システムの Surjective 分解

高原 康彦*・中野 文平*・飯島 淳一*

Surjective Decomposition of a System

Yasuhiko TAKAHARA*, Bunpei NAKANO and Jun-ici IJIMA*

The decomposition of a complex system is one of the very important problems of systems theory. In this paper we consider the following problem of the decomposition: Given a global system $\hat{S} \subset \bar{X} \times \bar{Y}$ and a class of component subsystems $\{S_i \subset X_i \times Y_i | i=1, 2, \dots, n\}$. Find a necessary and sufficient condition when there exists a complex system representation $S \subset S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ such that $\hat{S}$ is related to S by surjective modelling morphism.

A surjective modelling morphism $h: \hat{S} \rightarrow S$ yields an approximation of the global system $\hat{S}$ in some sense.

In the above problem the complex system representation S is not specialized but can be a general input output system. Problems of practical interest, however, usually require the complex system representation to satisfy some specific properties. As a corollary of the above consideration, therefore, we also treat the case when the complex system representation S is a non-interactede system such that $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.

Finally, as an illustration of the above result we discuss "Stair Case" game which is a typical problem-solving problem of artificial intelligence.

1. はじめに

この論文ではシステムの分解の基礎理論を構築するために, surjective 分解可能となるための条件, および surjective 分解が特に非干渉となる場合について考察する。

参考文献1) でもわれわれは入力—出力システムとそれの complex system 表現との間の関係, 特に分解について考察した。以下 complex system 表現に対応

してもとの入力—出力システムを global system と呼び, それの入力と出力の集合をそれぞれ $\bar{X}$, $\bar{Y}$ とし, global system を $\hat{S} \subset \bar{X} \times \bar{Y}$ と表わす。 $\hat{S}$ の complex 表現というのは, いくつかの system (以下 i 番目の system を $S_i \subset X_i \times Y_i$ と表わす。 X_i , Y_i はそれぞれ S_i の入力集合, 出力集合である) から構成されているシステム S (すなわち complex system) が, $\hat{S}$ と同値であると認識されたときの S である。一般に, $\{S_i \subset X_i \times Y_i | i=1, \dots, n\}$ 上の complex system $S \subset X \times Y$ はつぎのように定義される。

i) $X \subset \prod_{i=1}^n X_i$, $Y \subset \prod_{i=1}^n Y_i$ かつ $\mathcal{D}(S) = \{x | (\exists y)((x, y) \in S)\} = X$, $\mathcal{R}(S) = \{y | (\exists x)((x, y) \in S)\} = Y$ である。

ii) $S \subset \prod_{i=1}^n S_i$ である。すなわち, $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in S$ ならば, 任意の $i(i=1, \dots, n)$ に対して $(x_i, y_i) \in S_i$ である。 $\prod_{i=1}^n S_i$ の要素は $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ であるが, 記法の都合上 $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ と同一視する。

定義から, $\{S_i | i=1, 2, \dots, n\}$ 上の complex system は一意的ではない。global system $\hat{S}$ が後に定義する modelling morphism によって complex system S と関係づけられるとき (これが“同値”の正確な定義である), global system $\hat{S}$ は complex system 表現 S をもつという。参考文献1) でわれわれが問題とした分解は, どのような条件のもとで global system が complex system 表現をもつかということである。global system $\hat{S}$ が complex system 表現 S をもてば, $\hat{S}$ はある意味 (modelling morphism) の意味) で, component subsystem $S_1, \dots, S_n$ から合成されたシステムとみなせる。われわれのこのような問題意識は, 人工知能の分野においてももたれており²⁾, またデータ構造の理論でも論じられている³⁾。complex system を問題とするときに, その分解の問題は避けられないものであり, 各方面でこの論文の思想と同様のものが論じられるようになったのは当然のことである。

* 東京工業大学総合理工学研究科 横浜市緑区長津田町4259

* Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Yokohama

(Received March 5, 1980)

(Revised September 8, 1980)

この論文では参考文献 1) の議論を進めて global system $\bar{S}$ から complex system S への modelling morphism が surjective になる場合と, complex system 表現 S が特に非干渉システムになる場合を考察する. 実用上興味がある問題は complex system 表現 S になんらかの条件がついたものであり, そのときには分解の条件はいっそう複雑になる. 非干渉システムの考察はそのような研究の一つのステップである. また problem-solving に使われる disjunctive complex system 表現 (グラフの積に相当する) と呼ぶ特別の complex system 表現があるが, これはこの論文の応用として次報の予定である.

記法や基本的定義は参考文献 1) に準じているが, 主なものについて以下に述べておく.

【定義 1】 modelling morphism^{1), 4)}

$S \subset X \times Y, S' \subset X' \times Y'$ を一般の入力-出力システムとする. ただし, $\mathcal{D}(S) = X, \mathcal{R}(S) = Y$ とし, S' についても同様の仮定を置く. このとき, 関数 $h_1: X \rightarrow X', h_2: Y \rightarrow Y'$ に対して, $(x, y) \in S \rightarrow (h_1(x), h_2(y)) \in S'$ が成立するならば, $h = (h_1, h_2)$ を S から S' への modelling morphism と呼び $h: S \rightarrow S'$ と書く. 特に, $h_1 \times h_2(S) = S'$ となるとき, h を surjective modelling morphism と呼ぶ(注 1).

complex system S とその component subsystem S_i の間には自然に定義される modelling morphism $\pi_i = (\pi_{1i}, \pi_{2i}): S \rightarrow S_i$ が存在する. すなわち, $\pi_{1i}(x_1, \dots, x_n) = x_i, \pi_{2i}(y_1, \dots, y_n) = y_i$ である. S の定義から π_i が modelling morphism になることは明らかである. π_i を S 上の projective morphism あるいは単に S 上の projection と呼ぶ. 一般に $\pi_i(S) \subset S_i$ であるが, $S_i - \pi_i(S)$ は議論と無関係な部分であるから, それを無視して $\pi_i(S) = S_i$ と仮定する. すなわちこの論文では π_i は surjective modelling morphism である.

つぎにシステムの分解を考える際に有効な covering の概念を定義する²⁾. (付録 2 参照)

【定義 2】 input-output system covering (I/θ system covering)

入力-出力システム $S \subset X \times Y$ の covering $\bar{S} = \{S_\alpha | S_\alpha \subset S \text{ \& } \alpha \in I\}$ (I は適当な添字集合で, $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ である) がつぎの性質をもつとき, $\bar{S}$ を S の input-output system covering (I/θ system covering)

と呼ぶ.

(i) X と Y に covering $\bar{X} = \{X_\beta | X_\beta \subset X \text{ \& } \beta \in I_X\}, \bar{Y} = \{Y_\gamma | Y_\gamma \subset Y \text{ \& } \gamma \in I_Y\}$ および I_X と I_Y の間に relation $I_S \subset I_X \times I_Y$ が存在し ($\mathcal{D}(I_S) = I_X, \mathcal{R}(I_S) = I_Y$).

(ii) $\bar{S}$ と $\{X_\beta \times Y_\gamma | (\beta, \gamma) \in I_S\}$ は 1 対 1 対応 $\varphi: I_S \rightarrow I$ によってつぎのように関係づけられる. すなわち, $(X_\beta \times Y_\gamma) \cap S = S_{\varphi(\beta, \gamma)}$. 特に $\bar{S}, \bar{X}, \bar{Y}$ が (集合の) 分割であるとき, I/θ system covering を I/θ system partition と呼ぶ(注 2).

この定義における I_S を covering (partition) $\bar{S}$ の associated input-output system (associated I/θ system) と呼ぶ.

つぎに modelling morphism と I/θ system partition についてこの論文で必要とする性質を補題の形で述べておく.

以下この論文では, 関数 $f: A \rightarrow B$ に対し, A/f によって A の分割 $\{[a] | a \in A\}$, ただし $[a] = \{a' | f(a) = f(a')\}$, を表わす.

【補題 1】 modelling morphism の合成は modelling morphism である. 特に surjective modelling morphism の合成は, surjective modelling morphism である. ただし, modelling morphism $h = (h_1, h_2)$ と $h' = (h'_1, h'_2)$ との合成 $h' \circ h$ は, $h' \circ h = (h'_1 \circ h_1, h'_2 \circ h_2)$ で定義する. $h'_1 \circ h_1, h'_2 \circ h_2$ は関数の合成である.

以下すべての証明は付録 1 にまとめてある.

【補題 2】 modelling morphism $h = (h_1, h_2): S \rightarrow S'$ によって生ずる分割 $S/h_1 \times h_2$ は I/θ system partition である(注 3). またこれに対応する S の入力集合 X と出力集合 Y の分割 $\bar{X}, \bar{Y}$ は, $\bar{X} = X/h_1, \bar{Y} = Y/h_2$ であり, associated I/θ system I_S は $I_S \subset X/h_1 \times Y/h_2$ となる relation で, $([x], [y]) \in I_S \leftrightarrow ([x] \times [y]) \cap S \neq \emptyset$ で与えられる. I_S と $S/h_1 \times h_2$ との間の 1 対 1 対応 φ は, $\varphi([x], [y]) = [(x, y)]$ である. ただし $(x, y) \in S$ かつ $[x] = [x], [y] = [y]$ である.

2. surjective decomposition

この章では global system $\bar{S}$ の分解として, global system $\bar{S}$ がある complex system S と surjective modelling morphism で関係づけられるための条件に

(注 1) $h_1 \times h_2: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ は, $h_1 \times h_2(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$ である. 以下記法の簡単化のために $h_1 \times h_2(x, y)$ の代りに $h(x, y)$ と書くことがある.

(注 2) 以下分割というのは集合の分割を意味する.

(注 3) $S/h_1 \times h_2 = \{[(x, y)] | (x, y) \in S\}$. ただし $[(x, y)] = \{(x', y') | h_1 \times h_2(x, y) = h_1 \times h_2(x', y') \text{ \& } (x', y') \in S\}$.

ついて考察する。

はじめに基本的な定義を行う。

【定義 3】 surjective complex system 表現

$\hat{S} \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ を global system とする。 $S \subset X \times Y$ を $\{S_i \subset X_i \times Y_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ 上の complex system とする。このとき modelling morphism $h=(h_1, h_2): \hat{S} \rightarrow S$ が存在し、 $h(\hat{S})=S$ となるならば、 S を $\hat{S}$ の order n の surjective complex system 表現と呼ぶ。

一般に $\hat{S}$ は種々のシステムの性質、たとえば因果性、定常性などをもち、またその場合には対応する complex system 表現あるいはその component subsystem S_i も $\hat{S}$ の性質をもつ必要がある。それに伴い modelling morphism も単なる関数の組ではなくなるが、この論文では global system の分解の基本的性質のみに注目しているので、 $\hat{S}$ のシステムの性質は問題としない。なお、complex system 表現のより具体的な意味については、参考文献 1) を参照されたい。

つぎに global system $\hat{S}$ が surjective complex system 表現 S をもつための必要十分条件を与える。

【定理 1】 global system $\hat{S} \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ が $\{S_i \subset X_i \times Y_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ の上に定義された order n の surjective complex system 表現 $S \subset X \times Y$ をもつための必要十分条件は、 $\hat{S}$ の分割の族 $\hat{P}=\{P_i \mid P_i$ は $\hat{S}$ の分割 & $i=1, 2, \dots, n\}$ が存在し、つぎの条件が成立することである。

- (i) 各 P_i は I/θ system partition である。
- (ii) 各 P_i の associated I/θ system $\hat{S}_i$ から S_i に surjective modelling morphism $k_i=(k_{1i}, k_{2i}): \hat{S}_i \rightarrow S_i$ がある。

この定理の意味は次章で例によって説明する。

complex system 表現が一般形ではなく、特別の形をとる場合に $\hat{S}$ がどのような性質をもつかということは、実用上重要な問題である。ここではシステムのもっとも単純な分解である非干渉システムへの分解について考察する。

【定義 4⁰】 (surjective) non-interacted system 表現

$\hat{S} \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ を global system とする。このとき $\{S_i \subset X_i \times Y_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ 上の complex system 表現 $S \subset X \times Y$ が、 $S=\prod_{i=1}^n S_i$ となるならば、これを $\hat{S}$ の order n の non-interacted system 表現と呼び、特に modelling morphism $h=(h_1, h_2): \hat{S} \rightarrow S$ が $h(\hat{S})=S$ となるとき、 S を $\hat{S}$ の order n の surjective non-interacted system 表現と呼ぶ。non-interacted system はまったく独立の n 個の入力-出力システム

Fig. 1 Global system S associated and I/θ system $\hat{S}_i$

を形式的にまとめて complex system としたものである。

われわれは complex system 表現 $S \subset X \times Y$ が non-interacted system 表現となるための条件として、 S が弱非システム干渉的かつ非プロセス干渉的であることが必要十分であることをすでに示した⁵⁾。この論文では定理 1 と同様に、global system $\hat{S} \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ が order n の surjective non-interacted system 表現をもつための条件について考察する。

non-interacted system 表現については、つぎの補題が成立する。

【補題 3】 $S \subset X \times Y$ を $\{S_i \subset X_i \times Y_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ 上の non-interacted system 表現とする。このとき、 $X=\prod_{i=1}^n X_i$ かつ $Y=\prod_{i=1}^n Y_i$ である。

global system $\hat{S}$ が surjective non-interacted system 表現 S をもつための条件は、つぎの定理で与えられる。

【定理 2】 global system $\hat{S} \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ が $\{S_i \subset X_i \times Y_i \mid i=1, 2, \dots, n\}$ の上に定義された order n の surjective non-interacted system 表現をもつための必要十分条件は、 $\hat{S}$ の分割の族 $\hat{P}=\{P_i \mid P_i$ は $\hat{S}$ の分割 & $i=1, 2, \dots, n\}$ が存在し、つぎの条件が成立することである。

- (i) 各 P_i は I/θ system partition である。
- (ii) 各 P_i の associated I/θ system $\hat{S}_i$ から S_i へ surjective modelling morphism $k_i=(k_{1i}, k_{2i}): \hat{S}_i \rightarrow S_i$ がある。
- (iii) 各 $\hat{S}_i$ から、 $([x_i]_i, [y_i]_i)$ を任意に一個ずつ選べば、 $x \in \bigcap_{i=1}^n [x_i]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y_i]_i$, $(x, y) \in \hat{S}$ となる (x, y) が存在する。

この定理と先の定理を比較してわかるように、complex system 表現に non-interacted の条件をつ

Fig. 2 Component subsystem S_i と Complex system 表現 S

けることで、条件 (iii) が生じているわけで、この条件 (iii) が non-interacted system 表現への分解において本質的である。

3. 例題と定理 1 の意味

この章では“Stair Case”と呼ばれるゲーム²⁾を例に用いて、定理 1 の意味を考えてみよう。“Stair Case”とは 2 人ゲームで、階段上に棒が何本かずつ乗っている状態から出発し、すべての棒を最下段に最後に降ろした者が勝ちというゲームである。許される動きは、何段目かの棒を何本でもよいから、すぐ下の段に降ろすというもので、最下段にある棒は動かすことができない。ゲームの性質から偶数段目の棒の数がこのゲームの鍵となっている²⁾。

さて具体的に、階段が 4 段あり棒が偶数段上に 1 本ずつ乗っている状態を初期状態としたゲームの動きを追ってみよう。ゲームの状態を、 i 段目の棒の数を x_i として、 $x_1 x_2 x_3 x_4$ で表す。初期状態 0101 から始まるゲームの木は Fig. 1 (a) のようになる。ここでこのゲームの状態遷移を入力-出力システム global system として認識し、それを surjective modelling morphism によって分解することを考えてみよう。global system $S \subset \bar{X} \times \bar{Y}$ において、 $\bar{X} = \{0101, 0110, 1001, 1010, 0200, 1100\}$ 、 $\bar{Y} = \{0110, 1001, 1010, 0200, 1100, 2000\}$ であり、 $\hat{S}$ は Fig. 1 (a) の矢印で示した 2 項関係である。たとえば $(0101, 1001) \in \hat{S}$ 。

つぎに偶数段上の棒の数の変化にのみ注目して、component subsystem S_1, S_2 を構成する。 $S_1 = \{(1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 1)\}$ 、 $S_2 = \{(1, 1), (1, 0), (0, 0)\}$ である。(Fig. 2(a), (b)。ここでた

Table 1 Definition of k_i

$\mathcal{X}_i$	$k_{1i}(\mathcal{X}_i)$	$\mathcal{Q}_i$	$k_{2i}(\mathcal{Q}_i)$
$\{1001\}_1$	0	$\{1001\}_1'$	0
$\{0101\}_1$	1	$\{0110\}_1'$	1
$\{0200\}_1$	2	$\{0200\}_1'$	2

$\mathcal{X}_2$	$k_{12}(\mathcal{X}_2)$	$\mathcal{Q}_2$	$k_{22}(\mathcal{Q}_2)$
$\{0110\}_2$	0	$\{0110\}_2'$	0
$\{0101\}_2$	1	$\{1001\}_2'$	1

Table 2 Definition of h

$\hat{X}$	$h_1(\hat{X})$	$\hat{Y}$	$h_2(\hat{Y})$
0101	(1, 1)		
1001	(0, 1)	1001	(0, 1)
0110	(1, 0)	0110	(1, 0)
1010	(0, 0)	1010	(0, 0)
0200	(2, 0)	0200	(2, 0)
1100	(1, 0)	1100	(1, 0)
		2000	(0, 0)

とえば、 $(1, 0) \in S_1$ は 2 段目の棒の数が 1 本から 0 本に変化するという $\hat{S}$ の状態遷移に対応している。 $\hat{S}$ がこれらの component subsystem 上に surjective complex system 表現をもつということを、定理の条件をチェックすることによって確かめてみよう。

まず、 $\bar{X}, \bar{Y}$ の偶数段上での棒の数に注目して、おのおの二つの分割 $\mathcal{X}_i, \mathcal{Q}_i (i=1, 2)$ を構成する。各 $\mathcal{X}_i, \mathcal{Q}_i$ は $2i$ 段目における棒の数が等しいという関係で、 $\bar{X}, \bar{Y}$ を分割したものである。すなわち、 $\mathcal{X}_1 = \{\{0101\}_1, \{1001\}_1, \{0200\}_1\}$ 、 $\mathcal{X}_2 = \{\{0101\}_2, \{0110\}_2\}$ 、 $\mathcal{Q}_1 = \{\{0110\}_1', \{1001\}_1', \{0200\}_1'\}$ 、 $\mathcal{Q}_2 = \{\{1001\}_2', \{0110\}_2'\}$ であり、ここでたとえば $\{0101\}_1 \in \mathcal{X}_1$ は、 $\{0101\}_1 = \{0101, 0110, 1100\}$ であり、いずれも $\bar{X}$ において第 2 段目の棒の数が等しい。

つぎに $2i$ 段目の棒の数に注目して $\hat{S}$ を分割し、associated I/θ system $\hat{S}_i$ を構成する。各 $\hat{S}_i$ は Fig. 1 (b), (c) のようになり、明らかに associated I/θ system となっている。

つぎに $\hat{S}_i$ から S_i への modelling morphism k_i を Table 1 のように定義する。Fig. 1 (b), (c) の $\hat{S}_i$ における⑥は k_i の値を示し、これから Fig. 1 (b), (c) と Fig. 2 (a), (b) の対応を考えれば、 k_i が surjective であることがわかる。

以上のように、定理 1 の条件がすべて満足されているので、したがって $\hat{S}$ は $\{\hat{S}_i | i=1, 2\}$ 上に surjective complex system 表現をもつ。実際、定理の証明の手

順に従って、 $S' \subset \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$ を構成すれば、 $S \subset S_1 \times S_2$ は、 $S = \{(11, 01), (11, 10), (01, 00), (10, 20), (20, 10), (10, 00), (20, 00), (00, 10)\}$ となる。(Fig. 2(c)). また、 $h = (h_1, h_2)$ は、 $h_1: \hat{X} \rightarrow X$ を $h_1(x) = (k_{11}[x]_1, k_{1,2}[x]_2)$, $h_2: \hat{Y} \rightarrow Y$ を $h_2(y) = (k_{21}[y]_1, k_{2,2}[y]_2)$ と定義する (Table 2). Fig. 1 (a) の $\hat{S}$ における ㉔ は h の値を示している。Fig. 1 (a) と Fig. 2 (c) を比較してわかるように、 $h(\hat{S}) = S$ となっており、 S は $\hat{S}$ の surjective complex system 表現となっている。

4. 結 論

この論文では、global system $\hat{S}$ が surjective complex system 表現をもつためには、 $\hat{S}$ がどのような性質をもつべきかについて考察した。参考文献 2) のように、 $\hat{S}$ を分解し単純化して取り扱うという視点からこの形の分解は重要である。

また、実用的に重要な complex system 表現は特別な形になっており、分解の理論が有効となるためには、そのようなことを考慮して研究を進めなければならない。しかし、定理 2 の証明が示すように、これは決して容易な作業ではない。この論文では complex system 表現が non-interacted system 表現になる場合について考察したが、disjunctive complex system 表現になる場合は、problem solving への応用として重要であり、これについては次報の予定である。

参 考 文 献

- 1) 高原康彦：Complex System 表現認識の意味、計測自動制御学会論文集，16-5，674/679 (1980)
- 2) R. Banerji: Artificial Intelligence, North Holland (1980)
- 3) J. Paredaens: On the Expressive Power of the Relational Algebra, Information Processing Letters, 7-2, 107/111 (1978)
- 4) 高原康彦，中野文平：一般システムのモデリング，オペレーションズ・リサーチ 秋季大会予稿集 (1977)
- 5) 高原康彦，中野文平：Complex System の相互干渉，計測自動制御学会論文集，16-1 21/27 (1980)
- 6) M. D. Mesarovic and Y. Takahara: General Systems Theory, Academic Press (1974)

《付 録 1》

補題 1 の証明 定義をチェックすれば明らかである。

補題 2 の証明 参考文献 1) 参照

定理 1 の証明 まず必要性を示す。 $S \subset X \times Y$ を $\{S_i \subset X_i \times Y_i | i=1, 2, \dots, n\}$ 上の $\hat{S}$ の order n の surjective complex system 表現とし、surjective modelling morphism を $h = (h_1, h_2): \hat{S} \rightarrow S$ とする。いま S 上の projection $\pi_i = (\pi_{1i}, \pi_{2i}): S \rightarrow S_i$ も

surjective modelling morphism だから、補題 1 より $\pi_i \circ h$ は surjective modelling morphism である。したがって補題 2 より、 $P_i = \hat{S} / \pi_{1i} \circ h_1 \times \pi_{2i} \circ h_2$ は I/θ system partition である。各 P_i の associated I/θ system $\hat{S}_i = \hat{S} / \pi_i \circ h$ は、 $([x]_i, [y]_i) \in \hat{S}_i \leftrightarrow (\exists (x, y)) ((x, y) \in \hat{S} \text{ \& } x \in [x]_i \text{ \& } y \in [y]_i)$ で与えられる。 $[x]_i, [y]_i$ は P_i での x と y の同値類である。 $\hat{S}_i$ の入力集合、出力集合をそれぞれ X_i, Y_i で表わすと、 $X_i = \hat{X} / \pi_{1i} \circ h_1$, $Y_i = \hat{Y} / \pi_{2i} \circ h_2$ である。

つぎに $k_i = (k_{1i}, k_{2i}): \hat{S}_i \rightarrow S_i$ を定義する。 $k_{1i}: X_i \rightarrow X_i$ は $k_{1i}([x]_i) = \pi_{1i} \circ h_1(x)$ であり、 $k_{2i}: Y_i \rightarrow Y_i$ は $k_{2i}([y]_i) = \pi_{2i} \circ h_2(y)$ とする。 X_i, Y_i の定義から k_{1i}, k_{2i} は well-defined である。 $([x]_i, [y]_i) \in \hat{S}_i$ ならば、 $(\exists (x, y)) ((x, y) \in \hat{S} \text{ \& } x \in [x]_i \text{ \& } y \in [y]_i)$ であり、 $\pi_i \circ h$ modelling morphism であるから、 $\pi_i \circ h(x, y) = (\pi_{1i} \circ h_1(x), \pi_{2i} \circ h_2(y)) \in S_i$ となる。いま $x \in [x]_i$ \& $y \in [y]_i$ より、 $\pi_{1i} \circ h(x) = \pi_{1i} \circ h_1(x)$, $\pi_{2i} \circ h(y) = \pi_{2i} \circ h_2(y)$ であるから、 $k_{1i}([x]_i, [y]_i) = (\pi_{1i} \circ h_1(x), \pi_{2i} \circ h_2(y)) = (\pi_{1i} \circ h_1(x), \pi_{2i} \circ h_2(y)) \in S_i$ となる。ゆえに k_i は modelling morphism である。さらに、任意の $(x, y) \in S_i$ に対して、 $\pi_i \circ h$ は surjective だから $\pi_i \circ h(x, y) = (x, y)$ となる $(x, y) \in \hat{S}$ が存在する。ここで $([x]_i, [y]_i) \in \hat{S}_i$ より、 $k_i([x]_i, [y]_i) = (\pi_{1i} \circ h_1(x), \pi_{2i} \circ h_2(y)) = (x, y)$ となる。ゆえに k_i は surjective modelling morphism である。

つぎに十分性を示す。 I/θ system partition $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ が与えられたとし、その associated I/θ system を $\hat{S}_i$ とする。 $S' \subset \prod_{i=1}^n \hat{S}_i$ をつぎのように定義する。 $(([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n)) \in S' \leftrightarrow$
 i) 任意の i について $([x]_i, [y]_i) \in \hat{S}_i$, ii) $(\exists (x, y)) (x \in \bigcap_{i=1}^n [x]_i \text{ \& } y \in \bigcap_{i=1}^n [y]_i \text{ \& } (x, y) \in \hat{S})$. $l: \hat{S} \rightarrow S'$ をつぎのように定義する。 $l_1: \hat{X} \rightarrow X'$ は、 $l_1(x) = ([x]_1, \dots, [x]_n)$, $l_2: \hat{Y} \rightarrow Y'$ は $l_2(y) = ([y]_1, \dots, [y]_n)$, ただし X', Y' は S' の入力集合、出力集合である。任意の $(x, y) \in \hat{S}$ に対して $([x]_i, [y]_i) \in \hat{S}_i$ であり、 $x \in \bigcap_{i=1}^n [x]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y]_i$ であるから $l(x, y) = (([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n)) \in S'$ となる。したがって l は well-defined (すなわち modelling morphism) となる。また任意の $(([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n)) \in S'$ に対して、 S' の定義から $x \in \bigcap_{i=1}^n [x]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y]_i$, $(x, y) \in \hat{S}$ となる (x, y) が存在するので、この (x, y) に対して $l(x, y) = (([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n)) = (([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n))$ となり、 l は surjective modelling morphism である。

つぎに $\{S_i\}$ 上の complex system 表現 $S \subset \prod_{i=1}^n S_i$ を以下のように定義する. $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in S \leftrightarrow i)$ 任意の i について $(x_i, y_i) \in S_i$, ii) 任意の i について $k_i([x_i']_i, [y_i']_i) = (x_i, y_i)$ となるような $(([x_1']_1, \dots, [x_n']_n), ([y_1']_1, \dots, [y_n']_n)) \in S'$ が存在する. $h = (h_1, h_2): \hat{S} \rightarrow S$ をつぎのように定義する. $h_1: \hat{X} \rightarrow X$ は $h_1(x) = (k_1 \pi_1 / l_1(x))$, $h_2: \hat{Y} \rightarrow Y$ は $h_2(y) = (k_2 \pi_2 / l_2(y))$, ただし X, Y は S の入力集合, 出力集合で, $\pi_i' = (\pi_{1i}', \pi_{2i}')$ は S' 上の projection であり, これは容易に示せることだが, surjective modelling morphism である. また, $(k_i \pi_i' / l_i(x))$ はベクトル表現 $(k_{11} \pi_{11}' / l_1(x), \dots, k_{1n} \pi_{1n}' / l_1(x))$ を表わし, $(k_2 \pi_2 / l_2(y))$ も同様とする. 以下誤解を生じないかぎり, このような表現を用いる. 任意の $(x, y) \in \hat{S}$ に対して, $l(x, y) \in S'$ であり, $\pi_i' / ol(x, y) \in \hat{S}_i$ であり, $k_i \pi_i' / ol(x, y) \in S_i$ であるから, 任意の i について $(k_1 \pi_1 / l_1(x), k_2 \pi_2 / l_2(y)) \in S_i$ である. また $l(x, y) \in S'$ より, $(([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n)) \in S'$ かつ $k_i([x]_i, [y]_i) = (k_1 \pi_1 / l_1(x), k_2 \pi_2 / l_2(y))$ となるから, $h(x, y) \in S$ となるので, h は well-defined である. 一方, 任意の $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in S$ に対して, S の定義から任意の i について $k_i([x_i']_i, [y_i']_i) = (x_i, y_i)$ となるような $(([x_1']_1, \dots, [x_n']_n), ([y_1']_1, \dots, [y_n']_n)) \in S'$ が存在する. ここで, S' の定義から, $x \in \bigcap_{i=1}^n [x_i']_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y_i']_i$, $(x, y) \in \hat{S}$ となる (x, y) が存在するので, この (x, y) に対して $h(x, y) = ((k_1 \pi_1 / l_1(x)), (k_2 \pi_2 / l_2(y))) = ((k_1 [x]_1), (k_2 [y]_1)) = ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ となり, h は surjective modelling morphism である. したがって S は $\hat{S}$ の order n の surjective complex system 表現である.

(Q. E. D.)

補題3の証明 X についてのみ示す. $X \subset \prod_{i=1}^n X_i$ は定義から明らかなので, $X \supset \prod_{i=1}^n X_i$ を示す. いま $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ に対して, $x_i \in X_i$ かつ $\mathcal{D}(S_i) = X_i$ より, ある $y_i \in Y_i$ が存在して $(x_i, y_i) \in S_i$ となる. このような y_i を各 i について集めれば, $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in \prod_{i=1}^n S_i = S$ となる. したがって, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(S) = X$ となり, $X \supset \prod_{i=1}^n X_i$ である. Y についても同様である.

(Q. E. D.)

定理2の証明 まず必要性を示す. $\{S_i \subset X_i \times Y_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ 上の non-interacted system 表現を $S \subset X \times Y$ とする. ここで $S = \prod_{i=1}^n S_i$ である. $h = (h_1, h_2): \hat{S} \rightarrow S$ を surjective modelling morphism とする. 条件(i), (ii)は定理1と同様にして証明できるの

で, 条件(iii)のみを考察する.

各 $\hat{S}_i$ から $([x_i]_i, [y_i]_i)$ を1個ずつ選ぶと, $x_i \in X$ より $\pi_{1i} h_1(x_i) \in X_i$ であり, 補題3から $X = \prod_{i=1}^n X_i$ より, $(\pi_{1i} h_1(x_i)) \in X$ である. いま h は surjective modelling morphism であるから, $h_1: \hat{X} \rightarrow X$ は surjection である¹⁾. したがって, $h_1(x) = (\pi_{1i} h_1(x_i))$ となる $x \in \hat{X}$ が存在する. ここで $\pi_{1i} h_1(x) = \pi_{1i} h_1(x_i)$ であることから, 任意の i について $x \in [x_i]_i$ となり, $\bigcap_{i=1}^n [x_i]_i \neq \emptyset$ となる. 同様にして, $\bigcap_{i=1}^n [y_i]_i \neq \emptyset$ である. つぎに, $x \in \bigcap_{i=1}^n [x_i]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y_i]_i$ を任意に選べば, $\pi_{1i} h_1(x) = \pi_{1i} h_1(x_i)$, $\pi_{2i} h_2(y) = \pi_{2i} h_2(y_i)$ が成立する. ここで, $([x_i]_i, [y_i]_i) \in \hat{S}_i$ より, 定理1の証明で示したように $(\pi_{1i} h_1(x_i), \pi_{2i} h_2(y_i)) \in S_i$ であるから, $(h_1(x), h_2(y)) \in \prod_{i=1}^n S_i = S$ である. いま h は surjectiveだから, $h(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$ となる $(x, y) \in \hat{S}$ が存在する. したがってこの (x, y) について, $\pi_{1i} h_1(x) = \pi_{1i} h_1(x) = \pi_{1i} h_1(x_i)$, $\pi_{2i} h_2(y) = \pi_{2i} h_2(y) = \pi_{2i} h_2(y_i)$ となるから, $x \in \bigcap_{i=1}^n [x_i]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y_i]_i$ となる.

つぎに十分性を示す. $\hat{S}_i$ を P_i の associated I/O system とし, $S' = \prod_{i=1}^n \hat{S}_i$ とする. $l = (l_1, l_2): \hat{S} \rightarrow S'$ を定理1と同様に定義すれば, これは well-defined である. また, 任意の $([x_1]_1, \dots, [x_n]_n), ([y_1]_1, \dots, [y_n]_n) \in S'$ に対して, $([x_i]_i, [y_i]_i) \in \hat{S}_i$ であるから, 条件(iii)より $x \in \bigcap_{i=1}^n [x_i]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y_i]_i$, $(x, y) \in \hat{S}$ となる (x, y) が存在する. したがって, この (x, y) に対して $l(x, y) = (([x]_1, \dots, [x]_n), ([y]_1, \dots, [y]_n)) = (([x_1]_1, \dots, [x_n]_n), ([y_1]_1, \dots, [y_n]_n))$ となるから, l は surjective modelling morphism である.

つぎに $S = \prod_{i=1}^n S_i$ とし, $k_i = (k_{1i}, k_{2i}): \hat{S}_i \rightarrow S_i$ を surjective modelling morphism, $\pi_i' = (\pi_{1i}', \pi_{2i}')$: $S' \rightarrow \hat{S}_i$ を S' 上の projection とする. $h = (h_1, h_2): \hat{S} \rightarrow S$ を定理1と同様に, つぎのように定義する. $h_1: \hat{X} \rightarrow X$ は $h_1(x) = (k_{11} \pi_{11}' / ol_1(x))$, $h_2: \hat{Y} \rightarrow Y$ は $h_2(y) = (k_{21} \pi_{21}' / ol_2(y))$ とする. 明らかに h は well-defined である. また, $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in S$ に対して $(x_i, y_i) \in S_i$ であり, k_i は surjective だから $k_i([x_i]_i, [y_i]_i) = (x_i, y_i)$ となる $([x_i]_i, [y_i]_i) \in \hat{S}_i$ が存在する. このような $([x_i]_i, [y_i]_i)$ を各 i に対して選べば, 条件(iii)より $x \in \bigcap_{i=1}^n [x_i]_i$, $y \in \bigcap_{i=1}^n [y_i]_i$ となる $(x, y) \in \hat{S}$ が存在するから, この (x, y) について, $h(x, y) = ((k_{11} \pi_{11}' / l_1(x)), (k_{21} \pi_{21}' / l_2(y))) = ((k_{11}([x]_1), (k_{21}([y]_1))) = ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ となる. ゆえに, h は surje-

ctive modelling morphism である。したがって S は $\bar{S}$ の order n の surjective non-interacted system 表現である。
(Q. E. D.)

《付 録 2》

ここでは、簡単化のため I/θ system partition について、例を用いて説明しよう。Fig. 3 (a) のように与えられた入力-出力システム S の分割 $\bar{S} = \{S_\alpha | \alpha \in I = \{1, 2, \dots, 5\}\}$ について考えてみよう。Fig. 3 (b) のように X の分割 $\bar{X} = \{X_\beta | \beta \in I_X = \{1, 2, 3\}\}$ と、 Y の分割 $\bar{Y} = \{Y_\gamma | \gamma \in I_Y = \{1, 2\}\}$ を定め、 I_X と I_Y の間の relation $I_S \subset I_X \times I_Y$ を、 $I_S = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ と定める。ここで $\varphi: I_S \rightarrow I$ を Table 3 のように定義すれば、1対1対応になっているので、したがって定義より、先に与えた S の分割 $\bar{S}$ は、 I/θ system partition である。

Fig. 3 An example of I/θ system partition K_i

Table 3 Definition of φ

I_S	$\varphi(I)$
(1, 1)	1
(2, 1)	2
(2, 2)	3
(3, 1)	4
(3, 2)	5