むだ時間のある線形大規模システムの安定化†

安 田 一 則*・平 井 一 正*

Stabilization of Linear Large-Scale Systems with Time Delays

Kazunori YASUDA* and Kazumasa HIRAI*

Large-scale systems with time delay are often seen in chemical processes and many other systems. In this paper we consider the problem of stabilizing linear large-scale systems with time delay (LSD) described by differential-difference equations

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & A_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N F_{ij} x_j(t) \\ & + \sum_{j=1}^N D_{ij} x_j(t-h_{ij}) + b_i u_i(t), \\ & i=1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

where A_i , b_i are of the companion form, by using local feedback laws

$$u_i(t) = k_i^T x_i(t), \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Such a stabilization problem is studied for linear large-scale systems without time delay (LS) by many researchers, and some sufficient conditions for stabilizability are derived in terms of the structure of interconnection matrices F_{ij} .

The objective of this paper is to extend these conditions for LS to LSD. The stabilizability condition obtained here is given as form of the interconnection matrices F_{ij} and D_{ij} to be satisfied, which can be calculated easily by using a computer, and coincide one for LS by setting $D_{ij}=0$. It should be noted that the conditions obtained here are applicable to LSD whose subsystems are with multi-input, by decomposing each subsystem the set of some single-input systems.

1. はじめに

サブシステムとしてプロセス制御系を含んでいたリ、サブシステム間に物質の輸送があるような大規模システムでは、むだ時間を考慮した解析や設計が必要であり、安定性については多くの研究がなされている^{1)~4)}。ところが、このようなシステムを設計の立場

から検討した研究は、Ikeda-Šiljak⁵⁾ のものを除いてはほとんどない。本論文では、むだ時間のある線形大規模システムを対象とし、おのおののサブシステムに線形フィードバックを施すことによって全体システムを安定化（完全分散安定化）する問題を考察する。

ところで、大規模システムの完全分散安定化の問題は、むだ時間のない線形システムに対してはDavison⁶⁾をはじめ多くの研究があり、主にシステムがどのような構造をしていれば完全分散安定化可能であるかについての十分条件が求められている^{7)~11)}。Ikeda-Šiljak⁵⁾の与えたむだ時間のある大規模システムに対する完全分散安定化可能条件は、むだ時間システムに対する周波数領域での安定条件を用いて導かれ、文献6)~9)の結果を特別な場合として含んでいる。本論文では、このIkedaらの結果⁵⁾を含み、さらには文献10)、11)の結果をも特別な場合として包含する完全分散安定化可能条件を、リアプノフ汎関数を利用することによって導く。また、ここで示される安定化法は、フィードバックに過去の情報の必要のない実用的な方法である。

なお本稿では、ベクトルノルムとしてユークリッドノルムを用い、 $|\cdot|$ で表わす。また、マトリクスノルムはユークリッドノルムから導かれたノルムとする。すなわち、

$$|x| \triangleq (x^T x)^{1/2}, \quad x \in R^n$$

$$\|A\| \triangleq [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}, \quad A \in R^{n \times m}$$

である。ただし、 $\lambda_{\max}(\cdot)$ は最大固有値を示す。

2. 問題の定式化

本論文で対象とするのは、 N 個の線形むだ時間システム

$$S_i: \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + D_{ii} x_i(t-h_{ii}) + b_i u_i(t) \quad (1)$$

$$x_i(t) \in R^{n_i}, \quad u_i(t) \in R, \quad h_{ii} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, N$$

が相互に干渉しあって構成された大規模システムで、全体システム S は、

† 第22回自動制御連合講演会で発表 (昭 54・10)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe

(Received September 11, 1980)

(Revised April 6, 1981)

 Fig. 1 Block diagram of a large-scale system S

$$S: \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^N D_{ij} x_j(t - h_{ij}) + \sum_{j=1}^N F_{ij} x_j(t) \quad (2)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$

で記述されているものとする(注1)。ここに、 A_i, b_i, D_{ij}, F_{ij} は適当な次元の定係数行列で、 h_{ij} ($i \neq j$) は S_j から S_i への干渉におけるむだ時間を表す正数である。対 (A_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots, N$ はすべて完全可制御であるものとする。このとき一般性を失うことなく、 A_i, b_i はコンパニオン形

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{n_i} & \dots & a_1 \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

で表現されているものとすることができる。

ここで考える問題は、全体システム S を、サブシステムごとの線形フィードバック

$$u_i(t) = k_i^T x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

によって安定化できるための条件と安定化法を求めることである。このフィードバック(4)式を全体システム S に施したときの閉ループ系は、

$$S^C: \dot{x}_i(t) = \tilde{A}_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N D_{ij} x_j(t - h_{ij}) + \sum_{j=1}^N F_{ij} x_j(t) \quad (5)$$

$\tilde{A}_i = A_i + b_i k_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, N$

で与えられる。以下では、 S^C において初期時刻は $t = 0$, その初期関数

$$x_i(t) = \phi_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$h = \max_{i,j} h_{ij}$

は区分的に連続な関数とする。このとき、微分方程式(5)の解 $x(t)$, $t \geq 0$ は一意に存在し、かつ連続である¹³⁾。ただし、

(注1) このように記述されるシステムは、複合構造をしているシステムだけでなく、多入出力システムを分割(たとえば input decentralization¹²⁾)することによっても得られる。

$$x(t) \triangleq [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T \in R^n,$$

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

である。

3. 安定性

本稿では、閉ループ系 S^C の安定性をつぎのように定義する。

【定義】 ある非負数 α に対して、 S^C の任意の初期関数 x_0 に対する解 $x(\cdot)$ がすべての $t (\geq 0)$ について

$$\|x_t\| \leq \beta(\alpha) \|x_0\| e^{-\alpha t} \quad (7)$$

を満足するような正数 $\beta(\alpha)$ が存在するとき、 S^C は安定度 α で漸近安定であるという。ただし、 x_t と $\|x_t\|$ は、

$$x_t(s) \triangleq x(t+s), \quad -h \leq s \leq 0$$

$$\|x_t\| \triangleq \sup_{-h \leq s \leq 0} |x(t+s)|$$

で定義された関数および関数ノルムである。

S^C が安定度 α で漸近安定であるための十分条件を、つぎに示しておく。

【補題 1】 S^C が安定度 α で漸近安定であるための十分条件は、 $0 \leq t < \infty$ で定義された連続な汎関数 $V(x_t)$ が存在して、つぎの2条件を満たすことである。

$$(i) \quad a |x(t)| e^{\alpha t} \leq V(x_t) \leq b \|x_t\| e^{\alpha t} \quad (8)$$

$$(ii) \quad D^+ V(x_t) \leq -c(|x(t)|) \quad (9)$$

ここに、 a, b は正の定数で $c(\cdot)$ は連続な正定値増加関数である。また $D^+ V(x_t)$ は、 S^C の解に沿った $V(x_t)$ の導関数で

$$D^+ V(x_t) \triangleq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [V(x_{t+\varepsilon}) - V(x_t)] \quad (10)$$

と定義されているものとする。

(証明) 条件(ii)より、任意の $t (\geq 0)$ について

$$V(x_t) \leq V(x_0)$$

が成立するから、条件(i)を用いて、

$$a |x(t)| e^{\alpha t} \leq b \|x_0\|$$

が導ける。このとき、

$$\begin{aligned} \|x_t\| &= \sup_{-h \leq s \leq 0} |x(t+s)| \\ &\leq \sup_{-h \leq s \leq 0} \left[\frac{b}{a} \|x_0\| e^{-\alpha(t+s)} \right] \\ &= \left(\frac{b}{a} e^{\alpha h} \right) \|x_0\| e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

が成り立つ。これは、 S^C の解が安定度 α で漸近安定であることを示している(注2)。

4. 安定化可能条件と安定化法

以下では、対象とする大規模システム S が、いかなる条件のもとで、サブシステムごとの状態フィードバック(4)式によって安定化されるかを考える。

いま、分離サブシステム S_i の固有値が

$$A_i = \{\gamma_i \lambda_1^i, \gamma_i \lambda_2^i, \dots, \gamma_i \lambda_{n_i}^i\} \quad (11)$$

$$\gamma_i > 0, \operatorname{Re}(\lambda_j^i) < 0, i=1, 2, \dots, N$$

となるように、フィードバックゲイン k_i を

$$k_i = [k_{n_i}^i, k_{n_i-1}^i, \dots, k_1^i]^T \quad (12)$$

$$k_j^i = -a_j^i - \hat{a}_j^i(\gamma_i)^j, j=1, 2, \dots, n_i \quad (13)$$

と選んだとする。ここに、 $\hat{a}_j^i(\gamma_i)^j$ は A_i を根とするモニックな n_i 次方程式の係数で、正の実数、また $(\gamma_i)^j$ は γ_i の j 乗である。このとき、 $\hat{A}_i$ は

$$\hat{A}_i = A_i + b_i k_i^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\hat{a}_{n_i}^i(\gamma_i)^{n_i} & \dots & -\hat{a}_2^i(\gamma_i)^2 & -\hat{a}_1^i(\gamma_i) \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。さてここで、正則変換

$$x_i(t) = \Gamma_i \xi_i(t) \quad (15)$$

$$\Gamma_i = \operatorname{diag}[\gamma_i^{\theta_i+1}, \gamma_i^{\theta_i+2}, \dots, \gamma_i^{\theta_i+n_i}] \quad (16)$$

$$\theta_i: \text{実数}, i=1, 2, \dots, N$$

を施すと、 S^C はつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} \tilde{S}^C: \dot{\xi}_i(t) &= \Gamma_i^{-1} \hat{A}_i \Gamma_i \xi_i(t) \\ &+ \sum_{j=1}^N \Gamma_i^{-1} D_{ij} \Gamma_j \xi_j(t-h_{ij}) \\ &+ \sum_{j=1}^N \Gamma_i^{-1} F_{ij} \Gamma_j \xi_j(t) \\ &= \gamma_i \hat{A}_i \xi_i(t) + \sum_{j=1}^N \hat{D}_{ij} \xi_j(t-h_{ij}) \\ &+ \sum_{j=1}^N \hat{F}_{ij} \xi_j(t) \end{aligned} \quad (17)$$

$$i=1, 2, \dots, N$$

ただし、

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\hat{a}_{n_i}^i & \dots & -\hat{a}_2^i & -\hat{a}_1^i \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{D}_{ij} = \Gamma_i^{-1} D_{ij} \Gamma_j \quad (19)$$

$$\hat{F}_{ij} = \Gamma_i^{-1} F_{ij} \Gamma_j \quad (20)$$

S^C と $\tilde{S}^C$ は、どんな γ_i についても、正則変換(15)のもとで、安定性に関して同じ性質をもつ。そこで以

下では、 $\tilde{S}^C$ について考えることにする。

$\tilde{S}^C$ において、行列 $\hat{A}_i$ は、その固有値が $\{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{n_i}^i\}$ で漸近安定であるから、リアプノフ方程式

$$P_i \hat{A}_i + \hat{A}_i^T P_i = -2Q_i; Q_i > 0, i=1, 2, \dots, N \quad (21)$$

を満たす正定対称解が存在する。これを P_i^+ ($i=1, 2, \dots, N$) と書くことにする。

ここで、汎関数 $V_i(\xi_i)$ を、つぎのように定義する。

$$\begin{aligned} V_i(\xi_i) &\triangleq (\xi_i^T(t) P_i^+ \xi_i(t))^{1/2} e^{\alpha t} \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_{t-h_{ij}}^t \sigma_{ij}(\xi_j^T(\tau) P_j^+ \xi_j(\tau))^{1/2} e^{\alpha \tau} d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

$$\sigma_{ij} = \|(P_i^+)^{1/2} \hat{D}_{ij} (P_j^+)^{-1/2}\| e^{\alpha h_{ij}} \quad (23)$$

この汎関数を(17)式の解に沿って時間微分すると、

$$\begin{aligned} D^+ V_i(\xi_i) &= \frac{e^{\alpha t}}{2(\xi_i^T P_i^+ \xi_i)^{1/2}} \left[2\xi_i^T P_i^+ (\alpha \xi_i + \gamma_i \hat{A}_i \xi_i \right. \\ &+ \sum_{j=1}^N \hat{D}_{ij} \xi_j(t-h_{ij}) + \sum_{j=1}^N \hat{F}_{ij} \xi_j) \\ &+ \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(\xi_j^T P_j^+ \xi_j)^{1/2} e^{\alpha t} \\ &- \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} e^{-\alpha h_{ij}} (\xi_j^T(t-h_{ij}) P_j^+ \xi_j(t-h_{ij}))^{1/2} e^{\alpha t} \\ &\leq e^{\alpha t} \left[\alpha \|(P_i^+)^{1/2} \xi_i\| \right. \\ &- \gamma_i (\lambda_{\min} Q_i (P_i^+)^{-1}) \|(P_i^+)^{1/2} \xi_i\| \\ &+ \sum_{j=1}^N (\|(P_i^+)^{1/2} \hat{F}_{ij} (P_j^+)^{-1/2}\| + \sigma_{ij}) \|(P_j^+)^{1/2} \xi_j\| \\ &\leq e^{\alpha t} \left[\gamma(\alpha - \gamma_i \pi_i) \varphi_i \right. \\ &+ \sum_{j=1}^N \rho_{ij} (\|\hat{F}_{ij}\| + e^{\alpha h_{ij}} \|\hat{D}_{ij}\|) \varphi_j \end{aligned} \quad (24)$$

と計算される。ただし、

$$\xi_i \triangleq \xi_i(t); \varphi_i \triangleq \|(P_i^+)^{1/2} \xi_i(t)\|;$$

$$\pi_i \triangleq \lambda_{\min}(Q_i (P_i^+)^{-1}); \rho_{ij} \triangleq \|(P_i^+)^{1/2}\| \|(P_j^+)^{-1/2}\|$$

ここで、

$$V(\xi) \triangleq [V_1(\xi_1), V_2(\xi_2), \dots, V_N(\xi_N)]^T$$

$$\varphi \triangleq [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T$$

と置くと、(24)式は、

$$D^+ V(\xi) \leq -e^{\alpha t} \tilde{F}^T W \varphi(t) \quad (25)$$

とまとめて書くことができる。ここに

$$\tilde{F} \triangleq \operatorname{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N] \quad (26)$$

$$W \triangleq [w_{ij}]_{N \times N}$$

$$w_{ij} = \begin{cases} \pi_i - [\alpha + \rho_{ii} (\|\hat{F}_{ii}\| \\ + e^{\alpha h_{ii}} \|\hat{D}_{ii}\|)] / \gamma_i & (i=j) \\ -\rho_{ij} (\|\hat{F}_{ij}\| + e^{\alpha h_{ij}} \|\hat{D}_{ij}\|) / \gamma_i & (i \neq j) \end{cases} \quad (27)$$

である。

さて、全体システム $\tilde{S}^C$ のリアプノフ汎関数の候補

(注2) 漸近安定性の厳密な議論については、たとえば文献(14) 8章 §§ 33, 34 を参照されたい。

として

$$\tilde{V}(\xi_i) \triangleq \sum_{i=1}^N \delta_i V_i(\xi_i), \quad \delta_i > 0 \quad (28)$$

を考えよう。(28)式は、適当な正数 a^* , b^* が存在して、

$$a^* \|\xi(t)\| e^{\alpha t} \leq \tilde{V}(\xi_t) \leq b^* \|\xi_t\| e^{\alpha t} \quad (29)$$

と評価できる(注3)。そして、(17)式の解に沿った時間微分は、(25)式を用いると

$$\begin{aligned} D^+ \tilde{V}(\xi_t) &= \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot D^+ V_i(\xi_i) = \delta^T D^+ V(\xi_t) \\ &\leq -e^{\alpha t} \delta^T \tilde{F} W \varphi \triangleq -e^{\alpha t} c^*(\varphi) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\delta^T \triangleq [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]$$

と計算される。したがって、もし $c^*(\varphi)$ が正定値関数ならば、補題1より、全体システム $\tilde{S}^c$ (すなわち S^c) の安定度 α の漸近安定性がいえる。ところで $\varphi(t)$ の各要素は非負であり、 $\varphi=0$ となるのは、 $\xi_1(t)=\xi_2(t)=\dots=\xi_N(t)=0$ のときのみである。したがって、適当な正ベクトル δ があって

$$\delta^T \tilde{F} W > 0 \quad (31)$$

が成り立てば、 $c^*(\varphi)$ の正定値性がいえる。このような δ が存在するためには、行列 W が $\mathcal{M}$ 行列であることが必要十分条件である¹⁵⁾ことより、つぎの定理を得る。

《定理1》 (27)式で定義された行列 W が $\mathcal{M}$ 行列となるような $\gamma_i (>0)$ と $\theta_i (i=1, 2, \dots, N)$ が存在するならば、(2)式で記述されたむだ時間を含む大規模システム S は、安定度 α で完全分散安定化可能である。このとき、各サブシステムに施すフィードバック則は、

$$u_i(t) = k_i^T x_i(t), \quad i=1, 2, \dots, N$$

で与えられる。ただし、 k_i^T は (12), (13) 式で定義されたフィードバックゲインである。

5. 安定化可能構造-I

定理1では完全分散安定化可能であるための十分条件を与えたが、ここではサブシステム間の結合構造に着目したより具体的な安定化可能条件を導こう。

γ_i を、新しいパラメータ γ を用いて

$$\gamma_i \nu_i = \gamma \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (32)$$

$$\gamma > 1, \quad \nu_i > 0$$

と置き、さらに行列 F_{ij} , $\hat{F}_{ij}$, D_{ij} , $\hat{D}_{ij}$ の $p-q$ 要素をそれぞれ、 f_{pq}^{ij} , $\hat{f}_{pq}^{ij}$, d_{pq}^{ij} , $\hat{d}_{pq}^{ij}$ と書くと、

$$\frac{\hat{f}_{pq}^{ij}}{\gamma_i} = f_{pq}^{ij} \frac{\gamma_j \theta_j + q}{\gamma_i \theta_i + p} \cdot \frac{1}{r_i} = f_{pq}^{ij} \gamma \mu_{pq}^{ij} \quad (33)$$

(注3) (29)式の導出は付録に示す。

$$\frac{\hat{d}_{pq}^{ij}}{\gamma_i} = d_{pq}^{ij} \gamma \mu_{pq}^{ij} \quad (34)$$

$$\mu_{pq}^{ij} \triangleq -\frac{\theta_i + 1 + p}{\nu_i} + \frac{\theta_j + q}{\nu_j} \quad (35)$$

$$p=1, 2, \dots, n_i; \quad q=1, 2, \dots, n_j;$$

$$i, j=1, 2, \dots, N$$

を得る。ここで、結合行列 $E=[E_{ij}]_{N \times N} \in R^{n \times n}$ を

$$E_{ij} = [e_{pq}^{ij}]_{n_i \times n_j}$$

$$e_{pq}^{ij} = \begin{cases} 0 & : f_{pq}^{ij} = d_{pq}^{ij} = 0 \text{ のとき} \\ 1 & : \text{それ以外のとき} \end{cases} \quad (36)$$

と定義しておく。

《定理2》 (35)式で定義された μ_{pq}^{ij} において、 $\nu_i (>0)$, $\theta_i (i=1, 2, \dots, N)$ を適当に選んだとき、

$$\mu_{pq}^{ij} \geq 0 \quad (37)$$

となる組 $(i, j; p, q)$ について、 e_{pq}^{ij} が

$$e_{pq}^{ij} = 0 \quad (38)$$

を満たすならば、大規模システム S は任意の安定度で完全分散安定化可能である。

(証明) 定理の条件が満たされているものとする。

このとき、(33), (34)式より、行列 $\hat{F}_{ij}/\gamma_i$, $\hat{D}_{ij}/\gamma_i$, $i, j=1, 2, \dots, N$ の要素は、0であるか、 $\gamma \rightarrow \infty$ で0に近づく要素かのいずれかであることがわかる。したがって、 $\gamma \rightarrow \infty$ とすると

$$\|\hat{F}_{ij}\|/\gamma_i \rightarrow 0, \quad \|\hat{D}_{ij}\|/\gamma_i \rightarrow 0, \quad \alpha/\gamma_i \rightarrow 0$$

$$i, j=1, 2, \dots, N$$

となり、行列 W の各要素は、

$$\begin{cases} w_{ij} \rightarrow \pi_i (>0); & i=j \\ w_{ij} \rightarrow 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

となる。これは、どんな α に対しても W が $\mathcal{M}$ 行列になるような γ の値が存在することを意味し、定理1より、 S の完全分散安定化可能性がいえる。

(注意1) $D_{ij}=0$ として定理2を適用すると、むだ時間のない大規模システムに対する安定化可能条件が得られる。この条件は、文献10)の結果に一致している。

定理2によれば、 A_i , b_i が(3)式のようなコンパニオン形で表現されているとき、システム S が任意の安定度で完全分散安定化できるための条件は、行列 D_{ij} , F_{ij} の要素の値には関係せず、その構造にのみ依存している。以下では、このような構造を、安定化可能構造と呼ぶことにする。安定化可能構造は、 ν_i , θ_i を与えたとき、(37)式を用いて代数的にも計算できるが、つぎのように図的に求めることもできる。すなわち、結合行列 E_{ij} に対して Fig. 2 のように直線 g_{ij} を引くと、ハッチングの部分の座標 (p, q) が、0でなくてもよい要素 e_{pq}^{ij} を示している。ただし、直線

g_{ij} 上の座標は除く。

6. 安定化可能構造-II

むだ時間を含む大規模システム S の安定化可能構造は、適当に ν_i, θ_i ($i=1, 2, \dots, N$) を与えて定理 2 を適用することによって容易に導くことができる。しかし、与えられたシステムが安定化可能構造をしているかどうかを判定するためには、 ν_i, θ_i をどのように定めるかが問題となり、定理 2 の条件は必ずしも適しているとはいえない。ここでは、このような場合に適用の容易な安定化可能構造の判定条件を、Ikeda らの方法⁹⁾を拡張することによって導く。

まず、(36)式で与えた結合行列 E の各ブロック E_{ij} について、その構造を特徴づける数 κ_{ij} を定義する。

$$\kappa_{ij} \triangleq \begin{cases} \max_{(p,q): e_{pq}^{ij} \neq 0} \left(-\frac{p+1}{\nu_i} + \frac{q}{\nu_j} \right) & (E_{ij} \neq 0 \text{ のとき}) \\ -\sum_{i=1}^N \left(\frac{n_i}{\nu_i} \right) & (E_{ij} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (39)$$

ただし、 ν_i (>0) ($i=1, 2, \dots, N$) は、 E_{ij} の構造に応じて前もって定められているものとする(注4)。また、数列 $I_r = \langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) を $N = \langle 1, 2, \dots, N \rangle$ の部分列とし、 $J_r(l) = \langle j_1, j_2, \dots, j_r \rangle$ ($l=1, 2, \dots, r!$)、 $r \leq N$ を I_r の順列とする。

《定理 3》 κ_{ij} についての不等式

$$\sum_{k=1}^r \kappa_{i_k j_k} < 0 \quad (40)$$

が、すべての I_r ($r=1, 2, \dots, N$) と $J_r(l)$ ($l=1, 2, \dots, r!$) について成立するとき、大規模システム S は任意の安定度で完全分散安定化可能である。■

(証明) $\theta_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, N$) と置き、 γ_i を(32)式のように定めると、

$$\begin{aligned} \frac{f_{pq}^{ij}}{\gamma_i} &= f_{pq}^{ij} \gamma \left(-\frac{p+1}{\nu_i} + \frac{q}{\nu_j} \right) \\ &= f_{pq}^{ij} \gamma \kappa_{ij} \gamma \left(-\frac{p+1}{\nu_i} + \frac{q}{\nu_j} - \kappa_{ij} \right) \end{aligned}$$

Fig. 2 Stabilizable structure

(注4) ν_i は、 E_{ij} の構造が与えられれば、7章で例示するよう比較的容易に定められる。

$$\frac{\hat{d}_{pq}^{ij}}{\gamma_i} = d_{pq}^{ij} \gamma \kappa_{ij} \gamma \left(-\frac{p+1}{\nu_i} + \frac{q}{\nu_j} - \kappa_{ij} \right)$$

となり、 κ_{ij} の定義より、

$$-\frac{p+1}{\nu_i} + \frac{q}{\nu_j} - \kappa_{ij} \leq 0$$

である。ところで、ユークリッドノルムから誘導されたマトリクスノルムに関して、

$$\|A\| \leq n(\max_{i,j} |a_{ij}|); A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$$

が成立するから、

$$\begin{aligned} \frac{\|\hat{F}_{ij}\|}{\gamma_i} &\leq n \left(\max_{p,q} \frac{|f_{pq}^{ij}|}{\gamma_i} \right) \\ &\leq n(\max_{p,q} |f_{pq}^{ij}|) \gamma \kappa_{ij} \end{aligned}$$

$$\frac{\|\hat{D}_{ij}\|}{\gamma_i} \leq n(\max_{p,q} |d_{pq}^{ij}|) \gamma \kappa_{ij}$$

と評価できる。また、どんな α (>0) に対しても、 γ を十分大きくすると

$$\tilde{\pi}_i \triangleq \pi_i - \alpha \gamma_i = \pi_i - \alpha \gamma \frac{1}{\nu_i} \quad i=1, 2, \dots, N$$

は正となる。このような γ について、

$$\omega_{ij} \triangleq \rho_{ij} \cdot n \left[(\max_{p,q} |f_{pq}^{ij}|) + \left(\max_{p,q} \frac{|d_{pq}^{ij}|}{e^{\alpha h_{ij}}} \right) \right] \quad (41)$$

と置き、行列 $\tilde{W}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{W} &\triangleq [\tilde{w}_{ij}]_{N \times N} \\ \tilde{w}_{ij} &= \begin{cases} \tilde{\pi}_i - \omega_{ii} \gamma \kappa_{ii} \\ -\omega_{ij} \gamma \kappa_{ij} \quad (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

と定義すると、(27)式の W との間で、すべての i, j について

$$w_{ij} - \tilde{w}_{ij} \geq 0$$

が成立するから、 $\tilde{W}$ が $\mathcal{M}$ 行列ならば W も $\mathcal{M}$ 行列であることがいえる¹⁵⁾。 $\tilde{W}$ が $\mathcal{M}$ 行列であるための必要十分条件は、 $\tilde{W}$ の左上隅主座小行列式がすべて正であること、すなわち

$$\begin{aligned} \det \tilde{W}_r &\triangleq \varepsilon(J_r(l)) \tilde{w}_{1j_1} \tilde{w}_{2j_2} \dots \tilde{w}_{rj_r} > 0, \\ r &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

が成り立つことである。ここに、 $\tilde{W}_r$ は $\tilde{W}$ の r 次左上隅主座小行列、 $\sum$ は数列 $\langle 1, 2, \dots, r \rangle$ のすべての順列 $J_r(l)$ ($l=1, 2, \dots, r!$) についての和を表わし、 $\varepsilon(J_r(l))$ は $J_r(l)$ が偶順列ならば 1、奇順列ならば -1 をとるものとする。ところで、 $\varepsilon(J_r(l)) \prod_{k=1}^r \tilde{w}_{kj_k}$ は

$$\tilde{\pi}_1 \cdot \tilde{\pi}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{\pi}_r$$

であるか、または

$$c(J_r(l)) \gamma \kappa_r, \quad c(J_r(l)): \text{定数の形で表わせる。ただし } \kappa_r \text{ は}$$

$$\kappa_r = \kappa_{1j_1} + \kappa_{2j_2} + \dots + \kappa_{rj_r}$$

であるか、このうち、 $k=j_k$ である κ_{kj_k} の一部（全部ではない）を 0 と置換したものである。したがって、定理の条件 (40) 式が成立していれば、 $\gamma \rightarrow \infty$ とすると、すべての r について

$$\det \tilde{W}_r \rightarrow \tilde{\pi}_1 \cdot \tilde{\pi}_2 \cdot \dots \cdot \tilde{\pi}_r \quad (>0) \quad (43)$$

となり、 $\tilde{W}$ は $\mathcal{M}$ 行列となる。これは同時に W が $\mathcal{M}$ 行列になることを意味している。◀

(注意 2) 定理 3 は、 $\nu_i=1$ ($i=1, 2, \dots, N$) と置くと、文献 5) の結果に一致する。また、 $D_{ij}=0$ と置くことによってむだ時間を含まない場合についての文献 11) の結果と一致する。

(注意 3) 証明は省くが定理 2 と定理 3 とは等価な条件である。

7. 安定化可能構造のいくつかの例

ここでは、安定化可能構造の代表的な例をいくつか示す。なお以下では、大規模システム S において、 A_i , b_i はコンパニオン形をしているものとし、安定化可能構造は結合行列 E に対して示すことにする。

(例 1)

$$E_{ij} = n_i \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\frac{\nu_j}{\nu_i} n_i \leq n_j \right)$$

$$E_{ij} = n_i \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\frac{\nu_j}{\nu_i} n_i > n_j \right)$$

このような構造は、

$$\theta_i = -1, \quad i=1, 2, \dots, N$$

と置き、定理 2 を適用することによって得られる。ここで、 $\nu_i=1$ と置くと文献 8) の結果となり、また $\nu_i=n_i$ と置くと文献 5), 6) の結果を含んだ形となる。

(例 2)

$$E_{ij} = n_i \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_i - 1 \\ n_i - l_i + 1 \end{matrix} \quad (i < j)$$

$$E_{ii} = n_i \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$E_{ij} = n_i \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_j \\ n_j - l_j \end{matrix} \quad (i > j)$$

このような構造は、

$$\nu_i = \prod_{k=1}^i (2n_k)$$

$$\theta_i = -l_i - 0.5, \quad i=1, 2, \dots, N$$

と置き、定理 2 を適用することによって得られる。また、

$$\nu_i = 1 / \prod_{k=1}^i (2n_k)$$

と置くと、 $i < j$ のときと $i > j$ のときの構造が逆になる。

(例 3) 二つのサブシステム S_1 ($n_1=5$), S_2 ($n_2=3$) からなるシステムを考える。このシステムの結合行列 $E=[E_{ij}]_{2 \times 2}$ がつぎのように与えられているものとしよう。

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

これが安定化可能構造かどうかを、定理 3 を用いて調べてみる。まず、 E_{12} に注目して、 e_{12}^{12} と e_{53}^{12} を結ぶ直線を考えると、 $\nu_2/\nu_1=1/4$ となるので、

$$\nu_1=4, \quad \nu_2=1$$

と選ぶ。このとき κ_{ij} を決定する要素は、それぞれ

$$e_{11}^{11} \text{ あるいは } e_{22}^{11}, e_{33}^{11}, e_{44}^{11}, e_{55}^{11}$$

$$e_{12}^{12} \text{ あるいは } e_{53}^{12}$$

$$e_{11}^{21} \text{ あるいは } e_{25}^{21}$$

$$e_{11}^{22} \text{ あるいは } e_{22}^{22}, e_{33}^{22}$$

である。これより、

$$\kappa_{11} = -\frac{1}{4}, \quad \kappa_{12} = -\frac{3}{2}, \quad \kappa_{21} = -2, \quad \kappa_{22} = -1$$

となるから、

$$\kappa_{11} < 0, \kappa_{22} < 0$$

$$\kappa_{11} + \kappa_{22} = -5/4 < 0$$

$$\kappa_{12} + \kappa_{21} = -1/4 < 0$$

を得る。したがって、定理 3 より安定化可能構造であることがわかる。ちなみに、

$$\theta_1 = 13/2, \theta_2 = 0$$

と置いて、定理 2 を適用しても確かめられる。

8. おわりに

本稿では、線形むだ時間システムをサブシステムとし、サブシステム間の相互干渉にもむだ時間のあるような大規模システムを対象として、サブシステムごとに状態フィードバックを施すことによって全体システムを安定化する問題を考察した。そして、全体システムがどのような構造をしていれば完全分散安定化可能であるかを明らかにした。得られた条件は簡単なくつかの不等式で与えており、安定化可能構造の形、および安定化可能かどうかの判定は計算機による繰返し計算によって容易になされる。

ここでは、サブシステムが 1 入力である場合を対象としたが、多入力の場合には Input-Decentralization¹²⁾ や Brunovsky の正準形変換¹⁶⁾によって 1 入力システムの集合に分割すれば、ここでの結果をそのまま適用することができる。

最後に、本論文について有益なご助言とご討論を戴いた神戸大学 池田雅夫助教授に心より感謝いたします。

参考文献

- 1) 得丸, 足立, 雨宮: むだ時間複合系の巨視的漸近安定, 計測自動制御学会論文集, **10-4**, 493/499 (1974)
- 2) 桑原, 森: 大規模システムの周波数領域安定条件, 電気学会論文誌 (C), **96-10**, 17/22 (1976)
- 3) C.A. Desoer and W.S. Chan: Interconnected Linear Multivariable Systems with Delays: System Properties and Input-Output Stability, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22-4**, 604/610 (1977)
- 4) B.D.O. Anderson: Time Delays in Large-Scale Systems, Proc. 18th IEEE CDC, 655/660 (1979)
- 5) M. Ikeda and D.D. Šiljak: Decentralized Stabilization of Large-Scale Systems with Time Delay, Proc. the 17th Annual Allerton Conference on CCC (1979)
- 6) E.J. Davison: The Decentralized Stabilization and Control of a Class of Unknown Non-Linear Time-Varying Systems, Automatica, **10**, 309/316 (1974)
- 7) 池田, 梅藤, 児玉: 線形大規模システムの安定化, 電子通信学会論文誌 (D), **J59-D-5**, 355/362 (1976)
- 8) D.D. Šiljak and M.B. Vukčević: Decentrally Stabilizable Linear and Bilinear Large-Scale Systems, Int. J. Control, **26-2**, 289/305 (1977)
- 9) M. Ikeda and D.D. Šiljak: On Decentrally Stabiliz-

able Large-Scale Systems, Automatica, **16**, 331/334 (1980)

- 10) 安田, 平井: 線形大規模システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, **16-4**, 504/510 (1980)
- 11) M.E. Sezer and D.D. Šiljak: Decentralized Stabilization and Structure of Linear Large-Scale Systems, Proc. the 13th Asilomar Conference on CSC (1979)
- 12) D.D. Šiljak: Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland, New York (1978)
- 13) N.N. Oğuztöreli: Time-Lag Control Systems, Academic Press, New York (1966)
- 14) T. Yoshizawa: Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan (1966)
- 15) 荒木: M行列とその応用-I, システムと制御, **20-12**, 675/680 (1976)
- 16) 児玉, 須田: 制御工学者のためのマトリクス理論(24), システムと制御, **17-8**, 506/514, (1973)

《付録》 ((29)式の導出)

まず, $V_i(\xi_i)$ について評価すると,

$$\begin{aligned} V_i(\xi_i) &\geq (\lambda_{\min} P_i^+)^{1/2} |\xi_i(t)| e^{\alpha t} \\ &\geq \lambda_m^{1/2} |\xi_i(t)| e^{\alpha t} \\ \lambda_m &\triangleq \min_i (\lambda_{\min} P_i^+) \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} V_i(\xi_i) &\leq (\lambda_{\max} P_i^+)^{1/2} |\xi_i(t)| e^{\alpha t} \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} (\lambda_{\max} P_j^+)^{1/2} \int_{t-h_{ij}}^t |\xi_j(\tau)| e^{\alpha \tau} d\tau \\ &\leq (\lambda_{\max} P_i^+)^{1/2} |\xi_i(t)| e^{\alpha t} \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} (\lambda_{\max} P_j^+)^{1/2} \int_{t-h}^t |\xi_j(\tau)| e^{\alpha \tau} d\tau \\ &\leq \lambda_M^{1/2} \|\xi_i\| e^{\alpha t} \\ &\quad + \lambda_M^{1/2} h \|\xi_i\| e^{\alpha t} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\lambda_M \triangleq \max_i (\lambda_{\max} P_i^+)$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\xi_i) &= \sum_{i=1}^N \delta_i V_i(\xi_i(t)) \geq \lambda_m^{1/2} e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N \delta_i |\xi_i(t)| \\ &\geq \lambda_m^{1/2} \delta_m |\xi_i(t)| \\ \delta_m &\triangleq \min_i \delta_i \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\xi_i) &\leq \lambda_M^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \delta_i \right) \|\xi_i\| e^{\alpha t} \\ &\quad + \lambda_M^{1/2} h \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_i \sigma_{ij} \right) \|\xi_i\| e^{\alpha t} \\ &= \lambda_M^{1/2} \left[\left(\sum_{i=1}^N \delta_i \right) + h \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_i \sigma_{ij} \right) \right] \|\xi_i\| e^{\alpha t} \end{aligned}$$

が導かれる。