<ショート・ペーパー>

LQ 問題のジブ・クレーン制御への応用†

湯 浅 康 弘*・久 村 富 持*

Application of the LQ-Problem to the Control of a Jib-Crane

Yasuhiro YUASA* and Tomiji HISAMURA*

1. はじめに

ジブ・クレーンの制御方策に関する研究は天井走行形のものほど多くなく、土屋、伊藤¹⁾の旋回クレーンのオンオフ形振れ止め制御、これを起伏角 (θ) 、旋回角 (φ) 両方向の制御に拡張した山崎、伊藤、久村²⁾の研究、さらにロープ長可変の旋回クレーンの制御を微分動的計画法を用いて解いた橋本、坂和³⁾の研究がある程度である。本文は、文献 2) の残存荷揺れ防止を目的としたオンオフ形制御に対し、(i) 運搬途中の荷揺れ防止も考慮、(ii) 切り換え時刻や操作量突変の影響の大きいオンオフ形の代りに連続可変な操作部の採用、のもとに(iii) 制御の簡略化を意図した LQ(線形、2 次形式)問題への帰着と、その結果としての(iv) 荷の加速検出を基にしたフィードバック方策実現を θ 方向制御を中心に考察し、前の結果と比較したものである。

2. 問題の設定と解法

文献 2) に示すように、 θ - φ 両方向の制御は荷の運動を 2 次元面内に制限するとき仮想ブームの起伏角 θ 方向のみの制御問題に帰着できるので、ここでは **Fig. 1** のモデルと考える。仮定(A 1)ロープ長一定、(A 2) 荷は質点、(A 3) ブーム移動速度は制御入力に比例、のもとで、荷の運動方程式は、 β が小角、 $|d^2x_B/dt^2| \ll g$ のとき、

$$\ddot{x} = -x + R \sin \theta \quad (1)$$

ただし、時間 t' は $\omega \triangleq \sqrt{g/l}$ 、 $\omega t' = t$ と置いて正規化し、 $\cdot$ はこの正規化時間 t に関する微分、と表わされる。

一方、仮定(A 3)のもとでブームの運動方程式は

$$\dot{\theta} = ku, \quad |u| \leq 1, \quad k = |\dot{\theta}_{\max}| \quad (2)$$

と表わされる。いま、制御目的を、初期位置鉛直上方 (θ_0) の荷を目標位置鉛直上方 (θ_1) へ、(1)残存荷揺れ、(2)運搬途中の荷揺れともに小さく抑え、なるべ

く(3)短い時間で移動させることとしよう $(-\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi/2; i=0, 1)$ 。この目的を勘案して、(1)式 of の非線形項 $R \sin \theta(t)$ を以下のように時変線形化する(考察 1)すなわち、

$$\begin{cases} \sin \theta(t) \triangleq a(t)\theta(t) \\ a(t) = (\sin \theta_0/\theta_0) + \{(\sin \theta_1/\theta_1) - (\sin \theta_0/\theta_0)\}t/t_f \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $Ra(t) \triangleq \gamma(t)$ 、 $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3] = [x, \dot{x}, \theta]$ と置けば、状態方程式は

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (6)$$

また、出力方程式は加速度 $\ddot{x}(\triangleq y_1)$ 、起伏角 $\theta(\triangleq y_2)$ が観測できるとして、

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \gamma(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

と表わされる。一方、上記の目的より理想端点は $\mathbf{x}_0^T = [\gamma(0)x_3^0, 0, x_3^0]$ 、 $\mathbf{x}_1^T = [\gamma(t_f)x_3^1, 0, x_3^1]$ ($x_3^0 = \theta_0$, $x_3^1 = \theta_1$) であるから、評価指数 J は $\omega_i > 0, i=1 \sim 4$ を荷重パラメータとして、

$$J = \frac{1}{2} \{ \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_1 \}^T \mathbf{G} \{ \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_1 \} + \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + u^2(t)] dt \quad (8)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \omega_4 & 0 & -\gamma(t)\omega_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma(t)\omega_4 & 0 & \gamma^2(t)\omega_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Fig. 1 Model of jib-crane

† 第 10 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 56・5)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Faculty of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received March 26, 1981)

(Revised August 25, 1981)

と表わされる。したがって、 t_f の値と制限 $|u| \leq 1$ を別に考慮することにすれば、問題は (5), (7) 式のもとに (8) 式を最小にする制御 $u(t) (0 \leq t \leq t_f)$ を求める、いわゆる LQ 問題に定式化される。

〔考察1〕 (3), (4) 式の近似誤差は両端点 $\sin \theta_0$, $\sin \theta_1$ では 0 であり、 $\theta(t)$ が t の $(n-1)$ 次式のときは、上記端点を通る t の n 次式で $\sin \theta(t)$ を近似したことに対応する。クレーンの制御の場合、いくつかの (θ_0, θ_1) に対する計算例(注1) (一例は Fig. 3) では、 $\theta(t)$ はほぼ t の 1 次式で近似できた。なお、 $\theta(t)$ が t の 1 次式のとき、その最大誤差 $\max_{0 \leq t \leq t_f} |\sin \theta(t) - a(t)\theta(t)|$ とその相対値 (最大誤差/ $\sin \theta_1 - \sin \theta_0$) は θ_0, θ_1 に依存するが、 $|\theta_1 - \theta_0|$ が $20 \sim 70^\circ$ の範囲では後者は約 4% 程度に抑えられる。さらに評価式 (8) の第 1 項の終端点における近似による誤差は 0 である。

$t_f, Q(t), G$ を既知 (後述) とすれば、この LQ 問題の解はリカッチ方程式の解を用いて周知のように、

$$u(t) = -b^T \{P(t)x(t) + F(t)x^1\} \quad (10)$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A(t)^T P(t) - P(t)bb^T P(t) + Q(t); P(t_f) = G \quad (11)$$

$$-\dot{F}(t) = \{A(t)^T - P(t)bb^T\} F(t); F(t_f) = -G \quad (12)$$

と求められる。したがって、 $P(t), F(t)$ を事前に計算、記憶しておくことにより、フィードバック則 (10) 式から制御 $u(t)$ が得られる。 $P(t)$ は対称行列であり、 $F(t)x^1 \triangleq [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]^T \triangleq F(t)^T$ と考えれば、(11), (12) 式は 9 元の 2 次連立常微分方程式であり、逆時間方向に計算できる。

〔考察2〕 フィードバックに用いる状態 $x(t)$ は、 $x_3(t) (= \theta(t))$ はブーム支点での角度検出から、また $x_1(t)$ は (5), (6) 式と検出加速度 $\ddot{x}$ より $x_1(t) = -\ddot{x}(t) + \gamma(t)\theta(t)$ として求め、残る $x_2(t)$ は $\dot{x}(t)$ の積分によって計算する。

〔考察3〕 実際には条件 $|u| \leq 1$ は、 $u(t) = -b^T P(t)x(t) - b^T F(t) = -(p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + p_{33}x_3 + f_3)k$ であるから、 $|p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + p_{33}x_3 + f_3| \leq 1/k$ となるように $t_f, Q(t), G$ を調整して満足される。

〔考察4〕 $t_f, Q(t), G$ について、 t_f は $\theta_0 \rightarrow \theta_1$ の最短移動時間 $|\theta_1 - \theta_0|/k$ の 1.2~1.4 倍の値を一応の目安とし、 $|\dot{x}(t_f)|, |\ddot{x}(t_f)|$ (この値は考察2より $|x(t_f)|$ の目安となる) の許容値を参照して漸次小さくする。 G, t_f と $|\dot{x}(t_f)|$ の関係を Fig. 2 に示す。当然、残存荷揺れを抑えるには大きな G が必要となる

Fig. 2 Variations of $\dot{x}(t_f)$ with ω_i and t_f

が、計算例では 5×10^4 以上で顕著な効果がみられた。〔考察5〕 $\theta-\varphi$ 両方向制御; 文献 2) に記したように初期位置、目標位置を通る垂直面内の仮想ブームの θ 方向制御に帰着させて解き、その結果を真のブームの運動に変換する (詳細は文献 2) 参照)

3. シミュレーション結果

ブーム長 $R=0.53$ (m), ロープ長 $l=0.39$ (m) (試作シミュレータに対応), $k=0.027$ のときのコンピュータ・シミュレーションの結果を Fig. 3 に示す。実線は近似 LQ 系の応答、破線は近似系で求めた $P(t), F(t)$ をそのまま非線形系 (1), (2) 式に適用した際の応答である。また、Fig. 4 は $k=0.056$ のときの

Fig. 3 Time behaviors of controls and state variables ; — ; Linearized system,; Nonlinear system, $\theta_0=30^\circ \rightarrow \theta_1=60^\circ$, $t_f=24$, $k=0.027$, $\omega_1=\omega_2=8 \times 10^4$, $\omega_3=4 \times 10^4$, $\omega_4=3 \times 10^3$

注1) $\theta_0 \rightarrow \theta_1 [^\circ]$ として、 $30 \rightarrow 45$, $30 \rightarrow 60$, $20 \rightarrow 70$, $60 \rightarrow 20$, $-60.07 \rightarrow 24.75$

Fig. 4 Comparison between the on-off type control and the LQ type control;
 — ; On-off control ; ; LQ control ;
 (φ, θ) ; $(0, 2\pi/5) \rightarrow (\pi/4, \pi/3)$, $R=0.53$, $l=0.39$,
 $k=0.0562$, $t_f=34$, $\omega_1=\omega_2=\omega_3=5 \times 10^4$, $\omega_4=2.5 \times 10^3$

文献 2) のオンオフ形準最適制御 ($t_f=26$) と本方法 ($t_f=34$ に選ぶ) との比較を示したもので、振動の抑止効果が顕著にでている。なお、計算にはマイコン TM 990/101 M (TI 社) を使い、 $P(t)$, $F(t)$ のオフライン計算に BASIC で約 5~8 分を要した。一方、超小型加速度計 (Entran 社製、感度 15 mV/g) を装着した試作シミュレータ実験においても、雑音除去等の問題はあったが、良好な結果を得ている。

参 考 文 献

- 1) 土屋, 伊藤: 旋回クレーンの荷物の振れ止め制御, 計測と制御, **13**-10, 41/49 (1974)
- 2) 山崎, 伊藤, 久村: ジブ型クレーンの制御に関する理論的考察, 計測自動制御学会論文集, **15**-6, 826/832 (1979)
- 3) 橋本, 坂和・旋回式クレーンの最適制御, 計測自動制御学会論文集, **15**-7, 988/989 (1979)