離散時間線形表現系とアファイン力学系の関係[†]

新家 茂*・松尾 強**

Relation Between Discrete-Time Linear Representation Systems and Affine Dynamical Systems

Shigeru NIINOMI* and Tsuyoshi MATSUO**

We treat discrete-time systems in this paper. The purpose of this paper is to establish the relation between the canonical dynamical system, the canonical linear representation system and the canonical affine dynamical system which have the same behaviors.

We have already established the realization theorems of dynamical systems, linear representation systems and affine dynamical systems; that is, we obtained the definite canonical systems which realize any given input response map $a: U^* \rightarrow Y$, and proved that these canonical systems are unique up to isomorphisms in each category.

The linear representation systems are the dynamical systems whose state spaces are the linear representations of concatenation monoid U^* , i. e., LINEAR U^* -MODULES. The class of linear representation systems contains homogenous bilinear systems and K - Σ -automaton as subclasses.

On the other hand, the affine dynamical systems are defined as the dynamical systems whose state spaces are affine representations of U^* , i. e., AFFINE U^* -MODULES. This class contains linear systems and inhomogenous bilinear systems as subclasses.

Linear representation systems and affine dynamical systems are canonical iff they are quasi-reachable and distinguishable.

Canonical linear representation systems and canonical affine dynamical systems are not necessarily reachable as dynamical systems,

their state spaces are defined to be the linear hulls and the affine hulls of really reachable sets, respectively.

In this paper, we present the procedures to obtain a linear representation system from an affine dynamical system having the same behaviors, and vice versa. Then, we give the necessary and sufficient conditions for the systems obtained by the procedures to be canonical.

The procedure to construct the homogenous bilinear system from a biaffine system having the same behaviors has been already presented in the paper 8). But the homogenous bilinear systems constructed by this procedure are not necessarily canonical. Hence, their existence condition for the realization problem is not correct and we point out an error in the proof of the uniqueness theorem.

Our results establish the definite relation between the canonical homogenous bilinear system and the canonical inhomogenous bilinear system which have the same behaviors.

1. はじめに

本論文は離散時間系を扱う。われわれは、実現問題を、因果律を満たすブラックボックスの入出力データからその内部を記述するモデルを正準力学系、正準線形表現系、正準アファイン力学系というそれぞれの圏で具体的に見出し、それらが二つ以上存在すれば、それらはおおのの圏において同形であることを証明するものとする。このように定式化される実現問題に対し、対象とするブラックボックスのすべての実験手段 $\omega \in U^*$ に対する応答が観測データとして与えられる理想的実現問題と、一部の实验手段 $\omega \in U' \subset U^*$ に対する応答の観測データしか与えられない場合の部分実現問題とが考えられる。理想的実現問題に対し、長谷川、松尾^{2),4)}は力学系と線形表現系のクラス、また、松尾、上田³⁾はアファイン力学系のクラスの実現定理

[†] Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 53・12)

* 労災義肢センター 名古屋市港区港明 1-10-5

** 名古屋大学工学部 名古屋市中区不老町

* Labor Accidents Prosthetics & Orthotics Center, Nagoya

** Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya (Received June 28, 1980)

(Revised September 30, 1980)

を与えた。すなわち、因果律を満たす任意のブラックボックス（入力応答関数）の内部を記述するモデルが正準力学系、正準線形表現系そして正準アファイン力学系の圏において、おのおの存在し、それらはおのの圏において同形を除いてただ一つであることを示した。したがって、ブラックボックスの完全な観測データが与えられたとき、われわれはそのブラックボックスの内部を記述する三つのモデル、すなわち、正準力学系、正準線形表現系、そして正準アファイン力学系を具体的に得ることができる。それらは、一般に異なっている。そこで、われわれは本論文においてこれらの正準実現系の関係を明確にする。

線形表現系とアファイン力学系のクラスは（一般）力学系の部分クラスとして定義されたものであるが、それらは異なったものであり、それらの間に包含関係はない。本稿では、正準線形表現系からそれと行動が等しい正準アファイン力学系を導出する手順と、その逆の手順を考える。文献 2) において、線形表現系のクラスが斉次双線形系と $K-\Sigma$ オートマトン¹¹⁾を含むこと、文献 6) においてアファイン力学系のクラスが非斉次双線形系と線形系を含むことが記述されている。非斉次双線形系から、それと行動が等しい斉次双線形系を導く手順は、T. J. Tarn & S. Nonoyama⁹⁾ により紹介されているが、この手順により与えられる斉次双線形系は必ずしも正準であるとは限らない。かれらは、この事実を無視しているため文献 8) の一意性の証明には誤りがある。本論文の例 5 はその反例になる。

2. 力学系

本節では、文献 4) で確立された力学系に関する基礎的事項とその実現定理を記述する。定理、補題などの証明と詳細については文献 4) を参照されたい。

本論文では、入力値集合を U とし、出力値集合を体 K 上の線形空間 Y とする。また、入力関数の集合である連鎖モノイド、すなわち、 U 上の自由モノイドを U^* により表わす。任意の $\omega \in U^*$ は $\omega = u_n | u_{n-1} | \dots | u_1, u_i \in U, n \in \mathbb{N}$, である。ただし、 $\mathbb{N}$ は自然数の集合である。

写像 $a: U^* \rightarrow Y$ を入力応答関数といい、すべての入力応答関数の集合を $F(U^*, Y)$ により表わす。

【定義 1】 状態集合 X とモノイド射 $\varphi: U^* \rightarrow F(X)$ の組 (X, φ) を U^* -モジュールという。ただし、 $F(X)$ は、すべての写像 $f: X \rightarrow X$ の集合である。

U^* -モジュール (X, φ) と初期状態 $x^0 \in X$, そして、写像 $h: X \rightarrow Y$ の組 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ を力学系とい

う。 h は出力機構といわれる。 σ の行動は入力応答関数 $a_\sigma: U^* \rightarrow Y; \omega \mapsto h\varphi(\omega)x^0$ である。このとき、 σ は a_σ を実現するといわれる。□

(注意) 力学系 σ には、入力写像 $G^+: U^* \rightarrow X; \omega \mapsto \varphi(\omega)x^0$ と観測写像 $H: X \rightarrow F(U^*, Y); x \mapsto [\omega \mapsto h\varphi(\omega)x]$ が定義される。ここで、 $A = HG^+$ とすれば、 $a_\sigma = A(1)$ である。□

【定義 2】 力学系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ は、状態集合 X が可到達集合 $\{\varphi(\omega)x^0 | \omega \in U^*\}$ と一致する時、可到達といわれ、任意の $x_1, x_2 \in X$ に対し、 $h\varphi(\omega)x_1 = h\varphi(\omega)x_2, \forall \omega \in U^*$ ならば $x_1 = x_2$ が成立するとき、可識別といわれる。可到達で可識別なとき、 σ は正準系といわれる。

(注意) 力学系 σ は入力写像 G^+ が全射のとき、可到達となり、観測写像 H が単射のとき、可識別となる。□

【定義 3】 U^* -モジュール $(X_1, \varphi_1), (X_2, \varphi_2)$ に対し、写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は、 $f\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega)f, \forall \omega \in U^*$ を満たすとき、 U^* -射 $(X_1, \varphi_1) \rightarrow (X_2, \varphi_2)$ といわれる。力学系 $\sigma_1 = ((X_1, \varphi_1), x_1^0, h_1), \sigma_2 = ((X_2, \varphi_2), x_2^0, h_2)$ に対し、 U^* -射 $f: (X_1, \varphi_1) \rightarrow (X_2, \varphi_2)$ は $f x_1^0 = x_2^0, h_1 = h_2 f$ を満たすとき、力学系射 $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ といわれる。力学系射 f は、それを定義する写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が全単射のとき、同形射といわれる。□

【定義 4】 状態集合 X と写像 $F: U \rightarrow F(X)$ の組 (X, F) を U -作用という。 U -作用 $(X, F_1), (X, F_2)$ に対し、写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は、 $f F_1(u) = F_2(u)f, \forall u \in U$ を満たすとき、 U -射といわれる。

【補題 1】 写像 $F: U \rightarrow F(X)$ とモノイド射 $\varphi: U^* \rightarrow F(X)$ は、対応 $F \mapsto \varphi, \varphi(\omega) = F(u_n)F(u_{n-1}) \dots F(u_1), \omega = u_n | u_{n-1} | \dots | u_1 \in U^*$, により 1 対 1 に対応する。ただし、逆対応 $\varphi \mapsto F$ は、 $F(u) = \varphi(u), \forall u \in U$, により与えられる。

(注意) 補題 1 により U^* -モジュール (X, φ) は U -作用 (X, F) により表わすことができる。

【補題 2】 $(X_1, \varphi_1), (X_2, \varphi_2)$ を U^* -モジュール、 $(X_1, F_1), (X_2, F_2)$ をそれらに対応する U -作用とする。写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が U^* -射 $(X_1, \varphi_1) \rightarrow (X_2, \varphi_2)$ であることと、 U -射 $(X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ であることは同等である。□

補題 1 により、力学系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ は組 $((X, F), x^0, h)$ により同等に表現される。ただし、 $F: U \rightarrow F(X)$ はモノイド射 φ に対応する写像である。

《定理 1》⁴⁾ 任意の入力応答関数 $a: U^* \rightarrow Y$ を実現する正準力学系が必ず存在する。 σ_1 と σ_2 を a を実現する正準力学系とする。このとき、唯一の全単射な

力学系射, すなわち同形射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ が存在する. $\square$

3. 線形表現系

本節では, 線形表現系の実現定理を中心に, 線形表現系の基礎的事項を記述する. 本節でも, 補題, 定理などの証明は省略する. 証明と詳細については文献 2) を参照されたい.

【定義 5】 X を体 K 上の線形空間, $\varphi: U^* \rightarrow L(X)$ をモノイド射とすると, 組 (X, φ) を線形 U^* -モジュールという. ただし, $L(X) = \{f: X \rightarrow X; \text{線形写像}\}$ である. 力学系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ は, (X, φ) が線形 U^* -モジュール, $h: X \rightarrow Y$ が線形写像であるとき, 線形表現系といわれる. $\square$

(注 1) 線形表現系 $\sigma = ((X, \varphi), x^0, h)$ の観測写像 $H: X \rightarrow F(U^*, Y)$ は線形写像であり, 線形観測写像といわれる. $\square$

(注 2) モノイド射 $\varphi: U^* \rightarrow L(X)$ と, 写像 $F: U \rightarrow L(X)$ とは補題 1 の対応により, 1 対 1 に対応する. 組 (X, F) は線形 U -作用といわれ⁵⁾, 線形表現系 σ は, 状態空間に (X, F) を用いた組 $((X, F), x^0, h)$ により同等に表現される. $\square$

【定義 6】 線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ は, 状態集合 X が可到達集合 $\{\varphi(\omega)x^0 | \omega \in U^*\}$ の線形包であるとき, 擬可到達といわれる. 擬可到達で可識別な線形表現系 σ は正準系といわれる.

(注意) 線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ の系方程式は次式により記述される.

$$\begin{cases} x(0) = x^0, & t \in N, \omega(t) \in U \\ x(t+1) = F(\omega(t))x(t), & x(t) \in X \\ \gamma(t) = h x(t), & \gamma(t) \in Y \end{cases} \quad \square$$

【定義 7】 線形表現系 $\sigma_1 = ((X_1, F_1), x_1^0, h_1)$ と $\sigma_2 = ((X_2, F_2), x_2^0, h_2)$ に対し, 線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は, U -射 [U^* -射] の条件を満たすとき, 線形 U -射: $(X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ [線形 U^* -射: $(X_1, \varphi_1) \rightarrow (X_2, \varphi_2)$] といわれ, 力学系射の条件, すなわち, $f F_1(u) = F_2(u) f, \forall u \in U, f x_1^0 = x_2^0, h_1 = h_2 f$ を満たすとき, 線形表現系射: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ といわれる. 線形表現系射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ は, $f: X_1 \rightarrow X_2$ が全単射なとき, 同形射といわれる. $\square$

(注意) 線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が U -射であることと, U^* -射であることは, 補題 2 により, 等しい. $\square$

【例 1】 文献 2), 例 (3.6) で考察された線形入力 U -作用 $(A(U^*), S_r)$ を考える. ただし, $A(U^*) = \{\lambda | \lambda$ は有限な台をもつ関数: $U^* \rightarrow K\}$ であり, $S_r: U \rightarrow L(A(U^*))$; $u \mapsto S_r(u) \left[\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_u[\omega_i] \right]$,
ただし $\lambda(\omega_i) \in K, \omega \neq \omega_i$ のとき $e_{\omega_i}(\omega) = 0, \omega = \omega_i$ の

とき $e_{\omega_i}(\omega) = 1$, である. このとき, 組 $\sigma_i = ((A(U^*), S_r), e_1, a_i)$ は擬可到達な線形表現系である. ただし, $a_i: A(U^*) \rightarrow Y$ は線形写像とする. $\square$

(注意) 組 $((A(U^*), S_r), e_1)$ は初期状態付き線形 U -作用²⁾ の圏の始対象である. $\square$

【定義 8】 線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ に対し, 線形写像 $G: A(U^*) \rightarrow X$ が, $G \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) G^+(\omega_i), \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \in A(U^*)$, により定義される. この写像 G を σ の線形入力写像という. ただし, 写像 $G^+: U^* \rightarrow X$ は σ の入力写像である. $\square$

【補題 3】 線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ が擬可到達となるための必要十分条件は, 線形入力写像 $G: A(U^*) \rightarrow X$ が全射となることである. $\square$

(注意) 線形表現系 σ が可識別であることと, 線形観測写像 $H: X \rightarrow F(U^*, Y)$ が単射であることは力学系の場合と同様に同等の条件である. $\square$

《定理 2》⁵⁾ 与えられた任意の入力応答関数 $a: U^* \rightarrow Y$ を実現する正準線形表現系が存在する. σ_1 と σ_2 を入力応答関数 a を実現する正準線形表現系とする. このとき, 唯一の同形射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ が存在する. $\square$

4. アファイン力学系

本節では, アファイン力学系に関する基礎的事項と, このクラスの実現定理を記述する. 本節でも, 前節と同様に, 補題, 定理などの証明は省略するので, 証明と詳細については文献 3), 6) を参照されたい.

【定義 9】 X^A をアファイン空間, $\varphi: U^* \rightarrow AM(X^A)$ をモノイド射とすると, 組 (X^A, φ) をアファイン U^* -モジュールという. ただし, $AM(X^A) = \{f: X^A \rightarrow X^A; \text{アファイン射}\}$ である. 力学系 $\sigma = ((X^A, \varphi), x^0, h)$ は (X^A, φ) がアファイン U^* -モジュール, $h: X^A \rightarrow Y^A$ がアファイン射であるとき, アファイン力学系といわれる. ただし, Y^A はアファイン空間 (Y, Y) である. $\square$

(注意) アファイン空間 X^A は, 台集合 X と線形空間 X との組 (X, X) により表わされる⁶⁾. 線形空間 Z は, 台集合を Z とすることにより, アファイン空間 (Z, Z) と考えられる. $\square$

【定義 10】 アファイン力学系 $\sigma_1 = ((X_1^A, \varphi_1), x_1^0, h_1)$, $\sigma_2 = ((X_2^A, \varphi_2), x_2^0, h_2)$ に対し, アファイン射 $f: X_1^A \rightarrow X_2^A$ は, U^* -射の条件, $f \varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega) f, \forall \omega \in U^*$ を満たすとき, アファイン U^* -射といわれ, 力学系射の条件, U^* -射であり, $f x_1^0 = x_2^0, h_1 = h_2 f$ を満たすとき, アファイン力学系射: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ といわれる. アファイン力学系射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ は, それを定

義するアファイン射 $f: X_1^A \rightarrow X_2^A$ が全単射なとき、同形射といわれる。□

モノイド射 $\varphi: U^* \rightarrow AM(X^A)$ は、モノイド射 $\Phi: U^* \rightarrow L(X)$ と写像 $G^+: U^* \rightarrow X$ により、

$$\begin{aligned} \varphi(\omega)(x+x^0) \\ = \Phi(\omega)x + G^+(\omega) + x^0, \forall \omega \in U^*, \forall x \in X, x^0 \in X \end{aligned}$$

と表わされる。ただし、 $G^+(\omega_2|\omega_1) = \Phi(\omega_2)G^+(\omega_1) + G^+(\omega_2)$, $\forall \omega_2, \omega_1 \in U^*$, である。組 (Φ, G^+) はモノイド射 φ の別の表現である⁶⁾。モノイド射 $\Phi: U^* \rightarrow L(X)$ と線形空間 X の組 (X, Φ) は線形 U^* -モジュールであり、写像 $G^+: U^* \rightarrow X$ はアファイン入力写像といわれる。

アファイン力学系 $\sigma = ((X^A, \varphi), x^0, h)$ は線形空間部分と台集合部分に分けて組 $((X, x^0, h^0), ((X, \Phi), G^+, h))$ により表現される。以後、アファイン力学系を後者により表わす。ただし、 $X^A = (X, X)$, $h = (h, h^0)$, $h \in L(X, Y)$, $h^0 \in Y$ である⁷⁾。σ の入力写像は $G^+: U^* \rightarrow X$; $\omega \mapsto G^+(\omega) + x^0$ である。

【定義 11】 アファイン力学系 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, \Phi), G^+, h))$ は、状態集合 X が可到達集合 $\{G^+(\omega) + x^0 | \omega \in U^*\}$ のアファイン包 $\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) G^+(\omega_i) + x^0 | \omega_i \in U^*, \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) = 1, \lambda(\omega_i) \in K \right\}$ と一致するとき、擬可到達といわれる。アファイン力学系 σ は擬可到達で可識別なとき、正準系といわれる。□

(注 1) 可到達集合は $G^+ + x^0$ の像 $im(G^+ + x^0)$ であり、線形空間 X が $im G^+$ の線形包となると、台集合 X は、可到達集合のアファイン包と一致する⁸⁾。□

(注 2) 線形 U^* -モジュール (X, Φ) には線形 U -作用 (X, F) が対応する。ただし $F(u) = \Phi(u)$, $\forall u \in U$ である。また、アファイン入力写像 G^+ に、写像 $g: U \rightarrow X$; $u \mapsto G^+(u)$ が対応する。ここで、 $G^+(u|\omega) = F(u)G^+(\omega) + g(u)$, $\forall u \in U, \forall \omega \in U^*$, が成立する。□

(注 3) σ の系方程式は次式により記述される。

$$\begin{cases} x(0) = x^0 & x(t) \in X, t \in N \\ x(t) = x(t) + x^0, \\ x(t+1) = F\omega(t)x(t) + g(u), & x(t) \in X, \omega(t) \in U \\ \gamma(t) = h x(t) = h x(t) + h^0 \end{cases} \quad \square$$

【例 2】 文献 3) の例 (4.4) で考察したアファイン U^* -モジュール $(V(U^+)^A, \phi)$ を考える。ここで、 $V(U^+) = \{\lambda | \lambda \text{ は有限な台をもつ関数 } U^+ \rightarrow K\}$, ただし、 $U^+ = U^* \setminus \{1\}$, $\phi: U^* \rightarrow AM(V(U^+)^A)$, $V(U^+)^A = (V(U^+), V(U^+))$ である。 $(V(U^+)^A, \phi)$ には、線形 U^* -モジュール $(V(U^+), \Psi)$ とアファイン入力写像 $e: U^* \rightarrow V(U^+)$; $\omega \mapsto e_\omega$, ただし $e(1) = 0$, が対応する。組 $\sigma = ((V(U^+),$

$0, h^0), ((V(U^+), \Psi), e, h))$ は、擬可到達なアファイン力学系である。□

(注意) モノイド射 $\Psi: U^* \rightarrow L(X)$ の定義域を U に限定すれば、組 $(V(U^+), \Psi)$ は線形 U -作用である。モノイド射 Ψ とアファイン入力写像 e は次式を満たす。

$$\Psi(u_2)e_{u_1} = e_{u_2|u_1} - e_{u_2} \quad \forall u_1, u_2 \in U \quad \square$$

アファイン力学系 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, F), g, h))$ には線形表現系と同様に線形入力写像 $G: V(U^+) \rightarrow X$; $\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) G^+(\omega_i)$, $\omega_i \in U^+$, $\lambda(\omega_i) \in K$, と線形観測写像 $H: X \rightarrow F(U^*, Y)$; $x \mapsto [\omega \mapsto h\Phi(\omega)x]$ が定義される。ただし、アファイン力学系の線形入力写像 G の定義域は線形表現系の場合と異なって $V(U^+)$ であることに注意されたい。σ の観測写像は $H + h^0: X \rightarrow F(U^*, Y)$; $x \mapsto [\omega \mapsto h\Phi(\omega)x + hG^+(\omega) + h^0]$, である。ただし $x = x + x^0$ である。

【補題 4】 アファイン力学系 σ が擬可到達となるための必要十分条件は線形入力写像 $G: V(U^+) \rightarrow X$ が全射となることである。□

(注意) アファイン力学系 σ が可識別であることと、線形観測写像 $H: X \rightarrow F(U^*, Y)$ が単射であることが同等の条件であることは、線形表現系の場合と同様である。

【補題 5】 アファイン力学系 $\sigma_1 = ((X_1, x_1^0, h^0), ((X_1, F_1), g_1, h_1))$ と $\sigma_2 = ((X_2, x_2^0, h^0), ((X_2, F_2), g_2, h_2))$ に対し、アファイン射 $f: X_1^A \rightarrow X_2^A$ がアファイン力学系射となるための必要十分条件は、 f の線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が U -射であり、 $g_2 = f g_1$, $h_2 = h_1 f$ を満たすことである。

ただし、写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は、 $f(x_1 + x_1^0) = f x_1 + x_2^0$, $\forall x_1 \in X_1$ により定義され、 $X_1^A = (X_1, X_1)$, $X_2^A = (X_2, X_2)$ である。□

(注意) 線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が $g_2 = f g_1$ を満たすことと、 $G_2 = f G_1$ を満たすことは同等の条件である。□

アファイン力学系 $\sigma = ((X, x^0, h^0), ((X, F), g, h))$ の行動は入力応答関数 $a_\sigma: U^* \rightarrow Y$; $\omega \mapsto hG^+(\omega) + h^0$ である。

《定理 3》⁹⁾ 任意の入力応答関数 $a: U^* \rightarrow Y$ を実現する正準アファイン力学系が存在する。 $\sigma_1 = ((X_1, x_1^0, h^0), ((X_1, F_1), g_1, h_1))$ と $\sigma_2 = ((X_2, x_2^0, h^0), ((X_2, F_2), g_2, h_2))$ を入力応答関数 a を実現する、すなわち、 $h_1 G_1^+(\omega) + h^0 = h_2 G_2^+(\omega) + h^0 = a(\omega)$, $\forall \omega \in U^*$ を満たす正準アファイン力学系とする。このとき、全単射なアファイン力学系射 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ が存在する。□

5. 正準力学系と正準線形表現系〔正準アファイン力学系〕の関係

本節では、前節までの結果をふまえて、行動が等しい正準力学系と正準線形表現系〔正準アファイン力学系〕の関係を示す。

正準線形表現系〔正準アファイン力学系〕は可識別な力学系であるが、その状態集合は真に可到達であるとは限らない。

【命題 1】 $\sigma_a = ((X_a, F_a), x_a^0, h_a)$ と $\sigma_l = ((X_l, F_l), x_l^0, h_l)$ [$\sigma_a = ((X_a, x_a^0, h^0), ((X_a, F_a), g_a, h_a))$] を行動が等しい正準力学系、正準線形表現系〔正準アファイン力学系〕とする。このとき、単射な力学系射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l$ [$T_{aa}: \sigma_a \rightarrow \sigma_a$] が存在する。力学系射 T_{al} [T_{aa}] が同形射となるための必要十分条件は、 $X_l[X_a]$ が真に可到達な集合 $\{\varphi_l(\omega)x_l^0 | \omega \in U^*\}$ [$\{G^+(\omega) + x_a^0 | \omega \in U^*\}$] と一致すること、すなわち X_a が線形構造〔アファイン構造〕をもつことである。□

(証明) 定理 1, 2, 3 そして、文献 4) により明らかである。

6. 正準線形表現系と正準アファイン力学系の関係

本節では、行動が等しい正準線形表現系と正準アファイン力学系の関係を明らかにする。最初に、線形表現系から、それと行動が等しいアファイン力学系を導出する手順とその逆の手順を示す。

【命題 2】 $\sigma_l = ((X_l, F_l), x_l^0, h_l)$ を線形表現系とする。このとき、組 $\sigma_a = ((X, x_l^0, h^0), ((X_l, F_l), g, h_l))$ は、 σ_l と行動が等しいアファイン力学系である。ただし、 $X = X_l$, $g(u) = F_l(u)x_l^0 - x_l^0$, $\forall u \in U$, $h^0 = h_l x_l^0$ である。□

(証明) 組 σ_a がアファイン力学系であることは第 4 節の定義から明らかである。 σ_l と σ_a の行動が等しいことは直接計算することにより検証される。□

【命題 3】 $\sigma_a = ((X_a, x_a^0, h^0), ((X_a, F_a), g, h))$ をアファイン力学系とする。このとき、組 $\sigma_l = ((X_l, F_l), x_l^0, h_l)$ は、 σ_a と行動が等しい線形表現系である。ただし、 $X_l = X_a \times K$, $x_l^0 = [0 \ 1]^t$, $0 \in X_a$, $h_l = [h \ h^0]$ $F_l(u) = \begin{bmatrix} F_a(u) & g(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である。□

(証明) σ_l が線形表現系であることは定義 5 により明らかである。 σ_a と σ_l の行動が等しいことは直接計算することにより確かめられる。□

(注意) 命題 3 に記述した、アファイン力学系から、それと行動が等しい線形表現系を導く手順は、正

献 9) など、すでに報告されている。□

【命題 4】 σ_l と σ_a を命題 2 と同様とする。 σ_l が可識別なとき、 σ_a も可識別となる。□

(証明) アファイン力学系の可識別性は、線形部分の状態空間 (X_l, F_l) と出力機構 h_l で決まる⁹⁾。この状態空間と出力機構は σ_l のものと等しい。したがって、命題の内容は明らかである。□

【命題 5】 σ_a と σ_l を命題 3 と同様とする。 σ_a が擬可到達なとき、 σ_l も擬可到達となる。□

(証明) σ_a が擬可到達であるから $X_a = \{[G^+(\omega) | \omega \in U^*]\}$ が成立する。ただし、 $\{[\]\}$ は集合 $\{ \}$ の線形包である。 σ_l の可到達集合は $\{\varphi_l(\omega)x_l^0 | \omega \in U^*\} = \{[\Phi_a(\omega)0 + G^+(\omega)1]^t | \omega \in U^*\} = \{[G^+(\omega)1]^t | \omega \in U^*\}$ であり、その線形包が $X_l = X_a \times K$ と一致することは明らかである。ただし、 $\varphi_l: U^* \rightarrow L(X_l)$ は F_l に対応するモノイド射であり、 $\Phi_a: U^* \rightarrow L(X_a)$ は F_a に対応するモノイド射である。□

つぎに線形表現系とアファイン力学系の関係を考察する。

【定義 12】 $\sigma_l = ((X_l, F_l), x_l^0, h_l)$, $\sigma_a = ((X_a, x_a^0, h^0), ((X_a, F_a), g, h))$ をそれぞれ線形表現系、アファイン力学系とする。関係 $T_{al}: X_a \rightarrow X_l$ はつぎの条件を満たすとき、射 $\sigma_a \rightarrow \sigma_l$ といわれる。条件: $G_r(T_{al}^{\min}) \subseteq G_r(T_{al}) \subseteq G_r(T_{al}^{\max})$ 。ここで、関係 $T_{al}^{\min}: X_a \rightarrow X_l$ と関係 $T_{al}^{\max}: X_a \rightarrow X_l$ はそれぞれ、 $T_{al}^{\min} = G_l I (G + x_a^0)^{-1}$, $T_{al}^{\max} = H_l^{-1} (H + h^0)$ により定義される。 $(G + x_a^0)^{-1}: X_a \rightarrow V(U^*)$ と $H_l^{-1}: F(U^*, Y) \rightarrow X_l$ は、それぞれ、写像 $G + x_a^0: \lambda \rightarrow G\lambda + x_a^0$, と写像 H_l の逆対応である。ただし、 G と H は、それぞれ σ_a の線形入力写像、線形観測写像である。また G_l と H_l は、それぞれ σ_l の線形入力写像、線形観測写像である。写像 $H + h^0: X_a \rightarrow F(U^*, Y)$ と写像 $I: V(U^*) \rightarrow A(U^*)$ は、それぞれ、 $H + h^0: x + x_a^0 \rightarrow Hx + h^0$, $I: \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) + e_1$ により与えられる。 $G_r(\circ)$ は関係 $\circ$ のグラフである。□

【命題 6】 σ_a と σ_l を定義 12 と同様とする。射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l$ が存在するための必要十分条件は σ_a と σ_l の行動が等しいこと、すなわち、

$$hG^+(\omega) + h^0 = h_l \varphi_l(\omega) x_l^0 \quad \forall \omega \in U^*$$

が成立することである。

(証明) [十分] $(x_a, x_l) \in G_r(T_{al}^{\min})$ とすると $x_l = G_l I \lambda$, $x_a = G\lambda + x_a^0$ を満たす $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \in V(U^*)$ が存在する。ここで、 σ_a と σ_l の行動が等しいという仮定からつぎの一連の式が成立する。

$$\begin{aligned}
 h_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) \varphi(\omega_i) x_l^0 \right) \\
 &= h \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) G^+(\omega_i) \right) + \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) h^0, \\
 h_l G_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \right) &= h G \lambda + \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) h^0, \\
 h_l G_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) + e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_1 - e_1 \right) \\
 &= h G \lambda + \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) h^0, \\
 h_l G_l I \lambda + \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) h^0 - h^0 \\
 &= h G \lambda + \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) h^0, \\
 h_l x_l &= h x + h^0, \quad \text{ただし, } x_a = x + x_a^0
 \end{aligned}$$

したがって, $(x_a, x_l) \in G_r(T_{al}^{\max})$ となる.

[必要]; 射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l$ が存在する, すなわち, $G_r(T_{al}^{\min}) \subseteq G_r(T_{al}^{\max})$ が成立するものとする. 任意の $\lambda \in V(U^+)$ に対し, $(G\lambda + x_a^0, G_l I \lambda) \in G_r(T_{al}^{\min})$ であるから, $(G\lambda + x_a^0, G_l I \lambda) \in G_r(T_{al}^{\max})$ となる. したがって, $H_l G_l I \lambda = H G \lambda + h^0$ が成立し, σ_a と σ_l の行動が等しいことがわかる. $\square$

《定理 4》 $\sigma_a = ((X_a, x_a^0, h^0), ((X_a, F_a), g, h))$ と $\sigma_l = ((X_l, F_l), x_l^0, h_l)$ を, 行動が等しい正準アファイン力学系, 可識別な線形表現系とする. このとき, たゞ一つの射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l$ が存在し, 射 T_{al} は単射な写像 $T_{al} = G_l I (G + x_a^0)^{-1} = H_l^{-1} (H + h^0)$ となる. また, 射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l$ はアファイン力学系射: $\sigma_a \rightarrow \sigma_l^a$ である. ただし, σ_l^a は命題 2 の手順により σ_l から得られるアファイン力学系である.

(証明) 命題 6 から射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l$ が存在する. 射 T_{al} がたゞ一つであり, 単射となること, および, $T_{al} = G_l I (G + x_a^0)^{-1} = H_l^{-1} (H + h^0)$ となることは, 文献 2) 第 6, 7 節と同様にして証明される.

つぎに, T_{al} がアファイン力学射: $\sigma_a \rightarrow \sigma_l^a$ であることを示す. 写像 $T_{al}: X_a \rightarrow X_l$ を $T_{al} = G_l I G^{-1} = H_l^{-1} H$, $I: V(U^+) \rightarrow A(U^*)$; $\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1)$, により定義される線形写像とすると, $T_{al}: X_a \rightarrow X_l$ は

$$\begin{aligned}
 T_{al}(x + x_a^0) &= G_l I (G + x_a^0)^{-1} (x + x_a^0) \\
 &= G_l I \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \right) \\
 &= G_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) + e_1 \right) \\
 &= G_l I G^{-1} x + x_l^0 \\
 &= T_{al} x + x_l^0
 \end{aligned}$$

を満たしアファイン射である. たゞし

$$x = G \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \right)$$

とする. 線形写像 T_{al} が $g_a = T_{al} g$ と $h = h_l T_{al}$ を満たすことは T_{al} の定義式 $T_{al} = G_l I G^{-1} = H_l^{-1} H$ からわかる. たゞし, $g_a(u) = F_l(u) x_l^0 - x_l^0$, $\forall u \in U$ である. また, 次式により T_{al} は U -射となり, T_{al} により定義されるアファイン射 T_{al} は力学系射の条件を満たす.

$$\begin{aligned}
 T_{al} F_a(u) x \\
 &= G_l I G^{-1} F_a(u) x \\
 &= G_l I F(u) \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) e_{\omega_i} \right) \\
 &= G_l I \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) \right) \\
 &= G_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) - \sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_u - e_1) \right) \\
 &= G_l S_r(u) \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) \right) \\
 &= F_l(u) G_l I G^{-1} x \\
 &= F_l(u) T_{al} x
 \end{aligned}$$

《定理 5》 σ_a と σ_l そして T_{al} と T_{al} を定理 4 と同様とする. つぎの三つの条件は同等である.

- ① $T_{al}: X_a \rightarrow X_l$ は全単射である.
- ② $X_l = \left\{ G_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) \right) \mid \lambda(\omega_i) \in K, \omega_i \in U^*, n \in N^+ \right\}$, すなわち, $x_l^0 \in \text{im}(G_l I)$ である. たゞし, $N^+ = N \setminus \{0\}$.

- ③ $X_l = \text{im} G_l$ が成立し, 条件 ⑧; $g(u) = F_a(u) x^0 - x^0$, $\forall u \in U$, $h x^0 = h^0$ を満たす $x^0 \in X_a$ が存在する. $\square$

(証明) ① $\Rightarrow$ ②; σ_l^a を定理 4 と同様とする. T_{al} が全単射なとき, アファイン力学系射 $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l^a$ は同形射であり, σ_l^a は擬可到達 (アファイン力学系として) である. したがって, $X_l = \left\{ G_l \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i) (e_{\omega_i} - e_1) \right) \mid \lambda(\omega_i) \in K, \omega_i \in U^*, n \in N^+ \right\}$ である.

② $\Rightarrow$ ①; 条件から σ_l^a は擬可到達である. したがって, σ_l^a は正準 (アファイン力学系として) である. 定理 3 により $T_{al}: \sigma_a \rightarrow \sigma_l^a$ は同形射, すなわち, T_{al} は全単射である.

① $\Rightarrow$ ③; $T_{al}: X_a \rightarrow X_l$ が全単射であること, 条件 ② より $x_l^0 \in \text{im}(G_l I)$ であることから, $T_{al}^{-1} x_l^0 \in X_a$ がたゞ一つ決まる. これを $x^0 = T_{al}^{-1} x_l^0$ とすると, x^0 は次式により条件 ⑧ を満たす.

$$\begin{cases} g(u) = G e_u = T_{a1}^{-1}(F_1(u)x_1^0 - x_1^0) \\ \quad = F_1(u)T_{a1}^{-1}x_1^0 - T_{a1}^{-1}x_1^0 \\ \quad = F_1(u)x^0 - x^0 \\ h x^0 = h T_{a1}^{-1}x_1^0 = h_1 x_1^0 = h^0 \end{cases}$$

$X_1 = im G_1$ が成立することは, T_{a1} が全射であること, また, $x_1^0 \in im(G_1 I)$ が成立することから明らかである.

③ $\Rightarrow$ ②: $X_1 = im G_1$ であるから, $x_1^0 \in im(G_1 I)$ を示せば, $X_1 = \left\{ G_1 \left(\sum_{i=1}^n \lambda(\omega_i)(e_{\omega_i} - e_1) \right) \mid \lambda(\omega_i) \in K, \omega_i \in U^*, n \in \mathbf{N}^+ \right\}$ が成立する. ただし, 線形表現系の定義から $x_1^0 = G_1 e_1$ である.
 $T_{a1} x^0 = x_1^0$ であることを示す.

$$\begin{aligned} h_1 F_1(u) T_{a1} x^0 &= h_1 T_{a1} F_a(u) x^0 \\ &= h(g(u) + x^0) \\ &= h g(u) + h^0 \\ &= h_1 F_1(u) x_1^0 \quad \forall u \in U \end{aligned}$$

したがって, $T_{a1} x^0 = x_1^0$, すなわち, $x_1^0 \in im T_{a1} = im(G_1 I)$ である. $\square$

(系 1) $\sigma_1 = ((X_1, F_1), x_1^0, h_1)$ を正準線形表現系, $\sigma_a = ((X, x_1^0, h^0), ((X_1, F_1), g, h_1))$ を命題 2 の手順で得られるアファイン力学系とする. σ_a が正準となるための必要十分条件は, $x_1^0 \in [im G^+]$, ただし, $G^+ : U^* \rightarrow X_1; \omega \mapsto \varphi_1(\omega)x_1^0 - x_1^0$, が成立することである.

σ_a が正準でないとき, 組 $\sigma_a' = ((X', x_1^0, h^0), ((X, F_1), g, h_1))$, ただし, $X' = [im G^+]$, $X' = X + x_1^0$, が σ_1 と行動が等しい正準なアファイン力学系である. $\square$

(証明) $[im G^+] = im(G_1 I)$ であるから定理 5 より, 系の前半は明らかである. 後半の σ_a' が正準なアファイン力学系となることは, 線形空間 X が可到達集合 (線形部分) の線形包であることから明らかである. σ_a' の行動が σ_1 の行動と等しいことは σ_a の場合と同様に証明される. $\square$

(系 2) $\sigma_a = ((X_a, x_a^0, h^0), ((X_a, F_a), g, h))$ を有限次元正準アファイン力学系とする. 行動と状態集合の次元数が σ_a と等しい正準線形表現系が存在するための必要十分条件は定理 5 の ③ の条件 ⑧ が成立することである. このとき, 組 $\sigma_1 = ((X_a, F_a), x^0, h)$ が σ_a と行動も状態集合の次元数も等しい正準線形表現系である. ただし, $x^0 \in X_a$ は条件 ⑧ を満たす. $\square$

(証明) [十分]; σ_1 は定義 5 より線形表現系であり, その行動も直接計算することにより σ_a の行動と等しいことが確かめられる. 状態集合の次元数が等しいことは, X_a が共通であるから明らかである. σ_a が可識別であるから σ_1 は可識別である. また, $X_a = [im$

$G^+] = [\{\Phi_a(\omega)x^0 - x^0 \mid \omega \in U^*\}] = [\{\Phi_a(\omega)x^0 \mid \omega \in U^*\}]$ が成立し, σ_1 は擬可到達である. ただし, $\Phi_a : U^* \rightarrow L(X_a)$ は F_a に対応するモノイド射である. したがって, σ_1 は正準線形表現系である.

[必要]; 命題 2, 定理 5 より明らかである. $\square$

(注意) 命題 3 の手順で得られる線形表現系の状態集合は, 元のアファイン力学系の状態集合より次元数が 1 だけ大きい. しかし, 系 2 により定理 5 の ③ の条件 ⑧ が成立するとき, 状態集合の次元数が等しい線形表現系が存在する. 系 2 の成果は本稿ではじめて報告されたものである. $\square$

(系 3) 正準アファイン力学系 $\sigma_a = ((X_a, x_a^0, h^0), ((X_a, F_a), g, h))$ に対し, 命題 3 の手順により得られる線形表現系 $\sigma_1 = ((X_1, F_1), x_1^0, h_1)$ が正準となるための必要十分条件は, 定理 5 の ③ の条件 ⑧ が成立しないことである. $\square$

(証明) 命題 5, 定理 5 そして系 2 により明らかである. $\square$

(注意) 系 3 の線形表現系 σ_1 は, σ_a と行動が等しく, 擬可到達である. したがって, この系の条件は, σ_1 が可識別となるための必要十分条件である. $\square$

[例 3] $K = U = Y = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ は実数の集合, とする. 正準アファイン力学系 $\sigma_a = ((\mathbf{R}^n, 0, 0), ((\mathbf{R}^n, F_a), g, h))$ を考える. ただし, $F_a(u) = F \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\forall u \in U$, とする. この σ_a は線形系である. σ_a と行動が等しい正準線形表現系は, 系 3 により, $\sigma_1 = ((\mathbf{R}^{n+1}, F_1), x_1^0, h_1)$ である. ただし, $x_1^0 = [0 \ 1]^t$, $0 \in \mathbf{R}^n$, $h_1 = [h \ 0]$, $F_1(u) = \begin{bmatrix} F & u g \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall u \in U$, である. したがって, 有限次元の正準線形系 (正準アファイン力学系) と行動が等しい正準線形表現系の次元数は 1 だけ大きくなる. $\square$

(系 4) 入力応答関数 $a : U^* \rightarrow Y$ が, $a \in [ima^+]$ を満たすとき, すなわち, $a^+(\omega) = \sum_{i=1}^n k_i a(\omega_i) \omega_i$, $\forall \omega \in U^+$, を満たす $k_i \in K$, $\omega_i \in U^*$, $n \in \mathbf{N}$ が存在するとき, 行動と次元数が等しい正準線形表現系と正準アファイン力学系が存在する. ただし, 写像 $a^+ : U^* \rightarrow F(U^*, Y)$ は, $a^+(\omega) = a(\cdot | \omega) - a(\cdot)$, $\forall \omega \in U^*$, $a(\cdot) : \bar{\omega} \mapsto a(\bar{\omega})$, により定義される. $\square$

(証明) アファイン力学系 $\sigma = ((im A + a, a, a(1)), ((im A, S_1), a^+, 1))$ は a の正準実現系である. ただし, 写像 $A : V(U^+) \rightarrow F(U^*, Y)$ は, $A; e_a \mapsto a^+(\omega)$ により定義される線形入出力写像である⁶⁾. 系の条件が満たされるとき, a が定理 5 の ③ の条件を満たすことが容易に確かめられる. $\square$

[例 4] $K = \mathbf{R}$, $U = \{\alpha, \beta\}$ とする. 正準線形表現系 $\sigma_1 = ((\mathbf{R}^2, F), x_1^0, h_1)$ を考える. ただし,

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_i^0 = [0 \ 1]^t$$

とする。\$\sigma_i\$ と行動が等しいアファイン力学系は命題 2 により、\$\sigma_a = ((X, x_i^0, h^0), ((R^2, F), g, h_i))\$、ただし、\$h^0 = h_i x_i^0\$、\$g: U^* \rightarrow R^2\$; \$u \mapsto F(u)x_i^0 - x_i^0\$、である。しかし、\$x_i^0\$ は \$[\{\varphi_i(\omega)x_i^0 - x_i^0 | \omega \in U^*\}]\$ に属さない。ここで、\$\varphi_i: U^* \rightarrow L(R^{2 \times 2})\$ は \$F\$ に対応するモノイド射である。したがって、\$\sigma_a\$ は正準ではなく、\$\sigma_i\$ と行動が等しい正準アファイン力学系の次元数は \$\sigma_i\$ より 1 だけ小さい。 \$\square\$

〔例 5〕 \$K=R\$, \$U=\{\alpha, \beta\}\$ とする。正準アファイン力学系 \$\sigma_a = ((R^2, 0, h^0), ((R^2, F), g, h))\$ を考える。ただし、

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\$g(\alpha) = [0 \ 0]^t\$, \$g(\beta) = [1 \ 0]^t\$ とする。状態 \$x^0 = [0 \ 1]^t\$ が定理 5 の ③ の条件 ⑥ を満たすことが直接計算することにより確かめられる。ただし \$h^0 = h x^0\$ とする。したがって、\$\sigma_a\$ と行動が等しい正準線形表現系は \$\sigma_i = ((R^2, F), x^0, h)\$ である。したがって、この場合、\$\sigma_i\$ と \$\sigma_a\$ の次元数が等しく、命題 3 の手順で得られる線形表現系は正準ではない。

7. む す び

本論文で、アファイン力学系から線形表現系への射を定義し、行動が等しいアファイン力学系と線形表現系の関係を明らかにした。また、線形表現系から行動が等しいアファイン力学系を導く手順とその逆の手順を与え、これらの手順により得られる系が正準となるための必要十分条件を得た。この結果によれば入力応答関数 \$a\$ を実現する正準線形表現系と正準アファイン力学系の状態集合は有限次元のとき、線形空間としての (ただし、アファイン力学系の状態集合は随伴線形空間を考える) 次元数が等しい場合もあるし、正準線形表現系のほうが 1 だけ大きい場合もある。それぞれの正準実現系の次元数が等しい場合、線形表現系のほうがよりコンパクトな実現系と考えられ、on-line の部分実現問題に適している。しかし、次元数が異なる場合には、アファイン力学系のほうが状態集合にむだ

がない実現系であり、状態集合が真に可到達な集合に近い。

上記成果により、ただちにつぎの定理が得られる。

《定理 6》 入力応答関数 \$a: U^* \rightarrow Y\$ が (有限次元) アファイン力学系により実現できるための条件は (有限次元) 線形表現系の実現条件⁵⁾と同等である。 \$\square\$

また、本稿の成果の影響するところは大きい。たとえば、T. J. Tarn などは齊次双線形系と Biaffine System の関係を正確に考察できなかったため、Biaffine System⁸⁾ の実現条件に誤りがあり、一意性の証明はまちがっている。また、稲垣、舟橋は非齊次双線形系の実現問題を考察したが¹³⁾特殊な存在条件のみを与えており、また、非同形クラスを考察しなければならなかったのは、数学的に妥当性を欠くシステム射を考えたためである。(本論文定理 3 参照)

参 考 文 献

- 1) 松尾：数学的システム理論の基礎，計測と制御，16-8，50/56 (1977)
- 2) 長谷川，松尾：離散時間線形表現系の実現理論，計測自動制御学会論文集，15-3，298/305 (1979)
- 3) 松尾，上田：線形表現系とアファイン力学系の関係 Dynamical System Theory シンポジウム資料 (1978)
- 4) 松尾，長谷川：離散時間系の実現理論，計測自動制御学会論文集，15-2，178/185 (1977)
- 5) 長谷川，松尾：離散時間有限次元線形表現系，計測自動制御学会論文集，15-4，443/450 (1979)
- 6) 松尾，新家：連続時間アファイン力学系の実現理論，計測自動制御学会論文集，17-1，56/63 (1979)
- 7) ブルバキ：数学原論代数 3，東京図書
- 8) T. J. Tarn and S. Nonoyama: An Algebraic Structure of Discrete-Time Biaffine Systems, IEEE Trans., AC-24-2 (1979)
- 9) T. J. Tarn, et al: Realization of Discrete Time Internally Bilinear Systems, Proc. of IEEE Conf. on Dec. and Cont. (1976)
- 10) E. Sontag: Realization Theory of Discrete-Time Nonlinear Systems: Part I—The Bounded Case, IEEE Trans., CAS-26-4 (1979)
- 11) S. Eilenberg: Automata, Language and Machine, A., Academic Press (1974)
- 12) T. Matsuo: Realization Theory of Continuous-Time Dynamical Systems, Lecture Notes in Control & Information Sciences, 32, Springer-Verlag (1981)
- 13) 稲垣，舟橋：非同次双線形システムによる実現問題，計測自動制御学会論文集，15-3，306/312 (1979)