時変自己回帰系追従のための高速逐次アルゴリズム

山田正史*・門田良実*・広岡正剛*・有本卓*

Fast Recursive Algorithm for Tracking Time-Varying Autoregressive Models

Masashi YAMADA*, Yoshimi MONDEN*, Masatake HIROOKA* and Suguru ARIMOTO*

In this paper we shall propose a fast recursive algorithm for tracking time-varying autoregressive models by the direct use of observed data sequences. Though this algorithm consisting of a triple of recurrences (order-ascending, descending and time-updating one), in form resembles Morf's algorithm, it is also valid for tracking time-varying autoregressive models in contrast to Morf's one. It further wins an advantage over the usual adaptive filtering algorithm in that it can track not only fast time-varying model parameters but also their orders based on Akaike's information criterion. Finally a result of computer simulation will be given to illustrate the efficiency of this algorithm.

1. はじめに

時系列データの自己回帰 (AR) モデルへのあてはめは、デジタル信号処理における重要な手法の一つであり、システムの動特性の解析、スペクトル推定、地質構造の解析などにおける predictive deconvolution など、多くの分野で広く用いられている^{1),2)}。通常、時系列の定常性とエルゴード性の仮定のもとに、時不変な AR モデルの同定が行われるが、時系列の統計的性質が時間とともに変化するような場合には、時変 AR モデルとして扱う必要があり、これまでも最急降下法を用いた adaptive digital filter の研究が行われている³⁾。他方 Morf らは、時間窓 $[0, T]$ における (T は現時刻) 予測 2 乗誤差の総和を最小にするような AR モデルを考え、それらの次数および時刻を更新するための逐次アルゴリズムを導出した⁴⁾。しかしそれは時刻に比例した時間窓をもつため、本質的には時不変な AR モデル同定のためのものとなっている。↗

↘そこで本論文では、時間窓の長さを一定にすることにより、時変 AR モデルの次数、係数および入力分散などを、出力データから adaptive に求めるための高速逐次アルゴリズムを導き、数値例によりその有効性を示すことにする。

このアルゴリズムは、AR 次数昇降のための逐次関係式と時刻更新のための逐次式とからなり、従来の adaptive digital filter に比して、AIC 規範などによるモデルの次数追従も可能となる。しかし必要な記憶容量と計算手法の面では多少劣るが、それも専用のハードウェアを備えることにより克服されるであろう。このアルゴリズムは、音声などの実時間処理あるいは実際のプラントの異常診断などの分野において有力な方法となるものと思われる。

2. 問題の設定

白色雑音により駆動される時変 AR モデルは、その次数・係数ともに十分ゆるやかに変化するものとし、その p 変数出力 $\{x_t\}$ は簡単のため、 $x_t=0, t<0$ また平均 0 と仮定しておく。この時刻 T の AR モデル

$$x_T + a_1^T x_{T-1} + \dots + a_m^T x_{T-m} = e_T$$

はつぎの線形予測問題を解くことにより求められる。すなわち、この AR モデルが時不変とみなせるような時間区間を $[S, T]$ とし、 $t \in [S, T]$ における予測値

$$\hat{x}_t^{TS} = -(a_1^{TS} x_{t-1} + \dots + a_m^{TS} x_{t-m}) \quad (1)$$

およびその予測誤差

$$e_t^{TS} = x_t - \hat{x}_t^{TS} = x_t + a_1^{TS} x_{t-1} + \dots + a_m^{TS} x_{t-m} \quad (2)$$

に対して、時刻 S から時刻 T までの予測 2 乗誤差の総和を最小にするようその係数行列 $(a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS})$ を決めることにする。

$$\min_{(a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS})} \sum_{t=S}^T e_t^{TS} e_t^{TS} = \min_{(a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS})} (I_p, a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS}) R_{mTS} (I_p, a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS})^T \cdot T \cdot [(I_p, a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS}) R_{mTS} (I_p, a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS})] \quad (3)$$

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

(Received April 16, 1980)

(Revised October 13, 1980)

ただし

$$R_{mTs} = \sum_{t=S}^T (x_t', \dots, x_{t-m}') (x_t', \dots, x_{t-m}')' \quad (4)$$

R_{mTs} が正定なら最小化問題 (3) は唯一の解をもち、それはつぎの“正規方程式”

$$(I_p, a_1^{TS}, \dots, a_m^{TS}) R_{mTs} = (\delta^A_{mTs}, 0, \dots, 0) \quad (5)$$

を解くことにより求めることができる。ここで δ^A_{mTs} は

$$\delta(R_{mTs}) = \begin{pmatrix} r_{11}^{TS} & \dots & r_{1m}^{TS} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1}^{TS} & \dots & r_{mm}^{TS} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{00}^{TS} & \dots & r_{0m-1}^{TS} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m-1,0}^{TS} & \dots & r_{m-1,m-1}^{TS} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{pmatrix} x_{S-1} & x_T \\ \vdots & \vdots \\ x_{S-m} & x_{T-m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{S-1} & x_T \\ \vdots & \vdots \\ x_{S-m} & x_{T-m+1} \end{pmatrix}' \quad (8)$$

となり、その階数はたかだか 2 であることから、(5) 式は一般化された LWR 法を用いて逐次かつ高速に解くことができることがわかる。この逐次操作は AR 次数に関するものであるが、移行差行列の性質をうまく利用すれば、時刻に対する逐次操作も可能となる。ここで $S=T-N+1$ とおけば、長さ N の時間窓でもって時変 AR モデルを追従する問題に、また $S=0$ ならば、データ長に伴い時不変 AR モデルをより精度よく求める問題になる。両者の相異は、移行差行列の階数の違いだけで他の構造的性質はまったく同じであるので、以後 S を省略して、たとえば R_{mTs} を R_{mT} のように書き表わすことにする。

3. 逐次アルゴリズム

前章で導かれた方程式

$$A_{mT} R_{mT} = [\delta^A_{mT}, 0, \dots, 0]$$

ただし $A_{mT} \triangleq [I_p, a^T_{1m}, \dots, a^T_{mm}]$

は共分散行列 R_{mT} および、その移行差行列に関するつぎの性質をうまく用いることによって、次数と時刻について逐次に解くことができる。

$$\begin{aligned} R_{mT} &= \begin{bmatrix} r^{T00} & \dots & r^{T0m} \\ \vdots & & \vdots \\ r^{Tm0} & \dots & r^{Tmm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{m-1T} & r^{T0m} \\ r^{Tm0} & r^{Tmm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r^{T00} & \dots & r^{T0m} \\ \vdots & & \vdots \\ r^{Tm0} & R_{m-1T-1} \end{bmatrix} \quad (9) \\ &= R_{mT-1} + D_{m+1T} \Sigma D'_{m+1T} \\ D_{m+1T} &= \begin{bmatrix} d_1^T \\ \vdots \\ d_{m+1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{mT} \\ d_{m+1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^T \\ D_{mT-1} \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

(5') 式を逐次に解くために、つぎの補助的な方程式

λ は最適な予測誤差の 2 乗総和で、 $\delta^A_{mTs}/(T-S+1)$ は白色入力の分散の推定値である。かくして (5) 式を解くことにより、時刻 T における時変 AR モデルは

$$x_T + a_1^{TS} x_{T-1} + \dots + a_m^{TS} x_{T-m} = e_T \quad (6)$$

のように与えられる。(5) の方程式を解くには一般に R_{mTs} の逆行列を求める必要がある。しかしながら、共分散行列 $R_{mTs} = (r_{ij}^{TS})$, $r_{ij}^{TS} \in R^{p \times p}$, $i, j=0, 1, \dots, m$ の移行差行列は

λ を考え、それらの方程式の解に対する関係式を導くことにする。

$$B_{mT} R_{mT} = [0, \dots, 0, \delta^B_{mT}] \quad (11)$$

$$C_{mT}^T R_{m-1T-1} = \Delta_{mT} D'_{mT} \quad (12)$$

$$\text{ただし } C_{mT} D_{mT} - \Delta_{mT} \Sigma = I_p \quad (13)$$

$$\begin{cases} B_{mT} = [b^T_{mm}, \dots, b^T_{1m}, I_p] \\ C_{mT} = [c^T_{1m}, \dots, c^T_{mm}] \\ \rho: R_{mT} \text{ の移行差階数.} \end{cases}$$

(11) 式の B_{mT} は x_t の後進予測誤差フィルタに対応し、(12) 式の C_{mT} は R_{mT} がテプリッツ行列でないために新たに加えられるパラメータ行列である。

【補題 1】 (5'), (11), (12) 式の解に対し、つぎの関係式が成立する。

$$\begin{cases} A_{mT} = [A_{m-1T}, 0] + a^T_{mm} [0, B_{m-1T-1}] \\ \delta^A_{mT} = [I - a^T_{mm} b^T_{mm}] \delta^A_{m-1T} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} B_{mT} = [0, B_{m-1T-1}] + b^T_{mm} [A_{m-1T}, 0] \\ \delta^B_{mT} = [I - b^T_{mm} a^T_{mm}] \delta^B_{m-1T-1} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} A_{mT-1} = A_{mT} + \alpha_{mT-1} [0, C_{mT-1}] \\ \delta^A_{mT-1} = [I - \alpha_{mT-1} c^T_{m+1} \alpha_{m+1}] \delta^A_{mT} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} C_{m+1T} = [0, C_{mT-1}] + c^T_{1m+1} A_{mT} \\ \Delta_{m+1T} = [I - c^T_{m+1} \alpha_{mT-1}] \Delta_{mT-1} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} B_{mT-1} = B_{mT} + B_{mT-1} [C_{mT}, 0] \\ \delta^B_{mT-1} = [I - \beta_{mT-1} c^T_{m+1} \beta_{m+1}] \delta^B_{mT} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} C_{m+1T} = [C_{mT}, 0] + c^T_{m+1} \beta_{m+1} B_{mT} \\ \Delta_{m+1T} = [I - c^T_{m+1} \beta_{m+1}] \Delta_{mT} \end{cases} \quad (19)$$

(証明) (5'), (9) ~ (12) 式からつぎの等式が得られる。

$$\begin{cases} [A_{m-1T}, 0] R_{mT} = [\delta^A_{m-1T}, 0, \dots, 0, \pi^A_{m-1T}] \\ [0, B_{m-1T-1}] R_{mT} \\ = [\pi^B_{m-1T-1}, 0, \dots, 0, \delta^B_{m-1T-1}] \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} A_{mT}R_{mT-1}=[\delta^A_{mT}, 0, \dots, 0]+\varphi^A_{mT}D'_{m+1T} \\ [0, C_{mT-1}]R_{mT-1} \\ =[\varphi^C_{mT-1}, 0, \dots, 0]+\Delta_{mT-1}D'_{m+1T} \quad (21) \\ B_{mT}R_{mT-1}=[0, \dots, 0, \delta^B_{mT}]+\eta^B_{mT}D'_{m+1T} \\ [C_{mT}, 0]R_{mT-1}=[0, \dots, 0, \eta^C_{mT}]+\Delta_{mT}D'_{m+1T} \quad (22) \end{cases}$$

上の三対の等式は、 $\delta^A, \delta^B, \Delta'$ が正則ならば互いに π', φ', η' を消去することができる。すなわち、

$$\begin{cases} a^T_{mn}=-\pi^A_{m-1T}\delta^B_{m-1T-1} \\ b^T_{mn}=-\pi^B_{m-1T-1}\delta^A_{m-1T-1} \quad (23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{mT-1}=-\varphi^A_{mT}\Delta^{-1}_{mT-1} \\ c^T_{1m+1}=-\varphi^C_{mT-1}\delta^A_{mT-1} \quad (24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{mT-1}=-\eta^B_{mT}\Delta_{mT-1} \\ c^T_{m+1m+1}=-\eta^C_{mT}\delta_{mT-1} \quad (25) \end{cases}$$

とおくと(14)~(19)式が得られる。あとは、(17), (19)式で求められる C_{m+1T}, Δ_{m+1T} が(13)式の条件を満たすことを示せばよい。 C_{mT-1}, Δ_{mT-1} が(13)式を満たすとする、(17), (24)式より

$$\begin{aligned} C_{m+1T}D_{m+1T} &= C_{mT-1}D_{mT-1}+c^T_{1m+1}A_{mT}D_{m+1T} \\ &= I+\Delta_{mT-1}\Sigma+c^T_{1m+1}\varphi^A_{mT}\Sigma \\ &= I+\Delta_{m+1T}\Sigma \end{aligned}$$

同様に、 C_{mT}, Δ_{mT} が(13)式を満たせば C_{m+1T}, Δ_{m+1T} も(13)式を満足する。ゆえに、ある時刻 T_0 において $\Delta_{00}=-\Sigma$ とおけば任意の時刻、次数に対して(13)式は満たされている。(証明終)

補題1の関係をうまく組み合わせることによって逐次関係式を導くことができるが、つぎの補題2は、この逐次関係式において本質的な役割を果たすものであり、LWR アルゴリズムにおける Burg の関係に対応する。

【補題2】(20)~(22)式においてつぎの等式が成り立つ。

$$\pi^A_{m-1T}=\pi^{B'}_{m-1T-1} \quad (26)$$

$$\varphi^A_{mT}=\varphi^{C'}_{mT-1} \quad (27)$$

$$\eta^B_{mT}=\eta^{C'}_{mT} \quad (28)$$

(証明) (26), (27)式を示す。(28)式も同様である。

次式は(9), (13)式を用いて(5)', (11), (12)式を書き直したものである。

$$\begin{cases} \bar{A}_{mT}R_{m-1T-1}=-[r^T_{01}, \dots, r^T_{0m}] \quad (5)' \\ \bar{B}_{mT}R_{m-1T}=-[r^T_{m0}, \dots, r^T_{mm-1}] \quad (11)' \\ C_{mT}R_{m-1T}=-\Sigma D'_{mT} \quad (12)' \end{cases}$$

$$\text{ただし } \begin{cases} A_{mT}=[I, \bar{A}_{mT}] \\ B_{mT}=[\bar{B}_{mT}, I] \end{cases}$$

$$\pi^A_{m-1T}=\pi^{B'}_{m-1T-1}:$$

$$\begin{aligned} \pi^A_{m-1T} &= A_{m-1T}[r^T_{m0}, \dots, r^T_{mm-1}]' \\ &= -A_{m-1T}R_{m-1T}\bar{B}'_{mT} \quad (11)' \text{より} \end{aligned}$$

$$= -\delta^A_{m-1T}D^{T'}_{mm} \quad (5)' \text{より}$$

$$= \pi^{B'}_{m-1T-1} \quad (23) \text{より}$$

$$\varphi^A_{mT}=\varphi^{C'}_{mT-1}:$$

$$\varphi^A_{mT}=A_{mT}D_{m+1T}\Sigma$$

$$= -A_{mT}R_{mT}C'_{m+1,T} \quad (12)' \text{より}$$

$$= -\delta^A_{mT}C^{T'}_{1m} \quad (5)' \text{より}$$

$$= \delta^{C'}_{mT-1} \quad (24) \text{より}$$

(証明終)

補題1, 補題2の関係式からつぎの逐次アルゴリズムが得られる。

《定理》アダプティブなARモデル同定のための逐次アルゴリズム

(5)', (11), (12)の方程式は、以下に示す3種の逐次関係式によって逐次に解くことができる。ここに記憶すべきパラメータは

$$A_{mT}, B_{mT}, C_{mT}, \delta^A_{mT}, \delta^B_{mT}, \Delta_{mT}, \bar{\varphi}^C_{mT}, [r^T_{00}, \dots, r^T_{0m}], D_{m+1T},$$

であり、また、各パラメータの初期条件は

$$\begin{cases} A_{0N}=B_{0N}=I, & \delta^A_{0N}=\delta^B_{0N}=r^N_{00} \\ \Delta_{0N}=-\Sigma, & \bar{\varphi}^C_{0N}=0 \end{cases}$$

で与えられる。

1) 次数を $(m-1)$ 次から m 次上げる場合

(Step 1) つぎの量を計算する。

$$\bar{\pi}=B_{m-1T}[r^T_{01}, \dots, r^T_{0m}]' \quad (29)$$

$$\eta^B_{m-1T}=B_{m-1T}D_{mT}\Sigma$$

$$\beta_{m-1T-1}=-\eta^B_{m-1T}\Delta^{-1}_{m-1T}$$

(Step 2) 係数行列を求める。

$$\begin{aligned} a^T_{mm} &= -[\bar{\pi}+\beta_{m-1T-1}\bar{\varphi}^C_{m-1T}]'[\delta^B_{m-1T} \\ &\quad +\beta_{m-1T-1}\eta^{B'}_{m-1T}]^{-1} \quad (30) \end{aligned}$$

$$b^T_{mm}=-[\bar{\pi}+\beta_{m-1T-1}\bar{\varphi}^C_{m-1T}]\delta^{A-1}_{m-1T}$$

$$c^T_{mm}=-\eta^{B'}_{m-1T}\delta^{B-1}_{m-1T}$$

(Step 3) パラメータを更新する。

$$\begin{cases} \delta^A_{mT}=[I-a^T_{mm}b^T_{mm}]\delta^A_{m-1T} \\ \delta^B_{mT}=[I-b^T_{mm}a^T_{mm}][\delta^B_{m-1T} \\ \quad +\beta_{m-1T-1}\eta^{B'}_{m-1T}] \\ \Delta_{mT}=[I-c^T_{mm}\beta_{m-1T-1}]\Delta_{m-1T} \\ \bar{\varphi}^C_{mT}=\bar{\varphi}^C_{m-1T}+c^T_{mm}\bar{\pi} \quad (31) \end{cases}$$

$$B_{m-1T-1}=B_{m-1T}+\beta_{m-1T-1}[C_{m-1T}, 0]$$

$$\begin{cases} A_{mT}=[A_{m-1T}, 0]+a^T_{mm}[0, B_{m-1T-1}] \\ B_{mT}=[0, B_{m-1T-1}]+b^T_{mm}[A_{m-1T}, 0] \\ C_{mT}=[C_{m-1T}, 0]+c^T_{mm}B_{m-1T} \end{cases}$$

2) 次数を m 次から $(m-1)$ 次下げる場合

(Step 1) 補助パラメータの計算を行う。

$$\delta^B_{m-1T-1}=[I-b^T_{mm}a^T_{mm}]\delta^B_{mT}$$

$$\beta_{m-1T-1}=\delta^B_{m-1T-1}C_{mm}^T\Delta_{mT}^{-1}$$

$$\begin{aligned} [0, B_{m-1T-1}] &= [I-b^T_{mm}a^T_{mm}]^{-1}\{B_{mT} \\ &\quad -b^T_{mm}A_{mT}\} \quad (32) \end{aligned}$$

(Step 2) パラメータを更新する.

$$\begin{aligned}\delta^A_{m-1T} &= [I - a^T_{mm} b^T_{mm}]^{-1} \delta^A_{mT} \\ \delta^B_{m-1T} &= [I - b^T_{mm} a^T_{mm}]^{-1} \delta^B_{m-1T-1} \\ \Delta_{m-1T} &= [I - \beta_{m-1T-1} c^T_{mm}]^{-1} \Delta_{mT} \\ \bar{\varphi}^C_{m-1T} &= [I - c^T_{mm} \beta_{m-1T-1}]^{-1} [\bar{\varphi}^C_{mT} \\ &\quad + c^T_{mm} \delta^B_{m-1T-1} a_{mm} T'] \quad (33) \\ [A_{m-1T}, 0] &= [I - a^T_{mm} b^T_{mm}]^{-1} \{A_{mT} - a^T_{mm} B_{mT}\} \\ B_{m-1T} &= [I - \beta_{m-1T-1} c^T_{mm}]^{-1} \{B_{m-1T-1} \\ &\quad - \beta_{m-1T-1} C_{mT}\} \\ [C_{m-1T}, 0] &= [I - c^T_{mm} \beta_{m-1T-1}]^{-1} \{C_{mT} \\ &\quad - c^T_{mm} B_{m-1T-1}\}\end{aligned}$$

3) 時間推移に対し AR パラメータを更新する場合

(Step 1) AR パラメータを更新する.

$$\alpha_{mT-1} = d_1^T - \bar{\varphi}^C_{mT-1} \Delta_{mT-1}^{-1} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \delta^A_{mT} = \delta^A_{mT-1} + \alpha_{mT-1} \Delta_{mT-1} \alpha'_{mT-1} \\ A_{mT} = A_{mT-1} - \alpha_{mT-1} [0, C_{mT-1}] \end{cases} \quad (35)$$

(Step 2) 補助パラメータの計算を行う.

$$\begin{aligned}c^T_{1m+1} &= \Delta_{mT-1} \alpha'_{mT-1} \delta^A_{mT-1} \\ \begin{cases} \Delta_{m+1T} &= [I - c^T_{1m+1} \alpha_{mT-1}] \Delta_{mT-1} \\ C_{m+1T} &= [0, C_{mT-1}] + c^T_{1m+1} A_{mT} \end{cases} \quad (36)\end{aligned}$$

(Step 3) 残りのパラメータを更新する.

$$\begin{aligned}\beta_{mT-1} &= \delta^B_{mT-1} c^T_{m+1m+1} \Delta_{m+1T}^{-1} \\ \begin{cases} \delta^B_{mT} &= [I - \beta_{mT-1} c^T_{m+1m+1}]^{-1} \delta^B_{mT-1} \\ \Delta_{mT} &= [I - c^T_{m+1m+1} \beta_{mT-1}]^{-1} \Delta_{m+1T} \\ \bar{\varphi}^C_{mT} &= C_{mT} [r^{T_{01}}, \dots, r^{T_{0m}}]' \end{cases} \quad (37) \\ B_{mT} &= [I - \beta_{mT-1} c^T_{m+1m+1}]^{-1} \{B_{mT-1} \\ &\quad + \beta_{mT-1} C_{m+1T}\} \\ [C_{mT}, 0] &= [I - c^T_{m+1m+1} \beta_{mT-1}]^{-1} \{C_{m+1T} \\ &\quad - c^T_{m+1m+1} B_{mT-1}\}\end{aligned}$$

(証明) これらの逐次関係式は補題 1, 補題 2 から容易に導くことができるので, 部分的に補足説明することにする.

1) (30), (31) 式を示す. $\bar{\varphi}^C_{mT}$ は (37) 式で定義されるが, 補題 1, 補題 2 から $\pi^B_{m-1, T-1}, \bar{\varphi}^C_{mT}$ はつぎのようにして求められる.

$$\pi^B_{m-1, T-1} = B_{m-1T-1} [r^{T_{01}}, \dots, r^{T_{0m}}] \quad (22) \text{ より}$$

$$= \{B_{m-1T} + \beta_{m-1T-1} [C_{m-1T}, 0]\} [r^{T_{01}}, \dots, r^{T_{0m}}] \quad (18) \text{ より}$$

$$= \bar{\pi} + \beta_{m-1T-1} \bar{\varphi}^C_{m-1T} \quad (29), (37) \text{ より} \quad (38)$$

$$\bar{\varphi}^C_{mT} = C_{mT} [r^{T_{01}}, \dots, r^{T_{0m}}] \quad (21) \text{ より}$$

$$= [C_{m-1T}, 0] + c^T_{mm} B_{m-1T} [r^{T_{01}}, \dots, r^{T_{0m}}] \quad (19) \text{ より}$$

$$= \bar{\varphi}^C_{m-1T} + c^T_{mm} \bar{\pi} \quad (29), (37) \text{ より}$$

2) (14) ~ (19) 式はつぎのように変形できる.

$$\begin{cases} [A_{m-1T}, 0] \\ = [I - a^T_{mm} b^T_{mm}]^{-1} \{A_{mT} - a^T_{mm} B_{mT}\} \end{cases} \quad (14)'$$

$$\begin{cases} [0, B_{m-1T-1}] \\ = [I - b^T_{mm} a^T_{mm}]^{-1} \{B_{mT} - b^T_{mm} A_{mT}\} \end{cases} \quad (15)'$$

$$\begin{cases} A_{m-1T} = [I - \alpha_{m-1T-1} c^T_{1m}]^{-1} \{A_{m-1T-1} \\ - \alpha_{m-1T-1} C_{mT}\} \end{cases} \quad (16)'$$

$$\begin{cases} [0, C_{m-1T-1}] = [I - c^T_{1m} \alpha_{m-1T-1}]^{-1} \{C_{mT} \\ - c^T_{1m} A_{m-1T-1}\} \end{cases} \quad (17)'$$

$$\begin{cases} B_{m-1T} = [I - \beta_{m-1T-1} c^T_{mm}]^{-1} \{B_{m-1T-1} \\ - c^T_{mm} C_{mT}\} \end{cases} \quad (18)'$$

$$\begin{cases} [C_{m-1T}, 0] = [I - c^T_{mm} \beta_{m-1T-1}]^{-1} \{C_{mT} \\ - \beta_{m-1T-1} B_{m-1T-1}\} \end{cases} \quad (19)'$$

つぎに補題 2 の (28) および (18), (19), (25) 式から

$$\begin{aligned}\beta_{m-1T-1} \Delta_{mT} &= \beta_{m-1T-1} [I - c^T_{mm} \beta_{m-1T-1}] \Delta_{m-1T} \\ &= [I - \beta_{m-1T-1} c^T_{mm}] \beta_{m-1T-1} \Delta_{m-1T} \\ &= [I - \beta_{m-1T-1} c^T_{mm}] \delta^B_{m-1T} c_{mm} T' \\ &= \delta^B_{m-1T-1} c_{mm} T'\end{aligned}$$

(26), (31), (38) 式より

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}^C_{mT} &= \bar{\varphi}^C_{m-1T} + c^T_{mm} \bar{\pi} \\ &= \bar{\varphi}^C_{m-1T} + c^T_{mm} [\pi^B_{m-1T-1} - \beta_{m-1T-1} \bar{\varphi}^C_{m-1T}] \\ &= [I - c^T_{mm} \beta_{m-1T-1}] \bar{\varphi}^C_{m-1T} + c^T_{mm} \pi^B_{m-1T-1} \\ &= [I - c^T_{mm} \beta_{m-1T-1}] \bar{\varphi}^C_{m-1T} - c^T_{mm} \delta^B_{m-1T-1} a_{mm} T'\end{aligned}$$

となり, (32), (33) 式が得られる.

3) (34), (35) 式を示す. (36) 式は (32) 式と同様にして導かれる. (24), (27), (37) 式を用いて

$$\begin{aligned}\alpha_{mT-1} &= -\bar{\varphi}^C_{mT-1} \Delta_{mT-1}^{-1} \\ &= -[\bar{\varphi}^C_{mT-1} - \Delta_{mT-1} d_1^T] \Delta_{mT-1}^{-1} \\ &= d_1^T - \bar{\varphi}^C_{mT-1} \Delta_{mT-1}^{-1}\end{aligned}$$

(21), (28) 式から

$$\begin{aligned}\delta^A_{mT} &= \delta^A_{mT-1} - \alpha_{mT-1} \bar{\varphi}^C_{mT-1} \\ &= \delta^A_{mT-1} - \alpha_{mT-1} [\bar{\varphi}^C_{mT-1} - \Delta_{mT-1} d_1^T] \\ &= \delta^A_{mT-1} - \alpha_{mT-1} \Delta_{mT-1} \alpha'_{mT-1} \quad (\text{証明終})\end{aligned}$$

1) の逐次関係式を用いて m 次の p 変数 AR モデルを同定する場合の計算手数は $0(3p^2(p+\rho)m^2/2)$, また, 3) の逐次関係式によって時刻の推移に対する AR パラメータの更新を行う場合は, 次数を m に固定すると $0(p^2+4p\rho+\rho^2)m$ となり, コレスキー法などの逐次形でない方法に比べ効率よく計算できることがわかる. さらにこれらの逐次アルゴリズムは, 演算の並列化が容易にできるため, 並列処理のためハードウェアを用いることにより, オンラインでの処理が実現できるものと考えられる.

同定に際して AR 次数を時系列に対応して追従させる場合には, AIC を適用することができる. AIC は時系列モデルの良さの基準であり, AR モデルに対しては次式で与えられ, この量の小さいモデルが良いと

$$AIC(m) = -N \log \{\det \delta^A_{mT}\} + 2p^2 m \quad (39)$$

判断される. AIC を用いて各時刻に次数を定めるに

は、まず AR パラメータを更新し、しかる後に隣り合わせた次数の AIC を求め、AIC が極小値となるまで逐次計算を続けてゆけばよい。

4. シミュレーション

逐次アルゴリズムの有効性を確かめるため、つぎの 1 変数 AR 系から発生させた時系列を用いて、計算機によるシミュレーションを行う。

$$\begin{cases} x_t - 2.40x_{t-1} + 2.97x_{t-2} \\ \quad - 2.48x_{t-3} + 1.42x_{t-4} \\ \quad - 0.53x_{t-5} + 0.10x_{t-6} = \varepsilon_t, & 0 \leq t \leq 6000 \\ x_t - 1.00x_{t-1} + 0.53x_{t-2} \\ \quad - 0.17x_{t-3} = \sqrt{10}\varepsilon_t, & 8000 \leq t \leq 12000 \\ E\{\varepsilon_t\} = 0 \\ E\{\varepsilon_{t+k}\varepsilon_t\} = \delta_{0k} \quad \delta_{0k}: \text{クロネッカーのデルタ} \end{cases}$$

6000 $\leq t \leq 8000$ では、AR 係数、ノイズ ε_t の分散を連続的に変化させた。

この時系列を用いて逐次アルゴリズムにより AR 係数、ノイズ分散、および AR 次数をアダプティブに同定した結果を Fig. 1 に示す。図中の実線は AR 係数、ノイズ分散の真値を表わし、数字、*印がその推定値である。たとえば、 $t=10000$ において同定された AR モデルは次式で与えられる。

$$x_t - 1.03x_{t-1} + 0.58x_{t-2} - 0.18x_{t-3} = \sqrt{9.74}\varepsilon_t$$

$t \leq 6000$, $t \geq 9000$ の定常域では、各パラメータの推定値は真値の付近に分布しており、定常時系列に対しては時間窓の長さ N (今の場合 $N=1000$) に応じてよい精度で推定されることがわかる。6000 $\leq t \leq 8000$ の遷移域においては、約 500 サンプルの遅れがあるものの、推定された AR 係数、ノイズ分散は真値を十分

よく追従していると言える。この遅れは時間窓の範囲内で時系列の特性が平均化されるために生ずるものであり、 N を小さく設定することによって改善することができる。しかし、 N を小さくすると、パラメータの推定値はばらつきが大きくなるため、 N の決定については、同定に際し事前に検討する必要があると思われる。また、この数値例では、AIC により各時刻に AR 次数の選択を行ったが、Fig. 1 のように、ほぼ真の次数に一致し、AR 次数の追従性をも確かめられた。

5. おわりに

本論文で述べた逐次アルゴリズムは、時間窓の長さ N の範囲内で時系列が定常とみなしうる場合には十分精度のよいパラメータ推定が行え、AIC によりモデル次数の最適化をも各時刻にできるものである。また、このアルゴリズムは、計算の途中で N を変化させることができるため、パラメータ推定の精度と追従性を状況に応じて調節することも可能である。逐次計算に要する手数はモデル次数を各時刻に最適化する場合も、本質的には次数の程度であり、逐次関係式を並列演算するハードウェアを用いれば、実時間処理ができるものと考えられる。

システムの入出力関係式を表わす ARMA 形モデルの同定に対しても、同様のアダプティブな逐次アルゴリズムにより、入出力データから各時刻に行うこともできるが、これらの AR モデル、ARMA 形モデルの逐次同定アルゴリズムは、今後のマイクロプロセッサや LSI の発展に伴い、物理的モデルをつくることができないような、大規模なシステムの解析あるいはプラントの異常診断などの分野での応用において重要なものとなってくるとと思われる。

参考文献

- 1) 赤池, 中川: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社
- 2) J. Makhoul: Linear Prediction; Tutorial Review, Proc. IEEE, **63**-4, 561/580 (1975)
- 3) B. Widrow, et al.: Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter, Proc. IEEE, **69**, 1151/1162 (1976)
- 4) M. Morf, et al.: Efficient Solution of Covariance Equations for Linear Prediction, IEEE Trans., **ASSP-25**-5, 429/433 (1977)
- 5) B. Friedlander, et al.: New Inversion Formulas for Matrices Classified in Terms of Their Distance from Toeplitz Matrices, Linear Algebra and Its Applications Elsevier North-Holland (1978)
- 6) H. Akaike: Canonical Correlation Analysis of Time Series and the Use of An Information Criterion, System Identification, R.K. Mehra and D.G. Lainiotised., 27/96, Academic Press (1976)

Fig. 1 Simulation result of tracking a time-varying autoregressive model