評価の過程で現れる循環構造における分割と 擬似区間順序[†]

森 田 矢次郎*・岡 雄 三*・尾 形 慶 照*

Decomposition of Intransitively Ordered Set and Pseudo-Interval Order Appearing in Evaluation

Yajiro MORITA*, Yuzo OKA* and Yoshiteru OGATA*

This paper deals with intransitive ordering problems which appear in some evaluation involving paired comparison. The main path diagram, the fundamental pattern, the extended fundamental pattern and the pseudo-interval ordering are defined to analyze the set of objects intransitively ordered. From those definitions and their basic meaning this paper obtains an algorithm to decompose the intransitively ordered set into subsets satisfying the property of the pseudo-interval ordering.

1. ま え が き

評価方法のなかで一対比較は最もよく使われる手法であろう。この方法では二者択一的に「どちらがより優れて（大きい、重い、……など）いるか」を決める。しかし一対比較結果をすべて用いなければ全体的な評価をすることはできない。しかもこの際注目すべきは、一対比較の評価過程が明瞭であるにもかかわらず、全体としては評価結果の間で推移則が破られる可能性があるということである¹⁾。

一対比較結果が与えられて、全体をどう処理すればよいかという問題は随所に現れる²⁾。推移則に矛盾する結果をあいまいな結果であると解釈することができるので、たとえばあらためて Fuzzy 集合論³⁾ による全体の処理を考えるかもしれないが、真に有効な処理法はまだ開発途上ということができよう。

著者らはそのような問題を扱う出発点としてループという概念を導入することにより推移的でないものすなわち循環構造を記述しその基本的な性質を導いた¹⁾。

本報告はその概念をさらに発展させ循環構造の内部にメスを入れようとするものである。それによってこの種のあいまいさを含む問題をメンバーシップ関数³⁾のような技巧的操作を加えることなくありのままに直視し、そのなかからできるだけ役に立つ情報を抽出する一つの方法論を確立することが目的である。

2. 循環構造に関する諸定義と基礎的事項

循環構造を表現するために用いる「グラフ」、「方向線」、「点」、「始点」、「終点」、「部分グラフ」、「道」、「到達可能」、「サイクル」、「表現サイクル」、「ループ」、「部分ループ」、「推移的 3 点」、「3 すくみ」、「ループを張る」、「線接」および「点接」などの基本的用語の定義は参考文献 1) の定義 1 から定義 11 までを参照するものとする。したがって本論文中で使われる定義 1 は参考文献 1) に記述されている定義 1 を意味する。本論文では定義 12 から書き始めるものとする。

【定義 12】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ において一の道上のすべての点からなる集合 $Y (C \subseteq X)$ は道表現可能であるといい、その道を Y の表現道という。

【命題 1】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ は部分ループの有無にかかわらず道表現可能である。

(証明) 略

【命題 2】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ において X の部分集合 $Y (\neq \emptyset)$ の表現道がただ一つだけ存在するための必要十分条件は Y がループを含まないことである。ここで $\emptyset$ は空集合である。

(証明) $Y (\neq \emptyset)$ の表現道がただ一つだけ存在するとき、その道を $y_1 \xrightarrow{\circ} y_2 \xrightarrow{\circ} \cdots \xrightarrow{\circ} y_n (n > 2)$ とする。いま、 $y_n \rightarrow y_1$ とすれば $y_n \xrightarrow{\circ} y_1 \xrightarrow{\circ} \cdots \xrightarrow{\circ} y_{n-1}$ は Y の表現道になるから仮定に反する。よって $y_1 \rightarrow y_n$ でなければならない。また $y_k \rightarrow y_n$ かつ $y_n \rightarrow y_{k+1} (k < n)$ とすれば $y_1 \xrightarrow{\circ} \cdots \xrightarrow{\circ} y_k \xrightarrow{\circ} y_n \xrightarrow{\circ} y_{k+1} \xrightarrow{\circ} \cdots \xrightarrow{\circ} y_{n-1}$ は Y の表現道になる

[†] 第 18 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 54・8)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received March 18, 1980)

(Revised July 3, 1980)

からこれも仮定に反する. よって帰納的に $y_i \rightarrow y_n$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) がなりたつ. つぎに $Y - \{y_n\}$ に $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots \rightarrow \circ$ とは別の表現道が存在するとしてその道を $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots \rightarrow \circ$ とすれば $\circ \rightarrow \circ \rightarrow \dots \rightarrow \circ$ の道を $y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_{n-1}}$ とすれば $y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_{n-1}} y_n$ は Y の表現道になるから仮定に反する. よって $Y - \{y_n\}$ はただ一つの表現をもちそれは $y_1 y_2 \dots y_{n-1}$ である. 同様な操作を繰返すことができるから $y_i \rightarrow y_j$ ($i=1, 2, \dots, j-1, j=2, 3, \dots, n$) となる. ここで $\langle X, \rightarrow \rangle$ の部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の方向線の集合を定義 1 の意味で Y 上の 2 項関係と考えると, 2 項関係 $\rightarrow$ は Y 上の線形順序を規定し三つの点からなる Y の部分集合は推移的な 3 点になる. よって Y は $n=1, 2$ の場合を含めてループを含まないことは参考文献 1) の命題 3 から明らかである. 逆に $Y(\ni \phi)$ の表現道が二つ以上存在すれば Y は明らかにループを含む. 実際, 道を一つの順列と考えると二つの道の間で順番が逆転している Y の相異なる点 y_1, y_2 が必ず存在し, y_1 と y_2 は互いに到達可能であるから部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ において x と互いに到達可能な点の集合はループである. ■

3. ループと主道線図

前章では与えられた有限集合の点を一つの道に沿って並べる表現道について考えた. その立場にしたがってループの性質が明確に表現できる一つの方法論の確立を 3 章では目指すことにする.

【定義 13】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ においてつぎの (1), (2) の操作で定まる線図を $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図といい, このとき (1) で選んだ表現道をその線図の主道という.

(1) X の一つの表現道を選び, 方向線を右向きに書く.

(2) $\langle X, \rightarrow \rangle$ の方向線で (1) の表現道と逆向きのもの (始点 x_i , 終点 x_j が $j < i$ を満足する方向線) はすべて Fig. 1 のように有向半円弧として書き加える.

以後は簡単のため $\langle X, \rightarrow \rangle$ における主道線図の有向半円弧をただ単に円弧と呼ぶことにする.

【定義 14】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の一つ的主道線図における円弧の集合を $A(\ni \phi)$ とし, 単射 $\Gamma: A \rightarrow 2^X$ を任意の $a \in A$ に対して Fig. 2 のように $\Gamma(a) = \{y_i: i=1, 2, \dots, n\}$ と定義する

【定義 15】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の一つ的主道線図において円弧の集合を A とし, $a_1, a_2 \in A$ とするとき

(1) $\Gamma(a_1) \cap \Gamma(a_2) = \phi$ ならば a_1 と a_2 は (互いに) 素であるという.

Fig. 1 Main path diagram of $\langle X, \rightarrow \rangle$

Fig. 2 Injection Γ of a

(2) $\Gamma(a_1) \subset \Gamma(a_2)$ ならば a_2 は a_1 を含むという.

(3) a_1 と a_2 は素でなく, しかも互いに他を含まないとき

(i) $\Gamma(a_1) \cap \Gamma(a_2)$ が 1 点集合 $\{x\}$ であれば, a_1 と a_2 は点 x で (互いに) 外接するという.

(ii) $\Gamma(a_1) \cap \Gamma(a_2)$ が 1 点集合でなければ, a_1 と a_2 は (互いに) 交わるという.

(4) a_1 を含む円弧が a_1 自身に限られているとき, a_1 は極大であるという. また a_1 に含まれる円弧が a_1 自身に限られているとき, a_1 は極小であるという.

(5) $x \in \Gamma(a_1)$ であるとき, a_1 は点 x を含むという. さらに x が a_1 の始点でも終点でもないとき, a_1 は点 x をまたぐという.

【命題 3】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図において任意の円弧を a とすれば $\Gamma(a)$ はループである.

(証明) $\Gamma(a)$ はサイクル表現可能だから明らか. ■

【命題 4】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図において二つの円弧 a_1, a_2 が互いに素でなければ $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$ はループである.

(証明) 命題 3 によって $\Gamma(a_1)$ と $\Gamma(a_2)$ はループである. a_1 と a_2 は互いに素でないから $\Gamma(a_1) \cap \Gamma(a_2) \ni \phi$ である. 参考文献 1) の命題 4 から $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$ はループである. ■

【命題 5】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ において C を 3 すくみとすれば, $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図には始点も終点も C の点である円弧が存在する.

(証明) $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図のなかで 3 すくみはつぎのいずれかの形でしか存在し得ない.

(1) ある点とそれをまたぐ円弧の始点と終点

(2) ある点で外接する二つの円弧の他の端点とその点

(3) ある点で交わる二つの円弧のうちの一つの始点または終点とその点をまたぐ他の円弧の始点と終点いずれの場合も主道線図において3すくみ C は一つの円弧の始点と終点にもう1点加わった形でしか存在しない。 ■

【命題 6】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図においてある点 x をまたぐ極小な円弧の始点と終点は x と3すくみを作る。

(証明) 命題5から明らかである。 ■

【命題 7】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図においてある点 x で外接する二つの円弧の少なくとも一方が極大であれば、 x と二つの円弧の他の端点は3すくみを作る。

(証明) x で外接する二つの円弧のなかで x を始点にもつ円弧を a_1 , x を終点にもつ円弧を a_2 とし、 a_1 の終点を y , a_2 の始点を z とすれば $x \rightarrow y$ かつ $z \rightarrow x$ である。ところが a_1, a_2 の少なくとも一方は極大だから $y \rightarrow z$ である。よって $\{x, y, z\}$ は3すくみである。 ■

【命題 8】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ において点 x を含むループが存在するための必要十分条件は $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図に x を含む円弧が存在することである。

(証明) x を含むループが存在すると仮定すれば、参考文献 1) の命題 10 によって x を含む3すくみが存在する。よって命題5から $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図に x を含む円弧が存在することは明らかである。逆に $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図に x を含む円弧 a が存在すれば命題3によって x を含むループ $\Gamma(a)$ が存在する。 ■

【定義 16】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の主道線図からすべての円弧をとり去ってできる線図で記述されるグラフは推移則を満足するからその線図のものと推移グラフという。

《定理 1》 $\langle X, \rightarrow \rangle$ の部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ がループであるための必要十分条件はつぎの(1)および(2)が成り立つことである。

(1) Y の大きさは3以上である。

(2) 部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の一つ的主道線図においてもとの推移グラフの最大元、最小元以外の点でつぎの(i)または(ii)が成り立つ。

(i) その点をまたぐ円弧が存在する。

(ii) その点で外接する二つの円弧が存在する。

(証明) 部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の主道線図の主道を $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow y_n$ のようにおく。(1)および(2)が成り立つと仮定すると $n \geq 3$ だから y_2 および y_{n-1} はもとの推移グラフの最大元 y_n とも最小元 y_1 とも異なるから(2)の(i)または(ii)が成り立つ。ところが y_2, y_{n-1} はいずれも(ii)を満たさないから(i)だけが成り立つ。このとき y_2 をまたぐ円弧の終点は y_1 で

あり、 y_{n-1} をまたぐ円弧の始点は y_n である。よって部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の点は少なくとも一つの円弧に含まれ、しかも主道上で隣接している2点についてはそれらを同時に含む円弧が存在するから、この主道線図の円弧の集合を A とすると命題4によって、 $\bigcup_{a \in A} \Gamma(a) = Y$ はループとなる。逆に(1)または(2)が成り立たないと仮定しよう。(1)が成り立たないと Y がループでないことは明らかである。つぎに(2)が成り立たない場合、すなわち(2)の(i)も(ii)も成り立たない点 x が存在する場合を考えたと部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ には x と互いに到達可能でない点が存在することになり参考文献 1) の命題2によって Y はループではない。 ■

4. 基本パターンと拡張基本パターン

主道線図を用いてループの性質を前節で調べたが、この考え方をさらに発展させるためループの内部構造を分析する。

【定義 17】 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の主道線図においてどの一つの円弧を取り去っても Y がループではなくなってしまうならば、その線図は基本パターンであるといい、円弧の数が k のとき k 次の基本パターンであるという。

【命題 9】 基本パターンの円弧はすべて極大かつ極小である。

(証明) 基本パターンの二つの円弧 a_1, a_2 が $\Gamma(a_1) \subset \Gamma(a_2)$ を満足すると仮定すれば、円弧 a_1 を取り去っても Y は依然としてループである。これは定義17に反するから基本パターンの円弧は互いに他を含まない。すなわち基本パターンの円弧はすべて極大かつ極小である。 ■

【定義 18】 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の主道線図において極大な円弧以外のすべての円弧を取り去ったときに k 次の基本パターンになるならば、その主道線図は k 次の拡張基本パターンという。

【命題 10】 k 次の基本パターンは k 次の拡張基本パターンである。

(証明) 定義17および定義18から明らかである。 ■

【定義 19】 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の一つ的主道線図においてつぎのアルゴリズムを上からのアルゴリズムという。

0 ステップ; 主道線図のものと推移グラフの最大元を x_1 とする。

1 ステップ; x_1 を始点にもつ円弧で終点(もとの推移グラフにおいて)最も小さいものを a_1 とし、 a_1 の終点を y_1 とす

る。

$i+1$ ステップ ($i=1, 2, \dots$); 便宜的に $\Gamma(a_0)=\{x_1\}$

と置く。 y_i がもとの推移グラフの最小元でないとき、 $\Gamma(a_i)-\Gamma(a_{i-1})$ の中に始点がある円弧で終点が (もとの推移グラフにおいて) 最も小さい点を選び、さらにその中で始点が最も大きいものを a_{i-1} とし、 a_{i+1} の始点、終点をそれぞれ x_{i+1}, y_{i+1} とする。

【命題 11】 上からのアルゴリズムについてつぎのことが成り立つ。

(1) $\mathbf{Y}$ の大きさを n とすれば、ただか $\left\lfloor \frac{2}{3}(n-1) \right\rfloor$ ステップで終了してもとの推移グラフの最小元に達する。ただし $\lfloor \cdot \rfloor$ はガウス記号である。

(2) $a_1, a_2, \dots$ はすべて極大な円弧である。

(3) $a_1, a_2, \dots$ 以外の円弧をすべて取り去ってできる線図は基本パターンである。

(証明) 1 ステップの操作が可能であることおよび y_i がもとの推移グラフの最小元でなければ $i+1$ ステップの操作が可能なのは定理 1 から明らかである。したがって、上からのアルゴリズムが有限回のステップではもとの推移グラフの最小元に達しないと仮定すれば $\mathbf{Y}$ が有限集合であることに矛盾する。よって、上からのアルゴリズムが k ステップで終了してもとの推移グラフの最小元に達するとしてもよい。このとき $a_1, a_2, \dots, a_k$ がすべて極大な円弧であることと $a_1, a_2, \dots, a_k$ 以外のすべての円弧を取り去ってできる線図が k 次の基本パターンであることは定義 19 と命題 9 から明らかである。最小のループは 3 すくみであるから、同じ個数の点に対して最も次数を高くするのはすべての円弧が 3 すくみからなるときである。もとの推移グラフ $y_n \rightarrow y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow y_i \rightarrow \dots \rightarrow y_1$ 上で円弧がすべて 3 すくみであるとき、隣りあった任意の 3 点 y_i, y_{i+1}, y_{i+2} ($i=1, 2, \dots, n-2$) の間に存在する関係は点 y_{i+2} に対して点 y_i が、① 円弧の終点である。または、② 円弧にまたがれた点である。のいずれかを満たし、かつ点 y_{i+1} が、③ 円弧の終点である。または、④ 円弧にまたがれていないし終点でもない。のいずれかを満たすことである。①, ②と③, ④の組合せによる場合分けをする。

i) ①かつ③を満たすとき; y_i と y_{i+2} とを結んで 3 すくみを作り y_{i-1}, y_i, y_{i+1} で作られていた円弧を取り除くと新しい基本パターンで次数は変らない。すなわち、 y_{i+2} が加わっても次数は増加しない。

ii) ①かつ④を満たすとき; y_i と y_{i+2} とを結んで新

Fig. 3 Fundamental patterns constructed only by the transitive triples

しい 3 すくみが作れ、しかも次数は 1 だけ増加する。

iii) ②かつ③を満たすとき; y_i と y_{i+2} とを結んで新しい 3 すくみが作れ、しかも次数は 1 だけ増加する。

iv) ②かつ④を満たすとき; $y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_n$ の間で 3 すくみより大きな円弧が存在することになるのでこの組合せは存在しない。

つぎに 3 すくみだけから基本パターンを作ること考える。点の数が 3 のとき一つの 3 すくみができる。

(Fig. 3(1)) Fig. 3(1) の 3 点 y_1, y_2, y_3 に 1 点 y_4 を加えると Fig. 3(2) のようになる。これは iii) の場合に相当する。Fig. 3(2) に 1 点 y_5 を加えると Fig. 3(3) のように i) の場合に相当して次数は増加しない。さらに 1 点 y_6 を加えると Fig. 3(3) における円弧 a_1, a_2' による場合、これは iii) の場合に相当して Fig. 3(4) が得られ次数は 1 だけ増加するが、さらに 1 点 y_7 を加えると i) の場合に相当して次数は増加しない。一方、Fig. 3(3) における円弧 a_1, a_2 を選んだ場合、 y_6 を加えると ii) の場合に相当し Fig. 3(5) が得られ次数は 1 だけ増加する。円弧 a_3 による y_4, y_5, y_6 の関係は Fig. 3(4) における a_1 と y_1, y_2, y_3 の関係と同じだから、Fig. 3(5) にさらに 1 点ずつ加えていくと次数は $+1, 0, +1$ の形の繰り返して増加していく。これは Fig. 3(4) の場合と比較して同じ要素数では明らかに高い次数の基本パターンを生み出す。その次数の増加していくパターンは要素数 1 から増加するにつれて $0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, \dots$ となる。よって要素数 n に対して取りうる最高の次数 k の関係は $k = \left\lfloor \frac{2}{3}(n-1) \right\rfloor$ と表わされる。

【定義 20】 定義 19 において「最大元」、「始点」、「終点」、「小さい」という部分をそれぞれ「最小元」、「終点」、「始点」、「大きい」と書き換えることによって導かれるアルゴリズムを下からのアルゴリズムという。

【命題 12】 命題 11 において「上から」、「最小元」

という部分をそれぞれ「下から」、「最大元」と書き換えても成り立つ。

〔証明〕 命題 11 の証明と同様にすればよい。 ■

〔定義 21〕 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の 1 つの主道線図において上（または下）からのアルゴリズムで選ばれた極大な円弧以外のすべての円弧を取り去ってできる基本パターンをその線図の上（または下）からの最低次の基本パターンという。また上（または下）からのアルゴリズムで選ばれた極大な円弧は上（または下）からの最低次の基本パターンを構成するという。

《定理 2》 k 次の拡張基本パターンにおいては上からの最低次の基本パターンと下からの最低次の基本パターンは一致する。それは k 次の基本パターンであり、すべての極大な円弧によって構成されている。

〔証明〕 k 次の拡張基本パターンにおいて k 個の極大な円弧 $a_1, a_2, \dots, a_k$ は一意に決まる。実際、 k 個以外に極大な円弧 b が存在して k 個の円弧の中のひとつ a_i と入れ換えてできる k 個の円弧もループを張ると仮定しよう。定義 18 から円弧 $a_1, a_2, \dots, a_k$ はどの一つを取り去ってもループを張らなくなるので、ループ中のほかの円弧は $a_1, a_2, \dots, a_k$ のどれかに含まれてしまう。一方、円弧 $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_k$ もループを張るから円弧 a_i は $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_k$ のどれかに含まれてしまうことになる。よって極大な円弧 b が存在すると仮定したのは矛盾である。

上から（または下から）の最低次の基本パターンは命題 11 および命題 12 によって極大な円弧だけからなるので、それが k 次の拡張基本パターンにおける極大な円弧と一致することは明らかである。一方、拡張基本パターンにおいて極大な円弧以外のすべての円弧を取り去ってできる線図は基本パターンである。 ■

上からの最低次の基本パターンと下からの最低次の基本パターンが一致するとき、「上から」と「下から」という言葉を省略して「最低次の基本パターン」と呼ぶことにする。

〔命題 13〕 $\langle X, \rightarrow \rangle$ において Y が X の部分集合でループであれば、部分グラフ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ は 1 次の拡張基本パターンで記述できる。

〔証明〕 ループ Y はサイクル表現可能だから明らかである。 ■

〔命題 14〕 $n(>1)$ 次の拡張基本パターンによって記述されるループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ は $n-1$ 次の拡張基本パターンで記述できる。

〔証明〕 $n=2$ のときは命題 13 から明らかなので $n>2$ とする。いま n 次の拡張基本パターンの極大な円弧をもとの推移グラフにおいて終点が小さい順に

Fig. 4 n -th order extended fundamental pattern

Fig. 5 Representative cycle of $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$

Fig. 6 Main path diagram of $\langle Y, \rightarrow \rangle$ using the representative path of $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ として Fig. 4 で考える。ただし $h=i$ または $j=k$ の場合も含めているものとする。 $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$ は命題 3 によってループであり、 $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$ の表現サイクルとして Fig. 5 を考えることができる。ただし $i+1=j$ または $i+1=j-1$ の場合も含めているものとする。 Fig. 5 のサイクル上で x_j の直前の点を x_{j-1}' 、 x_{j-1}' の直前の点を x_{j-2}' とすれば $x_{j-2}'=x_{j-2}$ であるか $x_{j-2}'=x_{h-1}$ であるか $x_{j-2}'=x_{h-2}$ であるか $x_{j-2}'=x_i$ であるかのいずれかであり、いずれの場合も拡張基本パターンの性質によって $x_{j-2}' \rightarrow x_{k+1}$ でなければならない。よってこのサイクルから方向線 $x_{j-2}' \rightarrow x_{j-1}'$ を取り去ってできる $\Gamma(a_1) \cup \Gamma(a_2)$ の表現道を用いて $\langle Y, \rightarrow \rangle$ は Fig. 6 のような主道線図で記述できる。これが $n-1$ 次の拡張基本パターンであることは明らかである。実際、 $a_{1,2}', a_{3,2}'$ が極大な円弧だからである。よって $n(>1)$ 次の拡張基本パターンによって記述されるループは $n-1$ 次の拡張基本パターンで記述できる。 ■

《定理 3》 最低次の基本パターンが $n(>1)$ 次の主道線図で記述されるループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ は最低次の基本パターンが $n-1$ 次の主道線図で記述できる。

〔証明〕 命題 14 において「拡張基本パターン」を

「最低次の基本パターンの主道線図」に置き換えることにより同様に証明できる。 ■

5. ループと擬似区間順序

ループの内部構造を分析するために基本パターンと拡張基本パターンを定義し、それらに基づいて最低次の基本パターンという概念を導入した。この概念は上からと下からのアルゴリズムという現実に可能な手法を用いて極大な部分ループの繋がりを考えている。このことを応用してループから順序に近い情報の抽出を試みる。

【定義 22】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ がつぎの性質を有するとき X の部分集合族 $\{S_i; i=1, 2, \dots, n\}$ は区間順序を構成するという。

(1) 任意の $x \in S_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) に対して $\text{not } (x \rightarrow x)$

(2) 任意の $x, y \in S_i, z, w \in S_j$ ($i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n$) に対して $x \rightarrow y$ かつ $z \rightarrow w$ ならば $w \rightarrow x$ または $y \rightarrow x$ のどちらかが成り立つ。

【定義 23】 $\langle X, \rightarrow \rangle$ がつぎの性質を有するとき X の部分集合族 $\{S_i; i=1, 2, \dots, n\}$ は擬似区間順序を構成するという。

(1) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ($i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n$)

$S_i = \emptyset$ ($i=1, 2, \dots, n-2$)

(2) 任意の $x \in S_i, y \in S_{i+1}$ に対してつぎのいずれかが成り立つ。

(i) $y \rightarrow x$ のときある点列 $\{z_i; i=1, 2, \dots, k\}$ が存在して $x \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_k \rightarrow y$

(ii) $x \rightarrow y$ のときある点列 $\{z'_i; i=1, 2, \dots, k'\}$ が存在して $y \rightarrow z'_1 \rightarrow z'_2 \rightarrow \dots \rightarrow z'_{k'} \rightarrow x$

(3) 任意の $x \in S_i, y \in \bigcup_{j=i+2}^n S_j$ ($i=1, 2, \dots, n-2$) に対して $y \rightarrow x$

区間順序では集合 S_i ($i=1, 2, \dots, n$) がほかの集合 S_j ($i \neq j$) と交わりをもたないため S_i を 1 点と考えると各 i に対して推移則が成り立つ。一方、擬似区間順序では隣接する二つの集合に (2) の (i), (ii) の性質が存在するため区間順序で考えた推移則は成り立たない。しかし各 S_i の i をひとつおきにとれば推移則が成り立つ。その意味で擬似という言葉を使っている。最低次の基本パターンをこの擬似区間順序に結びつけることを考える。

【命題 15】 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の主道線図において最低次の基本パターンを構成する極大な円弧をもとの推移グラフにおいて終点が大きい順に $a_1, a_2, \dots, a_k$ とする。このとき、任意の $x \in \bigcup_{j=i+2}^k \Gamma(a_j) - \Gamma(a_{i+1})$ と

任意の $y \in \Gamma(a_i)$ ($i=1, 2, \dots, k-2$) に対して $x \rightarrow y$ が常に成り立つ。

(証明) $y \rightarrow z$ となる点 z が存在するのは最低次の基本パターンの構成アルゴリズムから $\Gamma(a_1), \Gamma(a_2), \dots, \Gamma(a_{i+1})$ だけである。 $x \notin \Gamma(a_j)$ ($j=1, 2, \dots, i+1$) だから常に $x \rightarrow y$ となる。 ■

【命題 16】 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ の主道線図において最低次の基本パターンを構成する極大な円弧をもとの推移グラフにおいて終点が大きい順に $a_1, a_2, \dots, a_k$ とする。このとき、任意の $x \in \bigcup_{j=i+3}^k \Gamma(a_j) - \Gamma(a_{i+2})$ と任意の $y \in \Gamma(a_i)$ ($i=1, 2, \dots, k-3$) に対して x と y を含む 3 すくみは存在しない。

(証明) x, y 以外の 1 点 z を考える。 $z \in \bigcup_{j=i+3}^k \Gamma(a_j) - \Gamma(a_{i+2})$ のとき $x \rightarrow z$ または $z \rightarrow x$ であるが常に $z \rightarrow y$ となるから $x \rightarrow z \rightarrow y$ または $z \rightarrow x \rightarrow y$ となる。 $z \in \Gamma(a_{i+2})$ のとき $x \rightarrow z \rightarrow y$ となる。 $z \in \Gamma(a_{i+1})$ または $\Gamma(a_i)$ または $\Gamma(a_{i-1})$ のときは $x \rightarrow z \rightarrow y$ または $x \rightarrow y \rightarrow z$ が得られる。 $z \in \bigcup_{j=1}^{i-2} \Gamma(a_j)$ のときは $x \rightarrow y \rightarrow z$ となる。いずれの場合も $\{x, y, z\}$ は推移的 3 点となる。 ■

【系 1】 命題 15 において $\Gamma(a_0) \triangleq \emptyset$ かつ $S_i \triangleq \Gamma(a_i) - \Gamma(a_{i-1})$ ($i=1, 2, \dots, k$) とすれば、任意の $x \in \bigcup_{j=i+2}^k S_j$ と任意の $y \in S_i$ ($i=1, 2, \dots, k-2$) に対して常に $x \rightarrow y$ が成り立つ。

(証明) 命題 15 から明らかである。 ■

【系 2】 系 1 で定義される S_i ($i=1, 2, \dots, k$) において任意の $x \in S_i$ と任意の $y \in \bigcup_{j=1}^{i-2} S_j$ ($i=3, 4, \dots, k$) に対して常に $x \rightarrow y$ が成り立つ。

(証明) 命題 15 と系 1 から明らかである。 ■

【系 3】 $x \in \bigcup_{j=i+3}^k S_j$ かつ $y \in S_i$ ($i=1, 2, \dots, k-3$) であればループ Y に x, y を含む 3 すくみは存在しない。

(証明) 命題 16 から明らかである。 ■

【系 4】 $x \in S_i$ かつ $y \in \bigcup_{j=1}^{i-3} S_j$ ($i=4, 5, \dots, k$) であればループ Y に x, y を含む 3 すくみは存在しない。

(証明) 命題 16 と系 3 から明らかである。 ■

《定理 4》 ループ $\langle Y, \rightarrow \rangle$ が k 次の最低次の基本パターンをもつとき、 k 個の極大な円弧をもとの推移グラフにおいて終点が大きい順に $a_1, a_2, \dots, a_k$ とし $\Gamma(a_0) \triangleq \emptyset, S_i \triangleq \Gamma(a_i) - \Gamma(a_{i-1})$ ($i=1, 2, \dots, k$) とすれば集合族 $\{S_i; i=1, 2, \dots, k\}$ は擬似区間順序を構成する。

Fig. 7 An example of pseudo-interval order

(証明) 集合族 $\{S_i; i=1, 2, \dots, k\}$ が定義23の(1)を満足することは S_i の定義と最低次の基本パターン導出のアルゴリズムから明らかであり, (3)を満足することは系1から明らかである. いま $x \in S_i, y \in S_{i+1}$ を任意にとり, $\Gamma(a_i) \triangleq \{z_j^i; j=1, 2, \dots, l\}$ かつ $\Gamma(a_{i+1}) \triangleq \{z_j^{i+1}; j=1, 2, \dots, l'\}$ とすれば, x と y の関係は以下の三つの場合に分類される. (1) $x \rightarrow y$ のとき; これは $x \in \Gamma(a_i) \cap \Gamma(a_{i+1})$ のときだけ生ずる. S_{i+1} の点で $y \rightarrow z_j^{i+1}$ となる z_j^{i+1} で最小の j を j^* とし, S_i の点で $z_j^i \rightarrow x$ となる z_j^i で最大の j を j^{**} とすれば点列 $y \rightarrow z_{j^*+1}^{i+1} \rightarrow z_{j^*+1}^{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow z_{j^*+1}^{i+1} \rightarrow z_{j^*+1}^{i+1} \rightarrow z_{j^*+1}^{i+1} \rightarrow x$ が得られる. 主道上で点 y と点 x の間には少なくとも1点が存在するので上記点列は必ず存在する. (2) $y \rightarrow x$ かつ $x \in \Gamma(a_i) \cap \Gamma(a_{i+1})$ のとき; 円弧 a_{i+1} の始点を $z_{j^*+1}^{i+1}, x \rightarrow z_j^i$ となる z_j^i で最小の j を j^* , さらに, $z_j^{i+1} \rightarrow y$ となる z_j^{i+1} で最大の j を j^{**} とすれば, 点列 $x \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow \dots \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow y$ が得られる. (3) $y \rightarrow x$ かつ $x \notin \Gamma(a_i) \cap \Gamma(a_{i+1})$ のとき; 円弧 a_{i+1} の始点を $z_{j^*+1}^{i+1}, x \rightarrow z_j^i$ となる z_j^i で最小の j を j^* , さらに $z_j^{i+1} \rightarrow y$ となる z_j^{i+1} で最大の j を j^{**} とすれば, 点列 $x \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow \dots \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow z_{j^*+1}^i \rightarrow y$ が得られる. (2)と(3)のいずれの場合も点 y と点 x の間に少なくとも1点が存在することは明らかなので, それぞれの点列は存在する. 以上(1), (2)および(3)から定義23の(2)の(i)または(ii)が満足されることは明らかである.

擬似区間順序では主道に沿って S_i が並んでいるが, 区間順序のように整然とはしていない. 隣接した集合同志では優劣に関する比較はできないが, 主道上で離れた位置関係にある集合同志では確実に優劣に関して比較できる. このことはわれわれのもつ感覚的判断とよく似た形式であるといえよう. 比較しようとする2点間の差異が少なければ比較は不可能であるが, ある

程度以上差異があれば比較できるからである. 例えば Fig. 7 のような最低次の次数が7次の基本パターンが得られたとき, 擬似区間順序を構成する集合族は $S_1, S_2, \dots, S_7$ となり, 各 S_i ($i=1, \dots, 7$) から代表点 x_i を選ぶと $x_7 \rightarrow x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ および $x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2$ は常に成り立つ. しかしながら隣接する集合 S_i と S_{i+1} からの代表点 x_i と x_{i+1} の間で $x_i \rightarrow x_{i+1}$ となるか $x_{i+1} \rightarrow x_i$ となるかということは最低次の基本パターンから判別することはできない. 全体としてはループを構成しているものでも, 最低次の基本パターンに従って分割するとそのあいまいさが隣接する集合間間のみ割り付けられてしまうことを意味している. そのため分割数を最大にすること, すなわち最低次の基本パターンの次数を最大にすることによってループからできるだけ多くの順序に近い情報を得ることができることになる.

《定理5》 $\langle X, \rightarrow \rangle$ において X の点の数が n であれば最低次の基本パターンの次数はたかだか $\left\lfloor \frac{2}{3}(n-1) \right\rfloor$ である.

(証明) 命題11, 命題12および定理2から明らかである. ■

6. あとがき

ループが与えられたとき, ループを見通しよく処理するために主道線図, 基本パターン, 拡張基本パターンなどを定義した. それによって最低次の基本パターンという実現可能な概念を誘導し, ループを組織的に処理する一つの方法論を得た. これを応用して擬似区間順序という立場からループを分割することが可能になり, 分割された各部分集合の隣接部分にあいまいさを振り分けられるようになった. 従来, ループはあいまいなものを意味するという理由で1点と考えられて商集合として処理されていたが, 最低次の基本パターンの最高次数に相当する個数の部分集合にまでループを分割することが可能であることがわかった.

この結果は等級づけ, 分類, 意思決定など広範な応用領域をもつと考えられる. そのために最低次の基本パターンの次数を最大にするアルゴリズムの開発が今後の課題である.

参考文献

- 1) 森田矢次郎, 他: 評価の過程で現われる循環構造の性質, 17-2, 63/70 (1981)
- 2) 小林彬, 他: 一対比較のための非計量的手法, 計測自動制御学会論文集, 14-2, 83/89 (1979)
- 3) L. A. Zadeh: Fuzzy Sets, Information and Control, 8-6, 338/353 (1965)