムを用いると、条件(4)が成立するもとは、

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \bar{B}'x \\ \bar{B} &= (b_1, Ab_1, \dots, A^{d_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, \\ &\quad A^{d_2-1}b_2, b_3, \dots, A^{d_m-1}b_m) \end{aligned} \quad (37)$$

なる関係を得る。このことと、 n 次元の Silverman の逆システム(36)の極が不変零点と原点に存在することから補題3が成立する⁸⁾。(Q. E. D.)

補題3から、同一入出力数のシステムにおいては、つぎの関係が成立する。

α 微分逆システムの最小次数
= Bengtsson の最小次数

$$= \text{最小積分逆システムの最小次数} - \sum_{i=1}^m d_i$$

一般に入出力系が同数でない場合には、補題3を使ってつぎの定理が得られる。

《定理3》 $n - \text{rank } \tilde{C}_1$ 次の最小積分逆システムの極は $\sum_{i=1}^m d_i$ 個が原点に存在し、残りの $(n - \text{rank } \tilde{C}_1 - \sum_{i=1}^m d_i)$ 個のうち一部は不変零点に一致し、残りは任意に配置が可能である。

(証明) $n - \text{rank } \tilde{C}_1$ 次の最小積分逆システムは(34)式で与えられる。したがって $(\hat{A}_{22} + K\hat{A}_{22})$ の極のうち $(\hat{A}_{22}, \hat{A}_{12})$ の可観測部分は任意に極配置ができる。このことから $(\hat{A}_{22}, \hat{A}_{12})$ の不可観測な極、すなわち $((A - B^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_1), \bar{C}_1)$ の不可観測な極を調べればよい。ここで

$$\begin{aligned} \xi &= (A - B^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_1) \xi + \bar{B} \xi \\ \eta &= \bar{C}_1 \xi \end{aligned} \quad (38)$$

の不可制御かつ不可観測な極が (A, B, C) の零点¹⁵⁾であることと

$$\bar{C}_1(A - B^* \bar{C}^{*-1} \bar{C}_1)^j \bar{B} = 0 \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

が成立する⁴⁾ことを考慮に入れると、(38)式のシステムにおいて、可制御空間と可観測空間の共通な部分空間は存在しない。(38)式の可制御な極は補題3から原点に一致する。よって $(\hat{A}_{22}, \hat{A}_{12})$ の不可観測な極は、 $\sum_{i=1}^m d_i$ の原点に一致するものと、 (A, B, C) の零点に一致するものになる。(Q. E. D.)

4. 一般の場合への拡張

ここでは $\text{rank } C^* = m$ を満たさない場合を考える。すなわち一般の可逆条件のもとで前章の方法を拡張して、最小積分逆システムの低次元化を行う。

まず、一般に (A, B, C) の伝達関数 $R(s)$ は

$$R(s) = \{C(sI_n - A)^{-1}B^* + \bar{D}(s)\}Q(s) \quad (40)$$

と書ける^{11), 12)}。ただし

$$Q(s) = \text{diag}(s - d_1, \dots, s - d_m)$$

$$B^* = (A^{d_1}b_1, A^{d_2}b_2, \dots, A^{d_m}b_m)$$

$$\bar{D}_i(s) = C(s^{d_i-1}I + s^{d_i-2}A + \dots + A^{d_i-1})b_i$$

である。ここで多項式行列 $\bar{D}(s)$ に注目する。まず $\bar{D}(s)$ が適当な正則行列 T によって

$$T\bar{D}(s) = \begin{bmatrix} \bar{D}(s) \\ 0 \end{bmatrix}_{r-t}^t \quad (41)$$

と書けるものとする。このような定数行列 T が存在しない場合は後で述べる。

[補題4]⁶⁾ $R(s)Q^{-1}(s)$ が強可逆となる必要十分条件は $\bar{D}(s)$ が強可逆となることである。

が成立するから、 $T = [T_1', T_2']'$, $T_1 \in R^{t \times m}$, $T_2 = R^{(r-t) \times m}$ とおくと $\bar{D}(s)$ が強可逆なら $\bar{D} = T_1 \bar{D}(s)$ も強可逆であるから、システム $(A, B, T_1 C)$ に対してもやはり $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ 積分左逆システムが存在する。このとき(1)式のシステムは

$$\dot{x} = Ax + B^*v \quad x_0 = x_0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} T_1 y &= T_1 Cx + \bar{D}(s)v \\ T_2 y &= T_2 Cx \end{aligned} \quad (43)$$

のように表わされ、(42)式から最小積分逆システムは $\bar{D}^*(s)\bar{D}(s) = I_m$ なる多項式行列 $\bar{D}^*(s)$ を

$$\bar{D}^*(s) = \bar{H}(sI_r - \bar{F})^{-1}\bar{G} + \bar{J} \quad (44)$$

とすると

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{F}z + \bar{G}T_1 y \\ v &= \bar{H}z + \bar{J}T_1 y \end{aligned} \quad (45)$$

である^{11), 12)}。ただし

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} A - B^* \bar{J} T_1 C & B^* \bar{H} \\ -\bar{G} T_1 C & \bar{F} \end{pmatrix} & G &= \begin{pmatrix} B^* \bar{J} \\ \bar{G} \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} -\bar{J} T_1 C & \bar{H} \end{pmatrix} & J &= \bar{J} \end{aligned}$$

であって、 $\bar{H}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{J}$ は定数行列である。

ここで(43)式も考慮に入れるとつぎの定理を得る。

《定理4》 $\bar{D}(s)$ が(41)式のように分割できて、 $(A, B, T_1 C)$ に対する最小積分逆システムを(45)式とすると、 (A, B, C) に対してつぎの次数の最小積分逆システムが存在する。

$$\begin{aligned} f_i &= \text{rank}[F^{i-1}(\bar{H}, H'), F^{i-1}(\bar{H}', H'), \dots, \\ &\quad F'(\bar{H}, H), \bar{H}', H'] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} f_i &= \text{rank}[F^{i-1}\bar{H}', F^{i-1}(\bar{H}', H'), \dots, \\ &\quad F'(\bar{H}', H'), \bar{H}', H'] \end{aligned} \quad (47)$$

と定義して $d_i^h = f_i - f_{i-1}$ とするとき

$$l^h = \min\{i | d_i^h = 0\} \quad (48)$$

ならば、次数 q_h は

$$q_h = \text{rank } H + \sum_{i=1}^{l^h} d_i^h \quad (49)$$

で与えられる。ただし $\bar{H} = (T_2 C : 0)$ とおいた。

(証明) (42)式から

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - B^* \bar{D}^+(s) T_1 C) \dot{x} + B^* \bar{D}^+(s) T_1 y \\ v &= \bar{D}^+(s) T_1 y - \bar{D}^+(s) T_1 C \dot{x}\end{aligned}\quad (50)$$

となる。これは新しい状態変数 w を導入して $X = (x', w')'$ とすると

$$\begin{aligned}\dot{X} &= FX + GT_1 y \\ v &= HX + JT_1 y\end{aligned}\quad (51)$$

と書ける。ただし $w_0 = 0$, $x_0 = x_0$ である。(51)式において HX を再構成すればよいから、 $T_2 y = \bar{H} \dot{x}$ を考慮に入れば再び線形関数観測器の構成問題に帰着される。(Q. E. D.)

[例題 2]

つぎの線形系を考える。

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$d_1 = d_2 = 2$ の最小積分逆システムが存在するから $\bar{D}(s)$ は

$$\bar{D}(s) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

である。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる T によって

$$T \bar{D}(s) = \begin{pmatrix} s & s \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = (-1 \ 0 \ 1)$ として定理 4 が適用できる。

(注意 4)

$$M_k = \begin{pmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{k-1}B \\ * & CB & \cdots & CA^{k-2}B \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & CAB & \\ & & \ddots & CB \end{pmatrix}\quad (52)$$

で定義される行列 M_k を考えると、文献 11 で述べられた手順で構成される最小積分逆システムの次数 $\hat{q}$ は

$$\hat{q} = n + \text{rank } M_d - m - \sum_{i=1}^m (d - d_i) \quad (53)$$

で与えられる。ただし $d = \max(d_1, d_2, \dots, d_m)$ である。一方、(52)式の M_k 行列の C を $T_1 C$ で置き換

えた大行列 $M_{T_1 k}$ を考えると、上述の手順によって得られる次数は

$$\begin{aligned}q_k^* &= n + \text{rank } M_{T_1 d} - m - \sum_{i=1}^m (d - d_i) \\ &\quad - \text{rank } T_2 C\end{aligned}\quad (54)$$

以下である。明らかに $\text{rank } M_{T_1 d} \leq \text{rank } M_d$ が成り立つので、定理 4 によって次元は低下される。しかしながら、これが最小かどうかは明らかではない。

つぎに (41) 式のように $\bar{D}(s)$ が分割できない場合について考える。(53)式において $\text{rank } M_d$ を小さくすれば次数 $\hat{q}$ は小さくなる。そこで $K \bar{D}(s)$ が強可逆である範囲で $\text{rank } M_{Kd}$ を最小にする定数行列 K を選び

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y_K &= Ky = KCx\end{aligned}\quad (55)$$

なるシステムを考えれば、 $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ 積分逆システムが存在して、その次数は (53) 式で与えられる次数 $\hat{q}$ 以下である。たとえば、文献 11 の例題において

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と選べば $K \bar{D}(s)$ は強可逆で、 $\text{rank } M_{K2} = 3 < \text{rank } M_2 = 4$ であるから、3 次の最小積分逆システムが存在する。

[補題 5] 入出力数が同数のシステムの最小積分逆システムの最小次数は (零点の数 + $\sum_{i=1}^m d_i$) である。

(証明) 最小積分逆システムの次数 q は (53) 式で与えられる。ところが入出力数が同一ならば、状態変数と置き換わる出力 y が存在しないから、 M_d のランクを最小にすれば最小次数が得られる。ここで

$$\text{rank } M_d = m + \sum_{k=0}^{d-1} q_k \quad (56)$$

なる関係が成り立つ。ただし q_k は Silverman のアルゴリズムの k 段で得られる関係式⁹⁾

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_k \\ \bar{y}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_k^s \\ \bar{C}_k^s \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \bar{D}_k \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (57)$$

の行列 $\bar{D}_k$ のランクを表わす(注 1)。また各段で得られる $\bar{C}_k^s$ をまとめて $[\bar{C}_0^s, \bar{C}_1^s, \dots, \bar{C}_{d-1}^s]' = \bar{C}^s$ と書くと、 $\bar{C}^s$ は 1 次独立であるから

$$\text{rank } \bar{C}_k^s = m - \text{rank } \bar{D}_k \quad k = 0, 1, \dots, d-1$$

である。これを用いて

$$\text{rank } \bar{C}^s = md - \sum_{k=0}^{d-1} q_k \quad (58)$$

(注 1) d は Silverman⁹⁾ の記号 α に一致し、また係数 $\bar{C}_k, \bar{C}_k$ は前出の記号との混乱をさけるため $\bar{C}_k^s, \bar{C}_k^s$ とした。

となる。(58)式を(56)式に代入すると

$$\text{rank } M_d = (d+1)m - \text{rank } \tilde{C}^* \quad (59)$$

であり一意に決まるから、逆システムの次数 q は

$$q = n + \sum_{i=1}^m d_i - \text{rank } \tilde{C}^* \quad (60)$$

である。($n - \text{rank } \tilde{C}^*$) は不変零点の数に一致するので補題5が成立する。(Q. E. D.)

《定理5》 m 入力 m 出力系において、入力を再構成するのに必要な微分器の数に関して、つぎの関係が成り立つ。

(Silverman の逆システムの場合)

≤ (最小積分逆システムの場合)

≤ (L 積分逆システムの場合)

(証明) 先の関係は(59)式から、 $\tilde{D}^*(s)$ の次数を ρ とすると $\rho = \text{rank } M_d - m - \sum_{i=1}^m (d - d_i)$ であるので

$\rho = -\text{rank } \tilde{C}^* + \sum_{i=1}^m d_i$ となる。 $\rho \geq 0$ であるから

$$\sum_{i=1}^m d_i \geq \text{rank } \tilde{C}^* \quad (61)$$

が成り立ち、(61)式の右辺はSilvermanの逆システムに必要な微分器の個数に一致することから容易にわかる。条件式(4)が成立すれば $\rho = 0$ となって等号が成り立つ。

2番目の関係は、おのおのの逆システムの定義から明らかである。(Q. E. D.)

5. 結 言

最小積分逆システムの低次元化について考察し、その一手法を示した。同一入出力数の場合や条件 $\text{rank } C^* = m$ が成立する場合には、最小次数が決定されることを示した。またこの場合の α 微分最小次元逆システムとの関連を明らかにすると共に、最小積分逆システムの性質、定理3、定理5を明らかにした。これらの結果から積分逆システムは一般に漸近安定となりえず、次数も高く、入力を再現するための微分器も多く必要であることが推察される。今後の課題として、上述のことを一般的に示すことおよび条件なしで

最小積分逆システムの最小次数を決定することが残されている。

参 考 文 献

- 1) B. C. Moore and L. M. Silverman: Model Matching by State Feedback and Dynamic Compensation, IEEE Trans., **AC-17-5**, 491/497 (1972)
- 2) L. M. Silverman: Decoupling with State Feedback and Precompensation, IEEE Trans., **AC-15-5**, 487/489 (1970)
- 3) L. M. Silverman: Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans., **AC-14-3**, 270/276 (1969)
- 4) L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem, SIAM. J. Control, **9-2**, 199/233 (1971)
- 5) H. K. Sain and J. L. Massy: Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems, IEEE Trans., **AC-14-2**, 141/149 (1969)
- 6) P. Dorato: On the Inverse of Linear Dynamical Systems, IEEE Trans., **SSC-5-1**, 43/48 (1969)
- 7) P. J. Moylan: Stable Inversion of Linear Systems, IEEE Trans., **AC-22-1**, 74/78 (1977)
- 8) 中溝, 小林: 微分器の数に制限のある低次元逆システム, 計測自動制御学会論文集, **16-1**, 35/41 (1980)
- 9) G. Bengtsson: Minimal System Inverses for Linear Multivariable Systems, J. Math. Anal. Appl., **46**, 261/274 (1974)
- 10) F. M. Yuan: Minimal Dimension Inverses of Linear Sequential Circuits, IEEE Trans., **AC-20-1**, 42/52 (1975)
- 11) 神山, 古田: 最小積分逆システムに関する研究, 計測自動制御学会論文集, **12-3**, 245/250 (1976)
- 12) S. Kamiyama and K. Furuta: Integral Invertibility of Linear Time-Invariant Systems, Int. J. control, **25-3**, 403/412 (1977)
- 13) H. Kimura: Linear Function Observer of Mixed-Type, Int. J. Control, **28**, 441/455 (1978)
- 14) 中溝, 中辻: 線形関数観測器のパラメータ表示, Dynamical System Theory シンポジウム資料, 171/176 (1978)
- 15) 中溝, 小林: 未知入力系の観測器の設計, 第2回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 69/72 (1979)
- 16) 森, 伊藤: 時不変線形系の逆システム, 計測自動制御学会論文集, **14-5**, 494/498 (1978)
- 17) S. P. Panda: Comments on "Inversion of Multivariable Linear Systems", IEEE Trans., **AC-15-5**, 489/490 (1970)