複雑な線図形の長さを積分幾何学を用いて測定する 方法に関する理論的・実験的解析†

田 口 東*・岸 本 一 男**・伊 理 正 夫***

Theoretical and Experimental Analysis of a Method for Measuring the Length of a Complex Linear Figure by Means of Crofton's Formula

Azuma TAGUCHI*, Kazuo KISHIMOTO** and Masao IRI***

The length of a linear figure drawn on a plane, such as an urban road map or a river, is usually measured by tracing the figure with a curvimeter. But when the length of a complex figure is measured, the result often varies widely. One of the reasons for this error is that some part of the figure has been traced more than once or not traced at all.

On the other hand, an alternative method based on integral geometry was proposed by Steinhau⁵⁾ which is to count the number of intersection points between the figure and parallel lines superposed on it. The counting is done several times changing the orientation of the parallel lines. By this method, the length can be determined with high accuracy by decreasing the interval d of parallel lines and/or increasing the number of directions m , and when only a rough estimate is needed the time necessary for measuring can be reduced.

In this paper, we derive an estimate of the error in measuring the length of a complex figure by Steinhau's method by theoretical analysis as well as by numerical experiments. Based on this estimate, we show how to choose the appropriate values of d and m in order to achieve the required accuracy. In addition, we propose several conditions in order to minimize the human error in counting the

number of intersection points.

The experimental results show that the method based on integral geometry is better than the method using a curvimeter both in accuracy and in time for some complex figures that are likely to appear in practice.

1. は じ め に

平面上の線図形の長さ、たとえば、ある地域の道路や河川の総延長など、を測るには、キルビメータ (curvimeter) を用いるのが最も普通である。キルビメータが十分に精確で、かつ測定者が十分に注意深ければ、原理的にはいくらでも良い精度で長さを測定できるはずである。しかし、実際には、測定値にはかなりのばらつきがあり、またつぎのような短所がある。

(i) 2倍3倍の時間をかけて測定しても、精度がそれに比例して上がることはない。また、ある程度精度が悪くてよい場合でも、測定時間はあまり短くならない。

(ii) 対象とする図形が複雑であると、二重に測ったり、測り残したりする個所ができやすく、それが原因で、しばしば大きな誤差が生ずる。

(iii) 図が滑りやすい材質の上に描かれている場合など、キルビメータの歯車が滑って測定が困難である。

これに対して、Steinhau⁵⁾ などにより、積分幾何学的な手法による長さの測定法も提案されている。それにはつぎのような特長がある。

(i) 2倍3倍の時間をかけて測定すれば、それに応じて精度があがる。また、ある程度精度が悪くてよければ、測定時間は短くてすむ。

(ii) 対象となる図形がいくら複雑でも、測定を終えた個所を記憶する必要がない。

(iii) 図がどのような材質に描かれている場合でも

† 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会で発表 (昭 54・9)

* 山梨大学工学部 甲府市武田 4-3-11

** 広島大学工学部 広島市中区千田町 3-8-2

*** 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, Yamanashi University, Kofu

** Faculty of Engineering, Hiroshima University, Hiroshima

*** Faculty of Engineering, The University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received May 28, 1980)

(Revised September 12, 1980)

測定は容易である。

本論文では、実際的な対象図形に対し、この Steinhaus の方法の実用性を理論的および実験的に検討してみた。その結果、ここで提案する測定方式に従えば、測定値のバラツキは理論式とよく一致し、測定者の不注意による誤りは少なく、また分岐が多く曲線の追跡が難しい複雑な図形に対しては、キルビメータによる測定法に比較して測定時間、精度ともに優れており、Steinhaus の方法が実用的にも優れた方法であることを報告する。

2. 測定方法

つぎの公式は積分幾何学において Crofton の公式^{1),4)}とよばれ、本論文で検討する方法の基礎となる。

公式：「求長可能な (x, y) 平面上の曲線 C と直線

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p \quad (2.1)$$

との交点数を $n(p, \theta)$ とおくと、 C の長さは

$$L = \frac{1}{2} \int_0^\pi L(\theta) d\theta \quad (2.2)$$

で与えられる。ここで

$$L(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\theta, p) dp \quad (2.3)$$

は C を方向 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を向いた直線に射影した影の長さを多重に写った部分は重複して測ったものである。」

Steinhaus の方法は、(2.2)式を離散近似した式

$$L_\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} L\left(\varphi + \frac{k\pi}{m}\right) \frac{\pi}{m} \quad (2.4)$$

に基づくものである。Fig. 1 に示すように、垂線が方向 $(\cos(\varphi + k\pi/m), \sin(\varphi + k\pi/m))$ を向いた間隔 d の平行線群

$$x \cos\left(\varphi + \frac{k\pi}{m}\right) + y \sin\left(\varphi + \frac{k\pi}{m}\right) = p_k + jd \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots) \quad (2.5)$$

(p_k は各 k ごとに定める定数) を用意し、それらの平

Fig. 1 Parallel lines intersecting curve C

行線と曲線 C との総交点数を $N(\varphi + k\pi/m, p_k)$ とする。このとき、 $L(\varphi + k\pi/m)$ は次式で近似できる。

$$\hat{L}\left(\varphi + \frac{k\pi}{m}, p_k\right) = N\left(\varphi + \frac{k\pi}{m}, p_k\right) d. \quad (2.6)$$

(2.6)式を(2.4)式に代入して、 C の長さの推定値 $\hat{L}$ を得る。

$$\hat{L} = \frac{\pi d}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} N\left(\varphi + \frac{k\pi}{m}, p_k\right) \quad (2.7)$$

以上の手続きにおいて、 $\varphi, p_k (k=0, 1, \dots, m-1)$ を、それぞれ $[0, \pi/m), [0, d]$ から独立にランダムに選ぶことによって、 φ, p_k は独立にそれぞれ $[0, \pi/m), [0, d]$ 上に一様分布する確率変数であると考えられる。 L_φ の期待値は Crofton の公式より、

$$E_\varphi(L_\varphi) = \frac{m}{\pi} \int_0^{\pi/m} L_\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi L(\varphi) d\varphi = L \quad (2.8)$$

であるから、 L_φ は L の不偏推定量である。同様に $N(\varphi + k\pi/m, p_k) d$ は $L(\varphi + k\pi/m)$ の不偏推定量になるので、結局 $\hat{L}$ は L の不偏推定量となる。以上が Steinhaus の提案⁵⁾の要約である。

3. 誤差の理論的解析

3.1 平行線の間隔が十分小さい場合の誤差

前章で述べたように、長さの推定値 $\hat{L}$ は2種類の確率変数(平行線を置く初期角 φ と、原点から平行線におろした垂線の長さ p_k (間隔 d を法とする))の関数である。ここではまず d が十分小さく、 p_k に関する推定誤差が無視できて、 $\hat{L} = L_\varphi$ となる場合を考える。

Steinhaus⁵⁾ は任意の曲線に対して

$$\frac{\frac{\pi}{2m} \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \leq \frac{L_\varphi}{L} \leq \frac{\frac{\pi}{2m}}{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \quad (3.1)$$

が成立することを示し、さらに Moran³⁾ は初期角 φ が $[0, \pi/m)$ に一様分布するとき、誤差 $L_\varphi - L$ の分散の上界が

$$\begin{aligned} \frac{V_\varphi(L_\varphi)}{L^2} &\leq \frac{\pi}{8m \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \\ &\times \left(\frac{\pi}{m} + \sin \frac{\pi}{m} - \frac{8m}{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) \right) \\ &\doteq \frac{\pi^4}{720m^4} \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.2)$$

で与えられることを示した。

Fig. 2 の図形(A)と(C)、1本の直線分、直交する等長な2本の直線分とに対して、標準偏差 $\sqrt{V_\varphi(L_\varphi)}$ を計算した結果を Fig. 3 に示す。Fig. 2 の図形に対

Fig. 2 Figures to be measured

- (A) Ellipses. $L=298$ cm
- (B) Linear figure drawn with a single stroke. $L=263.9$ cm
- (C) Road map of the center of Tokyo. $L=426.7$ cm

しては、区間 $[0, \pi/m)$ を 50 等分してそれぞれの ϕ について L_ϕ を計算し、それらから分散 $V_\phi(L_\phi)$ を計算した。Fig. 3 からつぎのことが読みとれる。

(i) 比較的少ない方向数 m でかなりの精度が得られる。最も悪い図形（直線分）でも方向数を 6 にとれば、誤差を標準偏差にして 1% におさえられる。

(ii) 十分滑らかな図形 (Fig. 2 (A)) に対しては、分散が $O(m^{-4})$ より急速に減少する。（これは、十分滑

Fig. 3 Standard deviation of relative error of the length of a curve when the interval of parallel lines is sufficiently small

Fig. 4 Projection of curve C on line l_0

らかな周期関数に対しては台形則による数値積分がきわめて高い精度をもつという事実を反映している⁷⁾。

(iii) 対称性のよい図形に対しては、その対称軸の本数と方向数 m が互いに素でないとき誤差が大きくなる（直交する 2 線分など）。

(iv) 線分和集合でかける図形に対しては、分散は不規則に上下しながらも、全体としては $O(m^{-4})$ で減少する。

3.2 平行線の間隔に起因する誤差

実際の場合においては、平行線の間隔が誤差の主要な原因となる。平行線の方を固定したとき、 $\hat{L}(\theta, p)$ の分散はつぎようになる。

(x, y) 平面の原点を通り、平行線に直交する直線を l_0 とし、 l_0 上に点 $(0, 0)$ を原点とする直線に沿った座標を導入する。Fig. 4 に示すように、曲線 C を直線 l_0 上に射影した影は線分の和となる。これらの線分の端点の座標を $u_i (i=1, \dots, t)$ とし各線分を $U_h=[u_i,$

u_j ($h=1, \dots, r$) のように表わす。もとの曲線 C の端点、多重点および θ 方向の極大点、極小点が U_h の端点に対応しており、それらを $P(u_i)$ のように表わす。一つの線分 $U_h=[u_i, u_j]$ を取り出すと、平行線との交点数は

$$N_h(\theta, p) = \left[\frac{u_j - p}{d} \right] - \left[\frac{u_i - p}{d} \right]$$

($[x]$ はガウス記号) で与えられる。 p が $[0, d)$ に一様分布することから、 U_h の長さの推定値 $\hat{L}_h(\theta, p)$ の分散はつぎのように計算できる。

$$V_p(\hat{L}_h(\theta, p)) = \text{mod}(u_j - u_i, d) \times (d - \text{mod}(u_j - u_i, d)).$$

C 全体について推定値の分散を求めるために、平行線の間隔 d がある程度小さいときに妥当と思われるつぎの仮定をおく。

【仮定 1】 端点の座標 u_j ($j=1, \dots, t$) は d を法として、互いに独立に $[0, d)$ に一様分布する。

この仮定のもとでは、端点 u_j から、下側でかつ最も近い平行線までの長さ

$$x(u_j, p) = u_j - \left[\frac{u_j - p}{d} \right] d \quad (j=1, \dots, t)$$

は p の値に関わらず、独立に $[0, d)$ に一様分布する。したがって曲線 C の長さの推定値 $\hat{L}(\theta, p)$ の分散は

$$\begin{aligned} V_{p,u}(\hat{L}(\theta, p)) &= V_{p,u} \left(\sum_{U_h} \left(\left[\frac{u_j - p}{d} \right] d - \left[\frac{u_i - p}{d} \right] d - (u_j - u_i) \right) \right) \\ &= V_{p,u} \left(\sum_{U_h} (x(u_j, p) - x(u_i, p)) \right) \\ &= V_{p,u} \left(\sum_{j=1}^t \mu(P(u_j), \theta) x(u_j, p) \right) \\ &= \frac{d^2}{12} \sum_{j=1}^t \mu^2(P(u_j), \theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。ここで $\mu(P(u_j), \theta)$ は射影直線 l_θ 上で端点 u_j を共有する線分の数である。

曲線 C が両端の一致しない連続弧の場合に、(3.3) 式は

$$V(\hat{L}(\theta, p)) = \frac{1}{12} d^2 \{2 + (t-2)2\} = \frac{2t-3}{6} d^2$$

となり Moran の結果³⁾と一致する。

3.3 実際の図形に対する測定誤差

平行線の間隔を d とし、方向数を $[m]$ としたときの測定誤差を考える。前節の仮定 1 におけると同様の前提のもとでつぎの仮定をおく。

【仮定 2】 確率変数 φ, p ($k=0, \dots, m-1$) および平行線と垂直な方向に射影した“曲線 C の影”の端点の射影直線上の座標は互いに独立であるとみなして扱うことができる。

Fig. 5 Standard deviation of relative error of the length of figure 2 (A) measured by Steinhilber's method based on integral geometry. (d denotes the interval of parallel lines and the dashed lines show the right-hand side of equation (3.6))

すると、仮定 2 より次式を得る。

$$\begin{aligned} V_{\varphi,p,u}(\hat{L}) &= V_{\varphi}(L_{\varphi}) + \left(\frac{\pi}{2m} \right)^2 \sum_{k=0}^{m-1} V_{\varphi,p,u} \left(\hat{L} \left(\varphi + \frac{k\pi}{m}, p \right) \right) \\ &= V_{\varphi}(L_{\varphi}) + \frac{\pi}{4m} \int_0^{\pi} V_{p,u}(\hat{L}(\theta, p)) d\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここでは、(3.4) 式右辺第 2 項の積分の評価を考える。曲線 C が区分的に滑らかな連続弧ならば、適当に固定された方向と C の接線とのなす角度を τ 、 τ 方向に平行な接線の数 $\nu(\tau)$ とすると

$$\int_C |d\tau| = \int_0^{\pi} \nu(\tau) d\tau = M \quad (3.5)$$

が成立することが容易にわかる⁴⁾。 M は、 C が 2 階微分可能なら C の曲率 $\kappa(s)$ (s は弧長) を用いて $\int_C |\kappa(s)| ds$ と表わされる量である。以下では曲線 C の多重点は有限個で、すべての多重点で C を分離して得られる弧は区分的に滑らかな連続弧であると仮定し、このような曲線に対して、各部分弧についての (3.5) 式の値の和で M の値を定義する。また $U(i)$ を曲線 C 上で枝が i 本集まっている点の集合、 $|U(i)|$ を $U(i)$ の要素数とする。

以上の定義と (3.3) 式を用いて、(3.4) の右辺第 2 項は

$$\frac{\pi}{4m} \int_0^{\pi} V_{p,u}(\hat{L}(\theta, p)) d\theta$$

Fig. 6 Standard deviation of relative error of the length of figure 2 (C) measured by Steinhau's method based on integral geometry. (d and the dashed lines are the same as those in Fig. 5)

$$= \frac{\pi d^2}{48m} \sum_j \mu^2(P(u_j), \theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi d^2}{48m} \left\{ \sum_{i \neq j} \sum_{V \in U(i)} \int_0^\pi \mu^2(V, \theta) d\theta + 4M \right\} \quad (3.6)$$

のように書ける。(3.6)式の右辺の $\{ \}$ の中の第1項は端点および多重点についての和、第2項は θ 方向の極大点、極小点からの寄与分である。

Fig. 5, Fig. 6 は、それぞれ、Fig. 2 (A), (C) に対し計算機実験(注1)によって相対誤差 $(\hat{L}-L)/L$ の標準偏差を計算し、評価式(3.4)、(3.6)式と比較したものである。この結果から(3.4)、(3.6)式がよい評価を与えていることがわかる。

4. 望ましい実験方式

実際には、前節で検討した理論的に予想しうる誤差のほかに、測定者の不注意による数え違いが生ずる。後者の誤りを減らすには、以下の注意が重要である。

(i) 曲線の分岐点(交差点)を丁度平行線がよぎ

(注1) 図形を覆う 20×20 の等間隔の格子点を平行線群の回転中心とし、平行線群を置く初期角 φ を $[0, \pi)$ の一樣乱数によって定め、 $\varphi, \varphi + \frac{\pi}{36}, \dots, \varphi + \frac{35\pi}{36}$ と回転し、平行線群と曲線との交点数を数え、長さの推定値を計算した。

るような場合は、交点数を1とは数えず、上下わずかにずれたところを通るものと考えて交点数を数える。

(ii) 平行線の色は、測定図形の色と明瞭に区別しうるようにしておく。

(iii) 平行線の間隔は少なくとも1cm以上とする。予備実験では、1cm以下で誤差が急増した。疲労と集中力の低下が原因であると考えられる(5節の図形(CL)と図形(CS)の測定結果も参照のこと)。

また、測定図形が描かれている素材の気温、湿度などの変化による伸縮よりもよい最終精度を得ようとするのは無意味である。たとえば、国土地理院の規格⁶⁾によれば、実際上は1%以上の精度で測定を行うのは意味がない。

以上のような条件を考慮に入れたうえで、“測定の手間”を一定として最もよい精度を達成するにはどうすればよいかを考察する。測定の手間はほぼ数えるべき交点数に比例すると考えられるから、 m/d に比例するとみてよい。そこで、“ $m/d=C=一定$ ”という条件の下で $V(\hat{L})$ を最小にするような m と d の組合せを選ばばよい。 $V_\varphi(L_\varphi)$ が m^{-4} に比例するものと考え

$$V(\hat{L}) = AL^2m^{-4} + Bd^2m^{-1} \quad (4.1)$$

と書ける。ここで A, B は m, d によらない定数である。したがって最適値 $\bar{m}, \bar{d}$ はそれぞれ

$$\bar{m} = \left(\frac{4AL^2C^2}{B} \right)^{1/5}, \quad \bar{d} = \left(\frac{4AL^2}{C^3B} \right)^{1/5}$$

で与えられる。この式から $\bar{m}, \bar{d}$ は A, B, L に対してかなり鈍感であることがわかる。そこで、実際には、(4.1)の第1項が十分小さくなる程度に m を大きく選び、その後 d を定めればよい。実用上 m は4~5にとればよいが、図形の対称性に注意しなければならない。(3.1節-(iii)参照)。

このようにしても、必要な精度に対して、前もって d を決めることは、 B の値が必要なので困難である。そのための一つの方法は、 d をかなり広くとって何回か測定を行い、その分散から B を推定することである。

5. 実験結果

積分幾何学的方法とキルビメータによる計測法とによって、人手で長さを測定した実験結果を述べる。被験者は計12名の男女大学生、測定対象はFig. 2 (A), (B), (C)の図形である。対象図形および平行線群(“平行線トレイスタ”と呼ぶ)はXYプロットを用いて描いた。両者とも伸縮率が0.1%以下の材料を選んだので、伸縮は測定精度に比べて無視してよい。

Fig. 7 Experimental results of relative error and necessary time for measuring figure 2 (A). Each mark corresponds to one experiment of one person. Each arrow is drawn in such a way that its center and length are equal to the average and the twice of the standard deviation of the measurement by means of a parallel-line traceter or a curvimeter

Fig. 8 Experimental results of relative error and necessary time for measuring figure 2 (B). Marks and arrows are drawn in the same way as in Fig. 7

Fig. 9 Experimental results of relative error and necessary time for measuring figure 2 (CL). Marks and arrows are drawn in the same way as in Fig. 7

Fig. 10 Experimental results of relative error and necessary time for measuring figure 2 (CS). Marks and arrows are drawn in the same way as in Fig. 7

積分幾何学的方法については、平行線の間隔 d の測定時間や誤差への影響をみるために、 $d=1.5\text{ cm}$ 、 3 cm 、 4.5 cm の3種について実験した。また図形の大きさの影響をみるために、Fig. 2 (C) (以下 (CL) と記す) を2/3倍にした図 (以下 (CS) と記す) も用意し、これに対しては、 $d=1\text{ cm}$ の測定を行った。被験者の性別や対象図形の測定順序による影響が少なくなるように、図形の測定順序は被験者ごとになるべく異なるようにした。キルビメータによる測定の際には曲線を重複して計測しないよう、ペンでチェックさせ、交点数の計数の際には手動のカウンタを使用させた。また、測定の前には、対象図形に類似した図形を用いて練習を行わせた。

各図形に対する測定結果をそれぞれ Fig. 7～Fig. 10 に示す。横軸は相対誤差、たて軸は測定時間で、各人の測定結果が一つの点で表わしてある。また、平行線の間隔ごと、およびキルビメータによる測定結果をひとまとめとし、それぞれの相対誤差、測定時間について、平均値と標準偏差の2倍とを、各軸方向の矢印の中心とその長さによって表わしてある。また、図下端に描いてある横軸方向の細破線の矢印は3.3節の計算機実験による相対誤差の標準偏差である。

キルビメータと平行線トレイスタによる測定法の優劣に注目すると、図形(A)では優劣はつけ難い。また図形(B)については前者が優れている(これは線分よりなる一筆書き可能な図であることから当然なことであろう)。しかし図形(C)のように分岐が多く曲線の追跡が難しい図形に対しては、後者が測定時間、精度ともに優れていることが本実験よりわかる。

平行線の間隔の影響をみると、 $d=3\text{ cm}$ 、 4.5 cm の場合は、計算機実験による誤差と、人手による誤差とがよく一致しており、“数え違い”の少ない計測方法

Fig. 11 Relation between the time necessary for measuring and number of intersecting points between a parallel line traceter and a figure to be measured

Table 1 Comparison of exact and approximate values of B in equation (4.1)

Figure	B approximate	B exact
(A)	10.6	9.4
(B)	6.6	16.5
(C)	46.5	51.7

であることがわかる。また、これらの場合には、個人差による測定時間のバラツキも小さい。他方 $d=1$ cm, 1.5 cm の場合には、数え違いの影響で測定誤差が計算機実験の場合より大きくなっている。また、図形 (CL) で $d=1.5$ cm と図形 (CS) で $d=1$ cm とを比較すると、図形の大きさと d の比は同一であるにもかかわらず、後者の誤差の標準偏差は前者のその約 1.7 倍であり、適切な測定条件を選ぶことが重要であることがわかる。

キルビメータ、平行線トレイスタを用いる測定法ともに、測定値の平均が真値よりも小さくなっている。これは、前者では角を平滑化して測定してしまうこと、後者では交点数を数え落す誤りのほうが数え過ぎる誤りよりも起りやすいこと、また平行線が丁度分岐点を横切る際の注意が完全には守られなかったためと思われる。

Fig. 11 に、各図形で d を定めたときの総交点数の

期待値と測定時間の平均値の関係を示す。1点当りの所要時間は図形の複雑さにも平行線の間隔にもよらず約 0.65 秒であり、また交点数計測以外の時間が約 110 秒（これは 5 方向に平行線トレイスタを置くための時間が主であると思われる）にかかっている。

Table 1 に (4.1) 式第 2 項の定数 B の、各図形ごとに $d=4.5$ cm の測定結果から計算した値と真値とを示す。図形 (A)、図形 (CL) については両者はよく一致している。

6. あとがき

積分幾何学を用いた長さの測定法の理論的および実験的な解析を行い、複雑な図形に対しては、従来のキルビメータによる方法より優れていることを確認した。

長さの測定に関しては、どの位細かな凹凸まで見るべきかというのも本質的な問題である。この問題に対しても、積分幾何学的な接近法が有用であるが、それについてはまた別の機会に論ずる予定である。

最後に、本研究に際して指導を賜った東京大学名誉教授 森口繁一先生、前東京大学助教授 故奥平耕造博士、ならびに地図用紙などに関する資料をお教えいただいた国土地理院 栗山 稔氏、松田博幸氏に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) W. Blaschke: Vorlesungen über Integralgeometrie, Chelsea Publishing Company, New York (1949)
- 2) 腰塚武志: 道路網と交差点, 都市計画, **103**, 36/41 (1978)
- 3) P. A. P. Moran: Measuring the Length of a Curve, Biometrika, **53**, 359/364 (1966)
- 4) L. A. Santalo: Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley, Massachusetts (1976)
- 5) H. Steinhaus: Zur Praxis der Rektifikation und Längenbegriff, Berichte der sächsischen Academie der Wissenschaften, **82**, 120/130 (1930)
- 6) 鈴木末三郎: 地図用紙について, 地図, **4**, 24/28 (1966)
- 7) 森 正武: 数値解析と複素関数論, 筑摩書房 (1975)