2 次形式評価関数の重み行列の一決定法[†]

武 田 常 広*・北 森 俊 行**

An Algorithm for Determining the Weighting Matrices of the Quadratic Performance Function

Tsunehiro TAKEDA* and Toshiyuki KITAMORI**

Linear optimal control theory has been recognized as a powerful tool for control system synthesis. "Optimal feedback control law" is easily obtained by solving matrix Riccati equation, but there is no way other than the trial and error method to determine proper weighting matrices in the quadratic performance function. Hence, the practical use of the theory has been restricted.

This paper proposes an algorithm of systematic determination of the weighting matrices. The algorithm concerns with the previously proposed optimal tracking systems (S_e^*)⁷⁾, and is derived by imposing the following requirements on S_e^* , using the asymptotic pole configuration and the conditional stability characteristics of S_e^* designed with very small weights on inputs^{8),9)}.

- (1) S_e^* should remain stable even if open loop gains of plants change from zero to infinity simultaneously.
- (2) S_e^* should have the fastest step response under the condition of (1).
- (3) S_e^* should be decoupled as much as possible under the condition of (1) and (2).

Some examples demonstrate the efficiency of the algorithm. The algorithm can also be used for ordinal linear optimal regulator and optimal observer syntheses with minor change.

1. はじめに

線形最適レギュレータ理論では、Riccati 方程式を解くだけで“最適制御則”が得られる。しかし、2次

形式評価関数の重み行列をどのように選べばどのような制御系が得られるかが不明なため、重み行列は試行錯誤によって選ばざるをえず、実用上の大きな障害となっている。従来この問題は多くの研究者の研究対象となってきたが、いまだ十分に解決されていない。特に、Schultz らは¹⁾1 入出力系においてこの問題を詳しく調べ、重み行列の選択による設計を放棄する立場を取っている。他方、希望の極を実現するための重み行列の決定法を論じた研究は^{2)~4)}、希望の極が先験的に決まるという仮定に疑問があるし、重み行列は極配置から一意的には決定しない点⁴⁾でも問題がある。また最近 Stein ら^{5),6)}は、著者らと同じく極の漸近的性質を考慮しつつ、極だけでなく固有ベクトルも同時に指定することによって、重み行列を決定する方法を提案したが、固有ベクトルの指定法が明らかでないこと、出力行列を変化させて設計していることに疑問がある。本論文はこの重み行列の系統的かつ実用的な決定法を提案する。

著者らは、先にパラメータ変動や定値外乱などがあっても定常偏差なく目標入力に追従できる、線形多入出力最適追従制御系(以下 S_e^* と表記する)の設計法を報告した⁷⁾。そこでは、制御対象にステップ入力が入ったときの平衡点を基準とした入出力の変数を $u_e(t)$, $y_e(t)$ と表わし、つぎの評価関数を最小化して設計した。

$$J = \int_0^{\infty} [y_e^T(t)Qy_e(t) + \dot{u}_e^T(t)(\rho N)\dot{u}_e(t)]dt$$

$Q, N: m \times m$ 正定対称, ρ : 正実スカラー

そして、 $\rho \rightarrow 0$ としたときの S_e^* の極配置の性質を文献 8) に、 $\rho \rightarrow 0$ として設計したとき、ゲイン減少に関しほとんど全ての S_e^* は不安定になる、という条件付安定性を明らかにし、(i) S_e^* に一定の安定度を保証する。という要請を課すことにより ρ を決定する方法を文献 9) に報告した。本論文では残された Q, N の決定法を提案する。本設計法は上記の性質を利用すると共に、 S_e^* の応答を速めるためにさらに(ii)極の総

[†] 第 16 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 52・8)

* 製品科学研究所 茨城県筑波郡谷田町東 1-1-4

** 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Industrial Products Research Institute, Tsukuba-gun, Ibaraki

** Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received October 6, 1980)

(Revised March 20, 1981)

和の絶対値を最小にする, (iii) S_e^* をできるだけ非干渉化する, という要請を課すことによって得られる. 本設計法は実用性を重視しているため, 3 例によって具体的に設計される制御系の性質について考察した. なお, 本設計法は S_e^* についての設計法であるが, 入出力の数が等しい, 最適レギュレータ, 最適オブザーバの設計にも適用可能である^{10), 11)}.

2. S_e^* の設計法と極の漸近的性質

まず, 最適追従制御系 S_e^* の設計法⁹⁾を要約し, S_e^* の極配置の性質⁹⁾, S_e^* の条件付安定性⁹⁾を説明する. 制御対象は可制御・可観測で右半平面に零点をもたず, 非干渉化可能な, 次式で表わされるものとする.

$$S_0 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

ここで, $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$ はそれぞれ, n , m , m 次のベクトルであり, A , B , C は対応する次元をもつ. まず入力成分ごとに一つの積分器をカスケード結合し, $v(t) = \dot{u}(t)$ を新たに操作量としたつぎの拡大系 ($\bar{S}_0$) を仮想的な制御対象と考える.

$$\bar{S}_0 \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

ステップ入力が入った場合の平衡点から計った入出力の変数を $v_e(t)$, $y_e(t)$ とする.

$$J = \int_0^\infty [y_e^T(t) Q y_e(t) + \rho v_e^T(t) N v_e(t)] dt \quad (3)$$

(3) 式の評価関数を最小化して得られる拡大最適レギュレータ系 ($\bar{S}_e$) に対し, その伝達関数行列を不変に保つ変換を施すことによって S_e^* は設計される.

ここで, つぎの変数を定義する.

$$N^{-1} = \Sigma \Sigma^T, \quad |\Sigma| \neq 0 \quad (4)$$

$$Q = \Gamma^T \Gamma, \quad |\Gamma| \neq 0 \quad (5)$$

$$T(s) = \Gamma \bar{H}_0(s) \Sigma \bar{\phi}_0(s) \quad (6)$$

ただし, $\bar{H}_0(s)$ は $\bar{S}_0$ の伝達関数行列, $\bar{\phi}_0(s)$ はその特性多項式である. また, S_e^* の特性多項式を $\phi_e^*(s)$ と表わす. すると, Riccati 方程式を変形することにより,

$$\begin{aligned} \phi_e^*(-s) \phi_e^*(s) &= \rho^{-m} \bar{\phi}_0(-s) \bar{\phi}_0(s) | \rho I_m \\ &\quad + T^T(-s) T(s) / \{ \bar{\phi}_0(-s) \bar{\phi}_0(s) \} | \\ &= \rho^{-m} \bar{\phi}_0(-s) \bar{\phi}_0(s) [\rho^m \\ &\quad + \rho^{m-1} h_1(s^2) / \{ \bar{\phi}_0(-s) \bar{\phi}_0(s) \} \\ &\quad + \dots + h_m(s^2) / \{ \bar{\phi}_0(-s) \bar{\phi}_0(s) \}^m] \end{aligned} \quad (7)$$

$$h_r(s^2) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r T(-s) \begin{matrix} k_1 \dots k_r \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} T(s) \begin{matrix} k_1 \dots k_r \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} \quad (8)$$

$$\begin{cases} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m \\ 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq m \end{cases}$$

をうる. $h_r(s^2)$ ($r=1, 2, \dots, m$) は $T(s)$ の r 次小行列式と, 対応する $T(-s)$ の r 次小行列式の積のすべてを加えたものである. (7) 式を利用して, 以下の定理が証明された.

《定理 1》 $\rho \rightarrow 0$ として設計される S_e^* の絶対値の有限な極 $\xi_{i,z}$ は拡大系 $\bar{S}_0$ の零点 (l 個) に漸近し, 残りの $(n-l)$ 個の極 $\xi_{i,BC}$ は, Q , N の値にかかわらず m 組の $\bar{S}_0$ に固有な次数 n_i ($i=1, 2, \dots, m$) をもち, $\rho^{-1/2n_i}$ に比例する半径をもった Butterworth の極配置 (BC) に漸近する. ただし, BC の半径は Q , N の値に依存する.

《定理 2》 一般性を失うことなく, $|Q|=|N|=1$ とすると, S_e^* の極の相乗積は $\rho^{-m/2}$ に比例する.

《定理 3》 定常ゲインが減少するとき, (a) 制御対象 $\bar{S}_0$ が不安定なとき, S_e^* はかならず不安定になり, (b) $\bar{S}_0$ が安定なとき, 十分大きな ρ で設計された S_e^* は安定であり, $n-l > 2m$ を満たす $\bar{S}_0$ に対し, 十分小さな ρ で設計された S_e^* は不安定となる.

(定理終)

定理 1, 3 は制御対象を $\bar{S}_0$ から S_0 にかえて考え, $\bar{n} \rightarrow n$ とすることによって, レギュレータ系にもそのまま成立する. 定理 2 では, ρ が十分小さいとき, (7) 式において $\rho I_m \approx 0$ としてよいから ($\phi_0(s)$ は S_0 の特性多項式)

$$\prod_{i=1}^n |\xi_i|^2 \approx \rho^{-m} \phi_0^2(0) / T^T(0) T(0) / \phi_0^2(0) \quad (9)$$

となり, やはり, $\rho^{-m/2}$ にほぼ比例する. よって, 以下の Q , N の決定法はほぼそのまま, 最適レギュレータ系 S_e の設計における, Q , N の決定法¹⁰⁾, また, 双対性を考慮すれば最適オブザーバの設計法¹¹⁾として使ってもよいことになる.

つぎに非干渉制御理論で使われている記法に従い, C の各行を (10) 式のように分解し (11) 式の d_i を定義する (非干渉化とは閉ループ伝達関数行列を対角化することを意味する¹⁴⁾).

$$C = (c_1^T, c_2^T, \dots, c_m^T)^T \quad (10)$$

$$d_i = \min[j | c_i A^j B \neq 0; j=0, 1, \dots, n-1] \quad (11)$$

すると, $\bar{H}_0(s) \cdot \bar{\phi}_0(s)$ の各行の最高次数は $(\bar{n} - d_i - 2)$ 次となり, その係数は $c_i A^{d_i} B$ となる. 各行の最高次の係数 ($c_i A^{d_i} B$) を集めたものを H_1^* , 各行の $(\bar{n} - d_i - 3)$ 次の係数を集めたものを H_2^* と表記する. $\bar{S}_0$ は非干渉化可能としたから $|H_1^*| \neq 0$ であり, 定理 1 の BC の次数は $n_i = d_i + 2$ である.

3. Q, N の決定法

3.1 Q, N に対する要請

前章の定理1, 2より, (3)式の評価関数において, Q, N を固定し操作量に対する重み ρ を次第に小さくしていくと, Q, N の値にかかわらず, 最適追従制御系 S_e^* の極は, その絶対値の相乗積が一定で, $\bar{S}_0$ に固有な次数をもった m 組の BC に漸近する極 $\xi_{i, BC}$ と, $\bar{S}_0$ の零点に漸近する極 $\xi_{i, z}$ をもつことがわかった。この $\xi_{i, z}$ と零点は極, 零点消去をおこす(注1)。しかも, (3)式の評価関数を最小化しているゆえに行き過ぎ量は大きくない。よって, ρ が小さい場合, S_e^* の応答は n_i 次のButterworth Filterがオフセットを生じないように, m 組結合した系の応答に近似できる。他方, 定理3の条件付安定性を考慮したとき, ρ はあまり小さくして設計することは許されず, 上記の近似が十分成立する保証はないが, 考えやすくするためにつぎの仮定[A]を置くことにする。仮定の妥当性については次章で考察する。

[A] 条件付安定にならない範囲で, できる限り応答を速くするように設計された S_e^* の極は, $\bar{S}_0$ の零点と等しい極と, 半径の十分大きな次数 n_i の m 組の BC の極と等しい極から成り立つ。

このとき, S_e^* の応答を速めようとして, ある特定の BC の半径を大きくするように Q, N を選ぶと(注2), S_e^* の極の相乗積が一定のために, 残りの BC の半径は相対的に小さくなり, 結果的に S_e^* の応答は遅いものになってしまう。よって, S_e^* の応答を全体として速くするために

$$J_2 = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|, \quad (\xi_i: S_e^* \text{の固有値}) \quad (12)$$

なる J_2 を最小にするように Q, N を決めるという要請(ii)を置くことにする。すると, $|H_1^*| \neq 0$ の条件があるので, (7)式より BC の次数と半径は容易に計算でき, $\min J_2$ という条件から一つの条件式が得られる。

しかし Γ, Σ にはまだ自由度が残るので, “ S_e^* をできるだけ非干渉化する”という要請(iii)を課して,

(注1) この極・零点消去はフィードバックによっておきるもので, 可観測性は失われるが制御性は失われない。よって, 小さなパラメータ変動があっても, 極・零点消去により隠されていた好ましくないモードが応答に急に現れることはないで, 以下の近似は許される。

(注2) 定理1に示したように(3)式の評価関数では Q, N によって, BC の次数を変えることができないことが重要である。文献6)では出力行列 C を制御パラメータとして BC の次数をも選択している点に問題がある。

Γ, Σ の残りの自由度を決めることにする。 S_e^* が非干渉化されることは, それ自体好ましいことであるので, この要請は受け入れられることと考える。 S_e^* を非干渉化することも(7)式を利用して行える。(7)式は, $T(s)/\bar{\phi}_0(s) = \Gamma \bar{H}_0(s) \Sigma$ という伝達関数行列をもつ制御対象に対して, $Q=N=I_m$ として設計したパワー特性方程式と同じである。他方, 非干渉化されている制御対象に対して, 対角行列の Q, N を用いて設計された S_e^* は非干渉系になる¹²⁾。よって, S_e^* を非干渉化するためには Γ, Σ によって, $T(s)$ を対角行列にすればよいことになる(付録参照)。残念ながら, Γ, Σ だけでは $T(s)$ を完全に対角化できないが, S_e^* は入力にオフセットなく追従することから, 定常状態では, すなわち低周波域では非干渉化されていると解釈できる。よって, $T(s)$ の s に関する最高次から, すなわち高周波域から非干渉化することが妥当となる。

3.2 Q, N の決定法の導出

まず, m 組の BC の半径を $r_i (i=1, 2, \dots, m)$ と表す。さらに γ_i, θ_{ij} をつぎのように定義する。

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n_i} \cos \theta_{ij}, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (13)$$

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \pm \frac{k\pi}{n_i}, & k=0, 1, \dots, \frac{(n_i-1)}{2}; \text{ if } n_i \text{ is odd} \\ \pm \frac{(k+1/2)\pi}{n_i}, & k=0, 1, \dots, \frac{n_i}{2}-1; \text{ if } n_i \text{ is even} \end{cases} \quad (14)$$

θ_{ij} は負の実軸を基準とした BC の極の偏角, γ_i はその方向余弦の和を表わしている。すると, 仮定[A]と BC の性質から(15)式をうる。

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i, BC} \right| = \sum_{i=1}^m \gamma_i r_i \quad (15)$$

他方, 仮定[A]と定理2より

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i, BC} \right|^2 = \rho^{-m} \alpha^2 = \prod_{i=1}^m r_i^{2n_i} - \rho^{-m} \alpha^2, \quad \alpha \equiv \begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix} \quad (16)$$

をうる。よって, (16)式を拘束条件として, Lagrangeの方法により(17)式を最小化すると, 極の相乗積一定の条件で, 極の和の絶対値が最小となる m 組の BC の半径が(18)式のように求められる(注3)。(ただし β はLagrangeの乗数である)。

$$L = \sum_{i=1}^m \gamma_i r_i + \beta \left(\prod_{i=1}^m r_i^{2n_i} - \rho^{-m} \alpha^2 \right) \quad (17)$$

(注3) (18)式は n_i 次の BC の半径を n_i/r_i の比で決定することを意味する。たとえば, BC の次数が2次と3次のとき, $r_1: r_2 = \sqrt{2}: 1.5$ となり, 次数の大きな BC の半径ほど大きくなる。同じ半径の BC をもった系の応答は次数が大きくなる程整定時間が長くなるので, このようにすれば S_e^* の全体の応答は速まる。

$$r_i = \frac{2n_i}{\gamma_i} \left[\left\{ \prod_{i=1}^m \left(\frac{2n_i}{\gamma_i} \right)^{2n_i} \right\} \rho_m \cdot \alpha^{-2} \right]^{-\frac{1}{2(\bar{n}-l)}} \quad (18)$$

他方, $\bar{H}_0(s) \cdot \bar{\phi}_0(s)$ の各行の最高次の係数を集めた行列 H_1^* を Γ, Σ によって,

$$\Gamma H_1^* \Sigma = A_1 \quad (19)$$

$$A_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad \lambda_i \neq 0 \quad (20)$$

のように変形すれば ($|H_1^*| = 0$ が成立すれば常に可能である⁹⁾), ξ_i, bc は $|s| \gg 1$ のとき, (19)式を使って(7)式を s の最高次だけで近似した

$$(-1)^{\bar{n}} \rho - m s^{2\bar{n}} \prod_{i=1}^m [\rho + (-1)^{\bar{n}-n_i} s^{2(\bar{n}-n_i)} \cdot \lambda_i^2 / \{(-1)^{\bar{n}} s^{2\bar{n}}\}] = 0 \quad (21)$$

より求める。(21)式は(22)式と変形できる。

$$s^{2n_i} + (-1)^{n_i} \rho^{-1} \lambda_i^2 = 0, \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

(22)式の解は半径 $(\rho^{-1} \lambda_i^2)^{1/2n_i}$ の BC の極だから, その半径と(18)式の r_i を等しくする条件より次式をうる。

$$\lambda_i = \left[\frac{2n_i}{\gamma_i} \right]^{n_i} \left[\alpha^{-2} \prod_{i=1}^m \left(\frac{2n_i}{\gamma_i} \right)^{2n_i} \right]^{-\frac{n_i}{2(\bar{n}-l)}} \cdot \rho^{\frac{\bar{n}-l-mn_i}{2(\bar{n}-l)}} \quad (23)$$

すなわち, (23)式を満たす λ_i によって(20)式のように構成される A_1 を用いて(19)式を満足させれば, 仮定[A]のもとで, BC の半径が r_i に等しくなり, 各行の最高次について非干渉化される。

つぎに残された自由度によって $T(s)$ の各行の2番目に高次の係数行列 H_2^* を対角化する。それには

$$\Gamma H_2^* \Sigma = A_2; \quad A_2: \text{対角行列} \quad (24)$$

のように Γ, Σ を決めればよい。(24)式を変形した

$$\Sigma^{-1} = A_2^{-1} \Gamma H_1^* \quad (25)$$

を(19)式へ代入すると

$$\Gamma H_2^* H_1^* \Gamma^{-1} = A_2 A_1^{-1} \equiv A_3; \quad A_3: \text{対角行列} \quad (26)$$

を得る。ただし, n_i が全て等しいとき, Γ は $|\Gamma| = \pm 1$ を満たす任意の正則行列でよいが, $n_i (i=1, 2, \dots, m)$ に等しくないものがあるとき, 異なる次数の係数間の計算をしてはならないから, Γ は異なる次数に対応する行の交換, 和を作ってはならないという制限がつく。たとえば, n_i が全て異なるとき, Γ は対角行列でなければならない。しかし, S_e^* の応答は Γ の値によってそれ程大きく変わらないので Γ の決め方は以下の三つの場合にわけて決めれば十分であると考え。

〔I〕 $n_1 = n_2 = \dots = n_m$ のとき, $H_2^* H_1^*{}^{-1}$ が m 個の実数で独立な固有ベクトルをもつとき, その固有ベクトルによって $|\Gamma| = \pm 1$ となるように

Γ を構成する。

〔II〕〔I〕の条件を満たさないが, $H_2^* H_1^*{}^{-1}$ が下三角行列のとき, $\epsilon \ll 1$ を使って

$$\Gamma = \begin{cases} \text{diag}(\epsilon^{-j}, \epsilon^{-j+1}, \dots, \epsilon^{-1}, \epsilon, \dots, \epsilon^j), & j=m/2, \\ & m: \text{even} \\ \text{diag}(\epsilon^{-j}, \epsilon^{-j+1}, \dots, \epsilon^{-1}, 1, \epsilon, \dots, \epsilon^j), & j=(m-1)/2, \\ & m: \text{odd} \end{cases}$$

とする。また上三角行列のときは, 上式で $j = -m/2, j = -(m-1)/2$ とする。このようにすると, $\Gamma H_2^* H_1^*{}^{-1} \Gamma^{-1}$ は対角要素が不変であり, 非対角要素は ϵ^i 倍 ($\epsilon \ll 1, i$: 自然数) される。なお, S_0 が minimal observable で零点のないとき, $H_2^* H_1^*{}^{-1}$ は三角行列になることが証明できる。

〔III〕〔I〕, 〔II〕以外るとき, $\Gamma = I_m$ とする。

すると〔I〕, 〔II〕の場合は $T(s)$ の各行の最高次とつぎの次数までは対角化でき, 〔III〕の場合も最高次だけは対角化できる。 S_e^* は定常状態において非干渉化されているので, いずれにせよ ρ が十分小さいとき, S_e^* はかなりの程度非干渉化されていることが期待できる。

3.3 S_e^* の設計アルゴリズム

上述の議論をアルゴリズムの形にまとめる。

- ① 可制御・可観測で右半平面に零点をもたず, 非干渉化可能で安定な(1)式の制御対象 S_0 に対し, (2)式の拡大系 $\bar{S}_0$ を仮想的な制御対象と考える。
- ② (11)式より $n_i = d_i + 2$ を求め, $\bar{H}_0(s) \cdot \bar{\phi}_0(s)$ の各行の最高次とつぎの次数の係数行列 H_1^*, H_2^* を求める。
- ③ $H_2^* H_1^*{}^{-1}$ を“できるだけ対角化する”ように前節の〔I〕～〔III〕に従い Γ を決める。 $Q = \Gamma^T \Gamma$ とする。
- ④ ρ の初期値を仮定し, これを ρ_0 とする。
- ⑤ λ_i を(13), (14), (16), (23)式により計算し, (20)式の A_1 を作る。それを使って, (25)式で Σ^{-1} を計算する。 $N = \Sigma^{-T} \Sigma^{-1}$ とする。
- ⑥ Q, N を一定として S_e^* が条件付安定にならない範囲でできるだけ小さな ρ を探索し, それを ρ_m とする⁹⁾。
- ⑦ $n_1 = n_2 = \dots = n_m$ のとき λ_i は ρ の関数でないので, ⑧へいく。 $|\rho - \rho_m|/\rho_0$ が十分小さければ⑧へいく。そうでないとき, $\rho_0 = \rho_m$ として④へいく。
- ⑧ 最適フィードバック行列を計算し, S_e^* を構成する。

4. 数値例および考察

本設計法の有効性を示すために、二つの制御対象について S_c^* を設計し、その特性を検討する。また、非干渉制御系との比較考察を行う。

〔例1〕 文献7)でも使った3次遅れが二つ結合した2入出力系を制御対象 S_0 とする。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3.5 & -3.5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.4 & -1 & -5.25 & -5.25 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|\bar{H}_0(s) \cdot \bar{\phi}_0(s)| = 0.75$ だから零点はない。 S_0 の極は、 $(-0.5, -1, -2)$, $(-0.25, -1, -4)$ である。 H_1^* , H_2^* は

$$H_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2^* = \begin{bmatrix} 5.25 & 2.625 \\ 1.35 & 3.3 \end{bmatrix}$$

で $|H_1^*| \neq 0$ であり、 $n_1 = n_2 = 4$ である。よって Γ には制限がなく $|\Gamma| = \pm 1$ を満たす実数正則行列でよい。 $H_2^* H_1^{*-1}$ は下三角行列となるので (I) の場合に相当する。よって

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.229 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.052 & 0.229 \\ 0.229 & 1 \end{bmatrix}$$

Γ を左式のようにすれば、 Q は右式のように求まる。

$n_1 = n_2 = 4$ だから BC の半径 r_i は等しく $A_1 = \sqrt{0.75}$ 。 I_2 となり、 Σ^{-1} , N はつぎのように求まる。

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1.155 & 0.577 \\ 0.841 & 1.287 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2.04 & 1.750 \\ 1.750 & 1.989 \end{pmatrix}$$

上記のように求まった Q , N を用いて ρ_m を探索すると、 $\rho_m = 6.87 \times 10^{-5}$ となった。

設計された系を S_c^*1 と呼ぶ。比較のために $Q = N = I_2$ として同様に設計した系⁹⁾を S_c^*2 と呼ぶ。設定値を $r = (0.5, 1.0)^T$ としたときの S_c^*1 , S_c^*2 のステップ応答を Fig. 1 に示した (以下の例の設定値は全て同じものとする)。図の y_{ij} の添字 i は変数の番号を示し、添字 j は1が S_c^*1 の応答、2が S_c^*2 の応答であることを示す。 S_c^*1 の応答は S_c^*2 のそれに比べ

Fig. 1 Step responses of S_c^*1 and S_c^*2 Fig. 2 Step responses of S_c^*1 when a_{33} is varied; 1: $a_{33} = -3.5$, 2: $a_{33} = -1.75$, 3: $a_{33} = -7.0$ Fig. 3 Step responses of S_c^*2 when a_{33} is varied; 1: $a_{33} = -3.5$, 2: $a_{33} = -1.75$, 3: $a_{33} = -7.5$

て、 y_{11} の行き過ぎ量が小さくなり、 y_{21} は立ちあがりがよくなって、全体として応答の姿がよくなり、速応性が改善されていることがわかる。ここで、行列 A の要素を a_{ij} と表わすことにする。 S_c^*1 において、設計後に a_{33} がパラメータ変動して $1/2$ 倍、2 倍になったときの応答をパラメータ変動がない場合と比較して Fig. 2 に示した。添字 j は 1,

2, 3 の順に、 $a_{33} = -3.5, -1.75, -7.0$ の場合を示す。Fig. 3 には、 S_c^*2 について同様に a_{33} がパラ

Fig. 4 Pole configurations of optimal tracking systems; ●: S_c^*1 , ○: S_c^*2 , ■: S_c^*3

Fig. 5 Step responses of S_e^*4 when a_{33} is varied;
1: $a_{33} = -11.5$, 2: $a_{33} = -5.75$, 3: $a_{33} = -23.0$

メータ変動したときのステップ応答を示した。 S_e^*1 は確かにほぼ非干渉化されているが、 $Q=N=I_2$ のように適当に Q , N を決めて設計された S_e^*2 は、大きな干渉が残る、パラメータ変動による応答の乱れも大きいことがわかる。Fig. 4に S_e^*1 , S_e^*2 の極を●, ○で示した。 S_e^*1 はかなりよく2組の4次の BC に漸近していることがわかる。したがって、この場合は仮定[A]はかなりの程度満足しているといえる。

〔例2〕 例1の系で第1のサブシステムの極が $(-0.5, -1, -10)$ であるものを制御対象 S_0 とする。すなわち、行列 A の要素 a_{ij} のうち、 a_{31} , a_{32} , a_{33} は順に -5 , -15.5 , -11.5 であり、 A の残りの要素と B , C は例1のものと等しいとする。この制御対象を例1と同じように設計すると、

$$Q = \begin{bmatrix} 1.002 & -0.0390 \\ -0.0390 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 1.617 & 1.269 \\ 1.269 & 1.615 \end{bmatrix}$$

なり、 $\rho_m = 2.95 \times 10^{-5}$ となった。設計された系を S_e^*3 と呼ぶ。Fig. 5に S_e^*3 のステップ応答を a_{33} が半分と倍に変動したときの応答と共に示した。添字 j は1, 2, 3の順に $a_{33} = -11.5$, -5.75 , -23.0 であることを示す。 S_e^*1 に比べて、 y_{ij} の応答が多少遅いが、 a_{33} の変動に対しても大きな影響をうけず、許容できる応答になっているといえる。Fig. 4に S_e^*3 の極を■で示した。 S_e^*6 の極は、 BC の極に十分漸近していない。これは、点 $(-10, 0)$ にある極がほとんど動いていないためである。一般に S_e^* の極は、 ρ が小さくなるに従い、原点の近くのものから BC の極に漸近していく傾向をもつ。つまり、応答を速くするためにむだのない極の動かし方をしているといえる。この場合仮定[A]は満たされていないのだが、ステップ応答からは、本設計法はそういった場合にもあまり問題がないといえる。

〔例3〕 本設計法には、 S_e^* を非干渉化することが目的の一つになっている。そうであれば、直接非干渉化し、極指定して設計したほうが簡単ですぐれている

Fig. 6 Step responses of S_e' (decoupled) when a_{33} is varied;
1: $a_{33} = -11.5$, 2: $a_{33} = -5.75$, 3: $a_{33} = -23.0$

と考えられるかもしれない。非干渉制御理論では、 $|H_1^*| \neq 0$ のとき非干渉化されたサブシステムの極を任意に指定できるアルゴリズムが与えられているが、極をどのように決定すべきかは述べられていない。そこで、本設計法と比較が容易なように、非干渉化されたサブシステムの極を(18)式の半径比をもつ BC の極に一致させ、条件付安定にならない範囲で BC の半径を一番大きくするようにフィードバック係数を計算し、 S_e^* と同じ構造の制御系を構成することが考えられる。例2の制御対象に対し、この設計を行ったら、 BC の半径は $r_1 = r_2 = 3.2$ となった。設計された系を S_e^*4 と表す。例2と同様に a_{33} を半分と倍に変動させたときの応答といっしょにして、Fig. 6に S_e^*4 のステップ応答を示した。 S_e^*4 の応答は、 S_e^*3 の応答に比べてパラメータ変動のないときは、 y_{21} の立ち上がりが速くなっているが、パラメータ変動があるときは大きく乱れている。 S_e^* は最適設計しているので感度関数の絶対値が1以下という保証がある¹³⁾のに対し、本例の設計法にはないこと、極配置から説明すれば、 S_e^*3 では減衰の速い $(-10, 0)$ の極をほとんど動かしていないのに対し、 S_e^*4 では、それを大きく原点に近づけていること、に起因していると考えられる。よって、本法は計算量は多少多いが、パラメータ感度も一定の保証が与えられた系が、アルゴリズムに従って系統的に設計できるという意味で大きな利点をもっているといえる。

5. おわりに

最適追従制御系 S_e^* の設計における重み行列 Q , N の決定法を提案した。本設計法では、従来の設計法が工学的センスを駆使して極配置をまず明確に指定する必要があるのに対し、 $\rho \rightarrow 0$ で実現するButterworthの極配置(BC)を暗黙のうちに想定し、(i)条件付安定にならないように一定の安定度を保証する、さらに(ii)極の総和を最小にする、(iii)非干渉化する、とい

う要請を課すことによって、系統的に重み行列を決めることが可能となった。本設計法では、仮定[A]のようにならかなり強引な仮定のもとに論を進めたが、設計例で示したように S_e^* の極配置と BC の極とのずれは結果的に問題がない。このことは、紙面の都合上示せなかったが、このように人工的に作った例だけでなく、飛行機の設計のような実際の例についても成立することが確かめられている¹⁰⁾。

本来、制御対象の状態方程式は不正確なものしか得られないこと、またパラメータ変動や外乱があるのが普通であることを考えれば、評価関数の重み行列の決め方もある程度雑なものではいはずだから、本設計法のように、仮定[A]に基づいて論を進めたこと、 Γ 、 ρ_m の選び方に任意性が残されたことも許されるのではないかと考える。その意味では、本設計法によって設計される S_e^* は、真の“最適”制御系の1次近似的なものとしなければならない。また、制御対象が(1)不安定(2)右半平面に零点をもつ(3)非干渉化不可能な場合に対する設計法は今後の課題として残された。しかし、典型的な制御対象に関してだけであるが、従来試行錯誤によってのみ決定された重み行列が、系統的に決定可能になったこと、また設計される S_e^* (同様に S_c)の性質が明確になったことの意義は大きいものとする。最適制御理論においては、理論と実際の乖離が指摘されてきたが、本論文でそのギャップをわずかながらも埋めたのではないかと考える。

参考文献

- 1) D. G. Schultz and J. L. Melsa: State Function and Linear Control Systems, Chap. 8, 9, McGraw-Hill (1967)
- 2) J. S. Tyler and F. B. Tuteur: The Use of a Quadratic Performance Index to Design Multivariable Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-11-1**, 84/92 (1966)
- 3) O. A. Solheim: Design of Optimal Control Systems with Prescribed Eigen Values, Int. J. Control, **15-1**, 143/160 (1972)
- 4) Y. Shih and C. Chen: On the Weighting Factors of the Quadratic Criterion in Optimal Control, Int. J. Control, **19-5**, 947/955 (1974)
- 5) C. A. Harvey and G. Stein: Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-23-3** (1978)
- 6) G. Stein: Generalized Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-24-4** (1979)
- 7) 武田常広, 北森俊行: 線形多入出力最適追従制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **14-4**, 359/364 (1978)
- 8) 武田常広, 北森俊行: 線形多入出力最適追従制御系の極配置の性質, 計測自動制御学会論文集, **15-7**, 858/865 (1979)
- 9) 武田常広, 北森俊行: 線形多入出力最適追従制御系の条

- 件付安定性と ρ の決定法, 計測自動制御学会論文集, **16-1**, 6/13 (1980)
- 10) 武田常広, 北森俊行: 線形多入出力最適追従制御系(S_e^*)の設計法の特徴について, 第19回 SICE 学術講演会予稿集, 43/44 (1980)
  - 11) 武田常広, 北森俊行: オブザーバの一設計法, 第21回自動制御連合講演会前刷, 187/188 (1978)
  - 12) P. Hetrakul and T. E. Fortman: Optimal Decoupling of Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-17-3** (1972)
  - 13) H. Kwakernaak and R. Sivan: Linear Optimal Control Systems, Chap. 2, 3, John-Wiley & Sons, Inc. (1972)
  - 14) E. G. Gilbert: The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback, SIAM J. on Control, **7-1**, 50/63 (1969)

《付 録》

S_e^* を非干渉化するためには、 Γ 、 Σ によって $T(s)$ を対角行列すれば十分であることを一例によって示す(当然ながら、 ρ を小さくすればする程よりよく非干渉化される)。

二つの1次遅れ系が干渉項をもって結合した(A.1)の系を制御対象とする。

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{bmatrix}, B = C = I_2 \quad (\text{A.1})$$

よって、 $\bar{H}_0(s)$ は(A.2)となる。

$$\bar{H}_0(s) = \begin{bmatrix} s(s+c) & 0 \\ -bs & s(s+a) \end{bmatrix} / s^2(s+a)(s+c) \quad (\text{A.2})$$

ここで、 ε を小さな正の値として

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1/\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

と置くと、

$$T(s) = \begin{pmatrix} s(s+c) & 0 \\ -\varepsilon^2 bs & s(s+a) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

となり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ で $T(s)$ は対角化される。残念ながら、このような簡単な例でも、多入出力系の場合、Riccati方程式は手計算で解けないので、 $a=b=c=1$ 、 $\rho=10^{-4}$ とし、 ε を①1、② $1/\sqrt{10}$ 、③ $1/10$ と変えて計算機で解いた。このときの、拡大最適レギュレータ系 $\bar{S}_e$ の極 ξ_i とその総和の絶対値と(ξ_i は S_e^* のそれと等しい)、フィードバック係数 $\bar{K}$ をTable 1に示した。 ε が小さくなるに従い、2組の極が2次の BC に漸近し、極の総和の絶対値が小さくなり、フィードバック係数の要素 k_{ij} のうち、下線を引いて示した k_{12} 、 k_{14} が零に漸近している。

他方、文献14の標準的な非干渉系の設計手法に従い、

$$\mathbf{v}(t) = -\bar{K} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G} \mathbf{r} \quad (\text{A.5})$$

の形式で、閉ループ系の伝達関数行列 $\bar{H}_c(s)$ を

Table 1 Poles, absolute values of the sum of the pole and optimal feedback coefficients;
 $\rho=10^{-4}$; ① $\epsilon=1$ ② $\epsilon=1/\sqrt{10}$ ③ $\epsilon=1/10$

	$Q=N$	ξ_i	$ \sum \xi_i $	$\bar{K}$			
①	$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$	$-7.090888 \pm 7.301153 j$ $-7.090889 \pm 6.801143 j$	28.363554	87.20369 - 9.177816	$\frac{-3.059273}{86.77225}$	13.19814 - 0.464163	$\frac{-0.464164}{13.16541}$
②	$\begin{pmatrix} 10, & 0 \\ 0, & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$	$-7.088719 \pm 7.078355 j$ $-7.088719 \pm 7.028354 j$	28.354876	86.82618 - 9.185873	$\frac{-0.030620}{86.82186}$	13.17760 - 0.464724	$\frac{-0.004647}{13.17728}$
③	$\begin{pmatrix} 100, & 0 \\ 0, & \frac{1}{100} \end{pmatrix}$	$-7.088698 \pm 7.055877 j$ $-7.088698 \pm 7.050877 j$	28.354792	86.82240 - 9.185954	$\frac{-0.000306}{86.82236}$	13.17740 - 0.464729	$\frac{-0.000046}{13.17739}$

$$\bar{H}_c(s) = \text{diag}(h_1(s), h_2(s)) \quad (\text{A.6})$$

$$h_i(s) = \frac{1}{s^2 + \gamma_{i2}s + \gamma_{i1}} = \frac{1}{(s - \xi_{i1})(s - \xi_{i2})} \quad (\text{A.7})$$

のように非干渉化を試みる。比較を容易にするために、極 ξ_{ij} を前述の③と同じように

$$\begin{cases} \xi_{11}, \xi_{12} = -7.088698 \pm 7.055877 j \\ \xi_{21}, \xi_{22} = -7.088698 \pm 7.050877 j \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

のように設計すると

$$G = I_2 \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} 86.85760 & 0 & 13.17740 & 0 \\ -12.17740 & 86.78711 & -1 & 14.17740 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

となる。 $\bar{A}_c \equiv \bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ を作って調べれば容易にわかる

ように、 $\bar{S}_c$ を完全に非干渉化するためには、 $k_{12} = k_{14} = 0$, $h_{23} = -1$ とすることが必要十分条件となる。

先程計算した③の $\bar{K}$ は (A.10) の値にきわめてよく似ていること、また Table 1 で、①→③になるに従い、Table 1 の $\bar{K}$ の値は (A.10) の値に漸近し、特に $k_{12}, k_{14} \rightarrow 0$ となり、 k_{23} が -1 にかなり近いことがわかる。よって、 S_c^* は $\epsilon \rightarrow 0$ によって、近似的に非干渉化されることが確認される。また、 S_c^* が近似的に非干渉化されることは例題によっても確認できる。

また、 $a=c=1$, $b=1$, $1/10$, $1/100$ なる制御対象に対し、 $Q=N=I_2$, $\rho=10^{-4}$ として設計すれば、Table 1 の $\bar{K}$ と完全に等しくなることも容易に確かめられる。