マニピュレータの作業座標フィードバック制御†

竹 垣 盛 一*・有 本 卓*

A Feedback Control of Task-Oriented Coordinate for Manipulators

Morikazu TAKEGAKI* and Suguru ARIMOTO*

In this paper we consider the dynamic control of manipulators from the view point of mechanics, and propose a new method for task-oriented coordinate control which does not require a transformation from task-oriented coordinates to joint angles. The proposed method can be easily implemented by a micro-computer and suited to the sensor feedback control. Furthermore, it is shown that the proposed method is applicable even when holonomic constraints are added to the system, and when redundancy or singularity arises in the relation between task-oriented coordinates and joint angles. Effectiveness of the proposed method is verified by computer simulation utilizing an arm model with four degrees of freedom.

1. ま え が き

一般に、計算機制御によって多関節形のマニピュレータにある作業を行わせたいとき、普通、その作業の状態を記述するのに適した座標系（作業座標）を設定し、この座標系で作業を計画することからはじめる¹⁾。従来は、たいてい、この作業座標のデータが各関節角度に変換され、各関節ごとのサーボ系に指令値として送られていた¹⁾。この作業座標から関節角度への変換はマニピュレータの自由度配分や機構によって異なるが、一般に非常に複雑で膨大な量の計算を伴う²⁾。またセンサによって作業座標が実時間で測定できるときには、なるべく生のデータをフィードバックする方が精度の面で好ましい。一方、高瀬によって、マニピュレータの運動成分を各作業座標ごとに分解し、各成分を制御する方式が開発されている³⁾が、この方式は、

マニピュレータのダイナミクスがもつ複雑な非線形項を実時間で補償することを前提とし、また作業座標の関節によるヤコビ行列の逆行列を含んでいるので、処理時間の点で実用的には難があると思われる。そのほかにも制御系設計の見通しをよくするために、非線形性の実時間補償によってシステムを強制的に線形化する方法が試みられているが^{4)~6)}、これらの制御方式の性能はダイナミクスの数式モデルの精度に依存しているので、パラメータの変動などで実際のダイナミクスとの誤差が大きくなると補償計算の効果を評価するのは難しい。またシステムの力学的な構造については、あまり注目されていないが、作業座標制御の実用化のためには、動力学的な観点から制御系の構造的な性質を見直してみることも必要であると思われる。

本論文では動力学的な観点から作業変数制御を考察し、実時間処理の点で十分実用的であり物理的な意義も明確な一制御方式を提案している。本方式はマニピュレータの自由度が作業に対して冗長性をもつ場合や、逆にヤコビ行列が singular になって到達不可能な作業座標が出てくる場合にも自然に対処しうる。さらに、作業対象から力学的に拘束を受ける場合にも、システムの構造の変化にもかかわらず、その有効性は失われない。また、本方式はそのままの形で軌道追従制御にも用いることができる。最後に、計算機シミュレーションによって本方式の有効性を示す。

2. 作業空間におけるマニピュレータのダイナミクスとその制御

一般の n 自由度マニピュレータのダイナミクスについて考える。マニピュレータの運動は関節角度などの一般化座標 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)^T$ で記述される。ここで T は行列やベクトルの転置を表す。運動方程式は一般に

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^T \quad (1)$$

† 第 22 回自動制御連合講演会で発表 (昭 54・10)

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

(Received July 15, 1980)

(Revised February 23, 1981)

$$\dot{\mathbf{p}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \mathbf{u} = -\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\right)^T - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \mathbf{u} \quad (2)$$

ここで T, V, H はそれぞれシステムの運動エネルギー, ポテンシャル関数, Hamiltonian を表わし $H = T + V$ である. ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ は $\mathbf{x}$ に対応する一般化運動量で $\mathbf{p} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)^T$ で定義される. T は具体的に

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T R(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}$$

と書ける. ここで $R(\mathbf{x})$ は任意の $\mathbf{x}$ に対して正定値対称と仮定できる⁷⁾. ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ は $\mathbf{x}$ に対応する一般化力の項で以後これを系の入力と考える.

いま目的の作業に対してベクトル $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ が作業座標に選ばれたとする. 一般に $m \leq n$ だが, まず最初は $m = n$ で $\mathbf{y}$ の $\mathbf{x}$ による Jacobian $J(\mathbf{x})$ が正則とする. すなわち $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$ としたとき

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \det J(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (3)$$

が考える動作の範囲内で成り立つとする. マニピュレータのダイナミクスを作業座標で記述し直しそのシステムに対して力学的な考察を加え, 安定な制御系を構成するというのが本論文での基本的な方針であるが, これらの条件のもとでは, 陰関数定理より $\mathbf{f}^{-1}$ が存在して $\mathbf{x}$ を $\mathbf{y}$ の連続な関数とみなすことができるので, Hamiltonian $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ は $\mathbf{y}$ と $\dot{\mathbf{y}}$ に対応する一般化運動量 $\mathbf{q}$ によって記述することができる. ここで $\mathbf{q}$ は

$$\mathbf{q} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right)^T = (J^T)^{-1} R J^{-1} \dot{\mathbf{y}} \quad (4)$$

となる. 行列 J, R や関数 V などは $\mathbf{f}^{-1}$ によってすべて $\mathbf{y}$ の関数とみなすのである. つぎに一般化力の項を考える. Q_i を y_i に対応する一般化力とする. $\mathbf{y}$ の仮想変位 $\delta \mathbf{y}$ に対して $\mathbf{x}$ の仮想変位は $\delta \mathbf{x} = J^{-1} \delta \mathbf{y}$ となるので $\delta \mathbf{y} = (0, \dots, \delta y_i, \dots, 0)^T$ に対する仮想変位 $\delta \mathbf{x}^i$ は

$$\delta \mathbf{x}^i = J^i \delta y_i \quad (5)$$

となる. ただし J^i は J^{-1} の第 i 列ベクトルである. すなわち

$$J^{-1} = [J^1; J^2; \dots; J^n]$$

したがってこの場合の仮想仕事はつぎのようになる.

$$Q_i \delta y_i = \mathbf{u}^T \delta \mathbf{x}^i = \mathbf{u}^T J^i \delta y_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (6)$$

これをまとめれば次式のように一般化力の項を得る.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T J^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T J^n \end{bmatrix} = (J^T)^{-1} \mathbf{u} \quad (7)$$

したがって $\mathbf{y}$ で記述された運動方程式はつぎのようになる.

$$\dot{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T, \quad \ddot{\mathbf{y}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}}\right)^T - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\right)^T + (J^T)^{-1} \mathbf{u} \quad (8)$$

さて作業空間において目標値 $\bar{\mathbf{y}}$ が与えられたとしよう. 一般化座標 $\mathbf{x}$ で記述されたシステム(1), (2)に対して, われわれはすでに, ポテンシャル関数を改善して目標値に到達させるという考え方を提案してはいらる⁸⁾. そこで, (8)式のシステムに対しても, まず, ポテンシャルを改善することを考える. ポテンシャル関数として, つぎの2次形式を考える.

$$\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T W (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \quad (9)$$

ここで行列 W は正値対称とする. このポテンシャルを実現する入力 $\mathbf{u}_1$ はつぎのようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= J^T \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\right)^T - W (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \right\} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T - J^T W (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (10)$$

つぎに $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ と置いて, これを(8)式に代入する. $\mathbf{u}_2$ は点 $(\mathbf{y}^T, \mathbf{q}^T) = (\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T)$ を漸近安定させるように決定するが, ここではその中で評価関数

$$\begin{aligned} \text{P. I.} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T Q \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T Q^{-1} \mathbf{u}_2 \right\} dt \\ &= \int_0^\infty h(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{u}_2) dt \end{aligned} \quad (11)$$

を最小にするものを考える. ただし Q は正値対称行列である. この評価関数の積分内第1項は運動の滑らかさを, 第2項はなるべく小さいパワーの消費を目指していると考えられる. 各項の重みのかけ方を(11)式のように選んだので, 以下で示すように最適制御 $\mathbf{u}_2^*$ が容易に求められる. まず, 関数 $\bar{H}$ をつぎのように定義する.

$$\bar{H} = T + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T W (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \quad (12)$$

また, 関数 φ を $\varphi(t) = \int_t^\infty h(\dot{\mathbf{y}}(\tau), \mathbf{u}_2(\tau)) d\tau$ とすれば, この最適制御問題における Lyapunov-Bellman の方程式⁹⁾はつぎのように書くことができる.

$$\begin{aligned} 0 &= h(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{u}_2) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}\right) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \\ &= h(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{u}_2) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}}\right) \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \\ &\quad - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}\right) \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{y}}\right)^T + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}\right) (J^T)^{-1} \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (13)$$

最適制御 $\mathbf{u}_2^*$ は(13)式右边を最小にする⁹⁾が, (13)式

で u_2 を含んでいる部分を書き下ろすと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_2^T Q u_2^T + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) (J^T)^{-1} u_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ u_2 + Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^T \right\} Q^{-1} \left\{ u_2 + Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^T \right\} \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) (J^T)^{-1} Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^T \end{aligned} \quad (13)$$

となるので u_2^* は

$$u_2^* = -Q J^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^T \quad (14)$$

を満たさなければならない。(13), (14)式を満足する φ, u_2 が求まれば, その u_2 が最適制御になる⁹⁾が,

$$\varphi = \bar{H}, \quad u_2 = -Q J^{-1} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial q} \right)^T = -Q J^{-1} \dot{y} = -Q \dot{x}$$

が (13), (14)式を満足していることは, 容易に確かめられる. すなわち $u_2 = -Q \dot{x}$ が求める最適制御である. ただし, この制御則を用いたときシステムが漸近安定でなければならない⁹⁾が, このことは $\bar{H}$ が漸近安定性を保証する Lyapunov 関数になることから示される. すなわち, $\bar{H}$ をシステムの解に沿って微分すれば

$$\dot{\bar{H}} = -\dot{x}^T Q \dot{x} \quad (15)$$

が得られ, 集合 $\{(y^T, q^T); \dot{\bar{H}}=0\}$ は全軌道¹⁰⁾を含まないので漸近安定性が (15)式だけから保証される¹⁰⁾.

以上より, 作業空間における運動制御の方式として

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T - J^T W (y - \bar{y}) - Q \dot{x} \quad (16)$$

が得られた. ところで, (11)式の評価関数では角度の空間で速度の2乗が計算されており, 得られた最適制御 $u_2 = -Q \dot{x}$ も, 角度の座標系に沿って減衰を与える形になっている. 作業座標に沿って減衰を与える場合には評価関数は (11)式の P. I. の代りに

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \dot{y}^T Q \dot{y} + u_2^T J^{-1} Q^{-1} (J^T)^{-1} u_2 \right\} dt \quad (17)$$

を考えればよい. このときには同様に最適制御は $u_2 = -J^T Q \dot{y}$ となる. すなわち作業座標に沿って減衰が与えられることになる. 制御則は (16)式に対して

$$u = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T - J^T \{ W (y - \bar{y}) + Q \dot{y} \} \quad (18)$$

となる. いずれにしてもこれらの計算はマイクロコンピュータで十分, 実時間処理できる. ところで, y が目標値 $\bar{y}$ へ到達するまでの過渡的な特性は W, Q の選び方に左右される. すなわち, W を大きくすると応答は速くなるが振動的になりやすく, また, Q を大きくすると動作は滑らかになるが応答は遅くなると考えられる. よい応答を得るためには, この点を考慮し

て W, Q の値を改善していく必要がある.

本節では y の次元 m は n と等しく J は正則としたが $m < n$ あるいは $\det J = 0$ でも (16), (18)式は計算できる. しかし, この場合に制御入力 u が目的を果すことはまだ保証されていない. これについて次節で述べる.

3. 冗長性のある場合の考察

前節では $m = n$ で J が正則な範囲だけを考えたが, 広い動作範囲では一般に J が singular になることは避けられない. そこで, ここではマニピュレータの自由度に冗長性がある場合, すなわち $m < n$ のときや $m = n$ であっても $\det(J) = 0$ となるとき (16)式のフィードバック則の有効性について検討する. $m = n$ で $\det(J) = 0$ のときは y のうちでいくつかの独立な部分だけについて目的が達成されるので, $m < n$ で $\text{rank}(J) = m$ のときだけを考えればよい. まず $y = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ に対してつぎのようにベクトル $y_s \in R^n$, $y_s \in R^{n-m}$ を導入する.

$$\begin{aligned} y_s^T &= (y^T, y_s^T) \\ &= (f_1(x), \dots, f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_n(x)) \\ &= f_s(x) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $y_s = (f_{m+1}(x), \dots, f_n(x))^T = f_s(x)$ は

$$\det[J_s(x)] = \det \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} \right) = \det \begin{bmatrix} J \\ \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (20)$$

となるように選ぶ. このように f_s を選ぶことは可能だが具体的に計算する必要はない. このとき y_s に関する運動方程式はつぎのように書ける.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^T \\ \left(\frac{\partial H}{\partial q_s} \right)^T \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ q_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^T \\ \left(\frac{\partial H}{\partial y_s} \right)^T \end{bmatrix} + (J_s^T)^{-1} u \quad (22)$$

ただし q_s は y_s に対応する一般化運動量である. また, $q_s^T = (q^T, q_s^T)$ と置いておく. さて, (16)式の制御則で行列 J, W のサイズはそれぞれ $m \times n$, $m \times m$ となるが, この制御入力 u を (22)式に代入したシステムを考える. 問題は, このシステムの $(y^T, \dot{y}_s^T)$ に関する漸近安定性である. これは状態変数の一部分に関する漸近安定性の問題で Oziraner と Rumiantsev によって詳しく研究されている¹¹⁾. 彼らの結果¹¹⁾をこのシステムに適用するとつぎようになる. すなわち, y_s が終局的有界であることがわかっていれば, $(y^T, \dot{y}_s^T)$

$=(\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T)$ の漸近安定性はつぎのような関数 $v(\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e)$ の存在によって保証される。

- (i) ある単調増加な連続関数 $a(r)$ ($a(0)=0$) があって

$$v(\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e) \geq a(\|\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T\|) \quad (23)$$

- (ii) $\dot{v}(\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e) < 0 \cdots (\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T) \neq (\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0})$

$$\dot{v}(\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e) = 0 \cdots (\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T) = (\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0})$$

- (iii) さらに、集合 $\{(\mathbf{y}_e^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T); \dot{v}=0\}$ すなわち $\{(\mathbf{y}_e^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T); (\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T) = (\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T)\}$ は $(\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T) = (\bar{\mathbf{y}}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T)$ 以外に全軌道を含まない。

そこで(12)式の関数 $\bar{H}$ を考えると、これらの条件をすべて満たすことがわかる。また、 $\mathbf{x}$ が角度を表わすならば、 $\mathbf{x}$ は有界なので $\mathbf{y}_e$ も有界になるように選ぶことができる。このように、 $m < n$ であっても $\bar{H}$ は $t \rightarrow \infty$ で $(\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}_e^T) \rightarrow (\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T)$ となることを保証するリアプノフ関数になり、(16)式の制御則は冗長性がある場合やヤコビ行列が特異点をもつときにも有効であることが示された。

なお、(18)式の制御則では、 $\mathbf{y}_e$ 座標には減衰が与えられないので漸近安定性は保証されないが、(16)式の制御則でさらに $\mathbf{y}$ 座標に関して減衰を調節したいときには $-J^T Q \dot{\mathbf{y}}$ の形で速度フィードバック項を付加すればよいと考えられる。

4. 作業対象より力学的な拘束を受ける作業

ドアを開閉したりクランクを回したりする作業をマニピュレータにさせるには、作業対象より受ける拘束力を考慮しなければならない。一般にシステムに拘束条件が付加されると、そのダイナミクスの構造が変化するので、拘束のないときに設計された制御系が拘束条件が付加された場合にも有効であるという保証はなく、場合によってはまったく好ましくない現象も起る¹²⁾。ここでは(16)式あるいは(18)式の制御則が、拘束条件が付加されたシステムの運動を制御する場合にも有効であることを明らかにする。(8)式のシステムにつぎのようなホロノミックな拘束条件が付加されたとする。

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{y}) = (\varphi_1(\mathbf{y}), \dots, \varphi_r(\mathbf{y}))^T = \mathbf{0} \quad (24)$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_r$ は独立であり一般性を失うことなく $\mathbf{y}$ は独立な部分 $\mathbf{y}_I \in \mathbb{R}^{n-r}$ と従属な部分 $\mathbf{y}_D \in \mathbb{R}^r$ に分割され $\mathbf{y}^T = (\mathbf{y}_I^T, \mathbf{y}_D^T)$ とする。(24)式より仮想変位 $\delta \mathbf{y}^T = (\delta \mathbf{y}_I^T, \delta \mathbf{y}_D^T)$ は次式を満たさなければならない。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{y}} \right) \delta \mathbf{y} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{y}_I}; \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{y}_D} \right) \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}_I \\ \delta \mathbf{y}_D \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (25)$$

ここで $\det(\partial \boldsymbol{\Psi} / \partial \mathbf{y}_D) \neq 0$ であり、 $\mathbf{y}_D$ は $\mathbf{y}_I$ で記述される。まず一般化力の項を計算する。(8)式で $(J^T)^{-1} \mathbf{u}$

$= \mathbf{v}$ と置き $\mathbf{v}$ を $(\mathbf{y}_I^T, \mathbf{y}_D^T)$ に対応して $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_I^T, \mathbf{v}_D^T)$ と分割する。(25)式より $\delta \mathbf{y}_D$ はつぎようになる。

$$\delta \mathbf{y}_D = - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{y}_D} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{y}_I} \right) \delta \mathbf{y}_I = D(\mathbf{y}_I) \delta \mathbf{y}_I \quad (26)$$

そこで $\delta \mathbf{y}_I^i = (0, \dots, \overset{i}{\delta y_i}, \dots, 0)$ ($i=1, \dots, n-r$) に対する仮想仕事を計算することにより一般化力の $\mathbf{v}_e$ が得られて

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_I + D^T \mathbf{v}_D \quad (27)$$

となる。したがって拘束条件(24)が付加されたときの運動方程式はつぎようになる。

$$\dot{\mathbf{y}}_I = \left(\frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{q}_I} \right)^T \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_I = - \left(\frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{y}_I} \right)^T - \left(\frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{y}_I} \right) + \mathbf{v}_I + D^T \mathbf{v}_D \quad (29)$$

ここで $\mathbf{q}_I$ は $\mathbf{y}_I$ に対応する一般化運動量であり、 T_e, V_e は $T(\mathbf{y}, \mathbf{q}), V(\mathbf{y})$ を $\mathbf{y}_I, \mathbf{q}_I$ だけで記述したものである。重力項である $(\partial V_e / \partial \mathbf{y}_I)$ は

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{y}_I} \right)^T = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}_I} \right)^T + D^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}_D} \right)^T$$

と書けることに注意すると、 $\mathbf{v}$ をつぎのようにすれば点 $(\mathbf{y}_I^T, \mathbf{q}_I^T) = (\bar{\mathbf{y}}_I^T, \mathbf{0}^T)$ が漸近安定になることがわかる。

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_I \\ \mathbf{v}_D \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \right)^T - \begin{bmatrix} W(\mathbf{y}_I - \bar{\mathbf{y}}_I) + Q \dot{\mathbf{y}}_I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

このとき $\mathbf{u}$ はつぎようになる。

$$\mathbf{u} = J^T \mathbf{v} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - J^T \begin{bmatrix} W(\mathbf{y}_I - \bar{\mathbf{y}}_I) + Q \dot{\mathbf{y}}_I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ところで目標値 $\bar{\mathbf{y}}$ が拘束条件を満たすとき、すなわち $\boldsymbol{\Psi}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ [ならば(16)式の制御則は拘束条件が付加されたシステムに対しても有効である。実際、(16)式の $\mathbf{u}$ を(29)式に代入すると系のポテンシャルは $\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T W(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$ を $\mathbf{y}_I$ だけで記述したものなので当然 $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$ で極小値 0 をとり、また散逸関数も $\dot{\mathbf{y}}_I^T (I; D^T) Q \left(\frac{I}{D} \right) \dot{\mathbf{y}}_I$ となり $\dot{\mathbf{y}}_I$ に関して正定値になっている。すなわち、 $\boldsymbol{\Psi}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ であれば、この拘束条件の有無にかかわらず(16)式の制御則は目標点 $(\bar{\mathbf{y}}^T, \mathbf{0}^T)$ の漸近安定性を保証する。

対象物から拘束を受ける作業の簡単な例として、アームにクランクを回転させる場合を考える。Fig. 1のように、空間に (X, Y, Z) の座標をとり、クランクは (X, Y) 平面にあるとする。ハンドの空間座標を (x, y, z) とし r, θ を図のように決めると、作業変数としては (r, θ, z) を選ぶのがよい¹³⁾。ここで、ハンドがクランクの取手を完全に把持しているなら、 $r = \text{const.}, Z = \text{const.}$ という拘束条件がつくので、 θ 方向

Fig. 1 Task-oriented for turning a crank

についてだけフィードバックを行えばよい。このときヤコビ行列 $J = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right)$ という $1 \times n$ の行列になるが、これは簡単に求まってつぎのように書ける。

$$J = \left(\frac{1}{r} \cos \theta, -\frac{1}{r} \sin \theta \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

したがって制御則として(16)式で $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$ を $(\theta - \bar{\theta})$ とし、 J を上式のようにしたものを用い、 $\bar{\theta}$ を徐々に回転方向に増加させることによってクランクを回転させることができる。このように、きわめて簡単な制御方式によって、回転方向にのみ剛性を与える制御⁶⁾が実現できる。

5. 軌道追従制御

作業空間に目標軌道 $\bar{\mathbf{y}}(t)$ ($0 \leq t \leq T$) を設定し、これにマニピュレータの運動を追従させようとするとき、この軌道に関する漸近安定性が問題になる。初期条件 $\mathbf{y}(0)$, $\dot{\mathbf{y}}(0)$ に対して軌道 $\bar{\mathbf{y}}(t)$ を実現する入力 $\bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{y}(0), \dot{\mathbf{y}}(0))$ は運動方程式から直接、計算できるが、 $\bar{\mathbf{u}}$ だけの開ループ系では軌道の追従性は保証されない。そこで目標軌道 $(\bar{\mathbf{y}}^T, \bar{\mathbf{q}}^T)$ に関する変分方程式の安定性を考えなければならない。まず、(8)式の $\mathbf{u}$ に $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}$ を代入し $\delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$, $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$ ($\bar{\mathbf{q}} = (J^T)^{-1} R J^{-1} \dot{\bar{\mathbf{y}}}$) と置けば、軌道 $(\bar{\mathbf{y}}^T, \bar{\mathbf{q}}^T)$ に関する変分方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ -B(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (J^T)^{-1} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} \quad (32)$$

のように書ける。ここで行列 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ は

$$A(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y}_i \partial \mathbf{q}_j} \right) (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{q}}) \quad B(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{y}_i \partial \mathbf{y}_j} \right) (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{q}}) \\ C(t) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{q}_i \partial \mathbf{q}_j} \right) (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{q}}) = J R^{-1} J (\bar{\mathbf{y}})$$

を表わす。ただし H ははじめとするすべての関数は $\mathbf{y}, \mathbf{q}$ で記述されたものとみなす。(32)式のシステムは時変系だが、係数の時間変化が十分ゆるやかな各時刻で定数系として安定性を考えればよい¹²⁾。そこで、

$$\delta \mathbf{u} = -J^T (W \delta \mathbf{y} + Q \delta \dot{\mathbf{y}}) \quad (W, Q > 0) \quad (33)$$

として(32)式に代入してみる。正定値関数 $v(\delta \mathbf{y}, \delta \dot{\mathbf{y}})$ をつぎのように定義する。

$$v = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{y}^T, \delta \dot{\mathbf{y}}^T) \begin{pmatrix} B - A^T C^{-1} A + W & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \quad (34)$$

ただし、 $B - A^T C^{-1} A + W > 0$ となるように W は選ばれているとする。このとき、 v を(32)式の解に沿って微分すれば

$$\dot{v} = -\delta \dot{\mathbf{y}}^T Q \delta \dot{\mathbf{y}}$$

となる。これより v は Lyapunov 関数となり 2 節で述べたのと同様の議論から、システムが漸近安定になることがわかる。このように軌道追従制御についても(16)式や(18)式と同様の制御則(33)式が有効になる。

ところで、 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ は(8)式を用いてオフラインで計算しておけばよいが、一般に非常に膨大な計算を必要とする。軌道の速度 $\dot{\bar{\mathbf{y}}}$ が十分小さいとして $\dot{\bar{\mathbf{y}}}$ に関して 2 次以上の項を無視すると $\bar{\mathbf{u}} = J^T C^{-1}(t) \dot{\bar{\mathbf{y}}} + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\bar{\mathbf{y}})$ となり、重力項 $(\partial V / \partial \mathbf{x})^T$ は実時間で補償するなら $\bar{\mathbf{u}}$ は結局、加速度補償のための項の $J^T C^{-1}(t) \dot{\bar{\mathbf{y}}}$ だけになる。しかし、この計算も容易ではない。これに対して適応制御の手法を適用して、この加速度補償項を適応的に計算する方法¹³⁾が考えられている。しかし、加速度の影響が大きいのは一般に、軌道の始点と終点の部分であるので、これらの点を考慮して目標軌道 $\bar{\mathbf{y}}(t)$ を設定すれば、この加速度補償を行わなくても、ある程度、希望の運動が実現できると考えられる。

6. シミュレーション結果

提案した制御方式の有効性を確かめるために、Fig. 2 のような 4 自由度をもつマニピュレータのモデルを用いて計算機シミュレーションを行った。各リンクの長さや質量、慣性性能率などのパラメータは Table 1 に示すように定めた。作業変数として、まず、手先部の空間座標 (x, y, z) と θ_4 を選んだ。すなわち $\mathbf{y} = (x, y, z, \theta_4)^T$ とした。目標値 $\bar{\mathbf{y}}$ は初期値 $\mathbf{y}(0)$ に対して $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(0) + \Delta \bar{\mathbf{y}}$ として与えた。(18)式の制御則を用いたときの応答の一例を Fig. 3 に示す。各関節角度の初期値は $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (0, -0.3, 1.2, 1.57)$ [rad] とした。目標値は $\Delta \bar{\mathbf{y}} = (0.4\text{m}, 0.3\text{m}, 0.2\text{m}, 0\text{rad})^T$ とした。ゲイン W, Q は最初、適当に選び、そのときの応答をみながら徐々に改善していった。Fig. 3 ではつぎのように選んでいる。

$$W = \text{diag}\{30, 30, 30, 5\}, \quad Q = \text{diag}\{15, 20, 15, 5\}$$

図のように $\mathbf{y}$ は、約 2 秒で滑らかに目標値に到達して

Fig. 2 Manipulator model with 4 degrees of freedom

Table 1 Parameters of manipulator

Link	Mass (kg)	I_x (kgm ²)	I_y (kgm ²)	I_z (kgm ²)	Length (m)
1	4.0			0.04	
2	2.0	0.06	0.06	0.008	0.6
3	1.5	0.03	0.03	0.0025	0.5
4	1.0	0.01	0.01	0.001	0.3

Fig. 3 System response with setting a target position

いる。他の初期条件や目標値に対しても同様な結果が得られているが、偏差 $\Delta \bar{y}$ が大きいと入力 u は初期的に大きくなるので、最終目標値と現在値の間を補間したり、軌道を設定して、それに追従させる制御方式が実用的であると考えられる。Fig. 4 は、目標軌道追従制御をしたときの応答の一例で、図中、点線のように目標軌道を設定している。制御入力 u は重力補償プラス(33)式の δu で、ゲイン行列 W, Q は Fig. 3 の場合と同じものを用いた。加速度補償をしていないので、最終目標値を少し行き過ぎるが、速度の指令値

Fig. 4 System response with setting a desired trajectory

Fig. 5 Response of a task-oriented coordinate for turning a crank (1) Trace of hand's position in X-Y plane

$\dot{y}$ を最終目標値に達する少し前から 0 にするなどの方法で、これらの行き過ぎ量はある程度抑えられる。もちろん軌道の加速度が十分小さければ、その影響を考えなくてもよい応答は得られる。たとえば、Fig. 1 のようにクランクを回すことを想定して作業座標 y を $y = (r, \phi, z, \theta_4)^T$ と選んだときの応答を Fig. 5, Fig. 6 に示す。ここで目標軌道は 10 秒間で 1 回転するように設定している。各関節角度の初期条件は $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (0, -0.7, 1.5, 1.57)$ [rad] で、ゲイン行列 W, Q はつぎのように選んでいる。

$$W = \text{diag}\{200, 5, 15, 3\}, \quad Q = \text{diag}\{200, 5, 15, 3\}$$

ここで、 $r = \text{const.}$ を強制的に満足させるために、 r 方向のゲインは他に比べてかなり大きくしている。

図のように、目標の軌道はほぼ完全に実現されている。また、 $\gamma = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ という拘束条件をつけた場合には、 ϕ と θ_4 に関するフィードバックだけで同様な軌道を実現することができた。よい応答を得るためには試行錯誤的にゲインを調節せねばならないが、一度、よい応答を示すゲインが選ばれれば、同じゲインを用いて、広い動作範囲で良好な結果が得られた。

Fig. 6 Response of a task-oriented coordinate for turning a crank (2) Time response of ϕ and deviation for Z axis

7. あとがき

作業変数で記述された運動方程式(8)式あるいは(21), (22)式に対して, 大域的な安定化制御を考察し, ある意味で最適性を満足する制御則(16)式および(18)式を導いた。作業変数 y は, その一部はセンサから直接測定され, 直接測定できないものは, コンピュータで実時間で算出されることになる。一般に, 作業座標 y やヤコビアン J の計算は, $\sin x_i$, $\cos x_i$ の計算を除けば, すべて単純な行列, ベクトルの演算だけでできる¹⁾ので, マイクロコンピュータで本方式を実現することは十分可能である。作業座標から各関節角度への変換を必要とする従来の方式^{1), 2)}に比べて, 本方式は, 実時間処理および位置精度の点において, より実用的であると思われる。ところで, (7)式が示すように, 入力を $u = (J^T)v$ と変換することは, 作業空間の各座標方向に v という力を発生させることになる。本方式は, 従来より静的な観点から考案されている, 手先に等価的に力を発生させる制御方式¹⁾などを動的な観点から見直したものといえる。(16)式の制御則を用いれば, ヤコビ行列 J が singular になるときや冗長性のある場合にも, システムは安定であることを文献11)の結果を用いて証明したが, これは特定の座標方

向にのみ剛性を与える制御ができることを示している。特に, 対象物より拘束を受ける作業では, 対象物にならないながら作業する制御が容易に実現できる。なお, 過渡特性を重視する場合には5節で述べた軌道追従制御を行えばよいが, 目標軌道の加速度が無視できない場合の検討は不十分であった。この場合には, 適応制御の手法が有効になると思われる¹³⁾。

参考文献

- 1) 中野: ロボットの手の機構と制御, bit 臨時増刊, 7 (1976)
- 2) 森部, 他: マニピュレータの実時間座標運動, 計測自動制御学会論文集, 15-6, 768/773 (1979)
- 3) 高瀬: マニピュレータの運動成分の一般的分解とその制御, 計測自動制御学会論文集, 12-3, 300/306 (1976)
- 4) E. Freund, et al.: Control of Industrial Robots by Means of Microprocessors in New Trends in Systems Analysis, Lecture Note in Control and Information Science, 2, 167/181 (Sp. rel.) (1977)
- 5) G.N. Saridis, et al.: A Hierarchical Approach to the Control of Prosthetic Arm, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-7-6, 407/420 June (1977)
- 6) 内山: 人工の手の運動制御に関する研究, 日本機械学会論文集, 45-391, 314/345 (1979)
- 7) D.T. Greenwood: Classical Dynamics, Prenticehall (1977)
- 8) 竹垣, 他: 多自由度リンク機構の制御について, 第8回制御理論シンポジウム資料, 195/200 (1979)
- 9) A.M. Letov: Stability Theory, in System Theory, edited by Zadeh and Polack, Tatfa McGraw-Hill, 347/384 (1969)
- 10) J. La Salle and S. Lefschetz: Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press (1961)
- 11) A.S. Oziraner, et al.: The Method of Liapunov Functions in the Stability Problem for Motion with Respect to Part of the Variables, PMM 36-2, 364/384 (1972)
- 12) H. Hemami, et al.: Modeling and Control of Constrained Dynamic Systems with Application to Biped Locomotion in Frontal Plane, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-24-4, 526/535 (1979)
- 13) 竹垣, 他: マニピュレータの軌道制御への適応制御の応用, 第9回制御理論シンポジウム資料, 251/254 (1980)