離散時間 MRACS の漸近安定性†

中 村 猛 見*・鈴木 隆*

Asymptotic Stability of a Discrete MRACS

Takumi NAKAMURA* and Takashi SUZUKI*

1. ま え が き

筆者らは、すでに拡張誤差の概念に基づく離散時間モデル規範形適応制御系 (MRACS) の一設計法を提案している^{1),2)}。この手法では、プラントのパラメータはすべて未知としたため、パラメータ調整則の実現にあたり、3次の代数方程式を解かねばならなかった。このため、この MRACS の漸近安定性に関する検討は、必ずしも十分なものではなかった。また、筆者らは上記の手法を単純化した方式についてその漸近安定性を考察した³⁾、その結果は入力信号の richness 条件を前提としたものであり、証明の完全性という点ではなお検討すべき余地が残されていた。

一方、Goodwin ら⁴⁾は、最近、筆者らの方式とは異なった離散時間 MRACS を対象にして、システムの安定性を証明するための手法を示した。この証明法の考え方は、補助パラメータ $g_0(k)$ の有界性に着目すれば、筆者らの MRACS にも適用することができる。本論文は、このような観点から先に提案した MRACS の漸近安定性を明らかにする。また、この MRACS では、プラントパラメータの変動範囲の上限が既知の場合には、適応アルゴリズムの単純化を図ることができ、この場合にもシステムの漸近安定性が保証されることも併わせて示す。

2. 考察すべき MRACS の概要

はじめに、本論文で考察すべき MRACS の概要について説明しておく。プラントおよび規範モデルとしては、つぎのものを考える。

$$\text{プラント: } A(z)x(k) = B(z)u(k) \quad (1)$$

ただし、

$$A(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i, \quad B(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^i \quad (m \leq n-1)$$

$$\text{規範モデル: } A_M(z)x_M(k) = B_M(z)r(k) \quad (2)$$

ただし、

$$A_M(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{Mi} z^i, \quad B_M(z) = \sum_{i=0}^m b_{Mi} z^i$$

ここに、プラントのパラメータ a_i, b_i は未知の定数、($b_m > 0$)。プラントの零点 ($B(z)=0$ の根) はすべて z 平面上の単位円内に存在するものと仮定する。また、規範モデルは漸近安定であり、規範入力 $r(k)$ は有界とする。ここで考える設計問題は、 $k \rightarrow \infty$ で $x(k) \rightarrow x_M(k)$ ならしめるような $u(k)$ を合成することである。

設計にあたり、まず $n-1$ 次の漸近安定な多項式

$$F(z) = z^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} f_i z^i \quad (3) \text{ (注1)}$$

を用いて、(1)式をつぎのように書き直す。

$$x(k) = b_m z^{-l} u(k) + z^{-l} F^{-1}(z) D(z) u(k) + z^{-l} F^{-1}(z) C(z) x(k) \quad (4)$$

ただし、

$$D(z) = \sum_{i=0}^{n-2} d_i z^i, \quad C(z) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i z^i$$

$$l = n - m$$

ここに、 d_i, c_i は(1)式の a_i, b_i に対応した未知定数であり、 $A(z), B(z)$ が互いに既約であるかぎり、一意に定められる。

ここで、プラント・規範モデル間の出力誤差を、

$$e(k) = x(k) - x_M(k) \quad (5)$$

とし、さらに拡張信号 $w(k)$ を導入して拡張誤差 $\eta(k)$ を、

$$\eta(k) = e(k) + w(k) \quad (6)$$

と定義すると、(4)~(6)式より $\eta(k)$ は、

$$\eta(k) = b_m u(k-l) - \alpha^T v(k-l) + w(k) \quad (7)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} v_i(k) &= z^{i-1} F^{-1}(z) x(k), \quad i=1 \sim n \\ v_{n+i}(k) &= z^{i-1} F^{-1}(z) u(k), \quad i=1 \sim n-1 \\ v_{2n}(k) &= z^l x_M(k) \\ v(k) &= [v_1(k), \dots, v_{2n}(k)]^T \\ \alpha &= [-c_0, \dots, -c_{n-1}, -d_0, \dots, -d_{n-2}, 1]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

つぎに、 $2n+1$ 個の可変パラメータ $g_0(k), g(k) = [g_1(k), \dots, g_{2n}(k)]^T$ および補助信号 $v_0(k)$ を導入し、

$$u(k) = g^T(k) v(k) \quad (9)$$

(注1) 特別な場合として、 $f_i=0$ ($i=0 \sim n-2$) としてもよい。

† 第23回自動制御連合講演会で発表 (昭 55・11)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka (Received February 12, 1981)

$$v_0(k-l) = (g(k) - g(k-l))^T v(k-l) \quad (10)$$

$$w(k) = g_0(k) v_0(k-l) \quad (11)$$

と置くと (7) 式は,

$$\begin{aligned} \eta(k) &= (b_m g(k) - \alpha)^T v(k-l) \\ &\quad + (g_0(k) - b_m) v_0(k-l) \\ &\equiv \tilde{\phi}^T(k) \tilde{v}(k-l) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(k) &= [\phi_0(k), \phi^T(k)]^T, \quad \tilde{v}(k) = [v_0(k), v^T(k)]^T \\ \phi_0(k) &= g_0(k) - b_m, \quad \phi(k) = b_m g(k) - \alpha \end{aligned}$$

(12) 式の $\eta(k)$ は, $\tilde{\phi}(k)$ を,

$$\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}(k-l) - \tilde{F} \tilde{v}(k-l) \eta(k) \quad (\tilde{F} = \tilde{F}^T > 0) \quad (13)$$

なる調整則に従って調節することにより, $k \rightarrow \infty$ で $\eta(k) \rightarrow 0$ ならしめることができる。(証明は 3 章)

(13) 式において, $\tilde{F}$ を

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & b_m \Gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma_0 > 0, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (14)$$

とすると, $g_0(k)$, $g(k)$ に対する調整則は,

$$g_0(k) = g_0(k-l) - \gamma_0 v_0(k-l) \eta(k) \quad (15 \cdot a)$$

$$g(k) = g(k-l) - \Gamma v(k-l) \eta(k) \quad (15 \cdot b)$$

なお, 調整則 (15・a) 式に (15・b), (10) 式を用いると,

$$g_0(k) = g_0(k-l) + \gamma_0 v^T(k-l) \Gamma v(k-l) \eta^2(k) \quad (16)$$

上式より, $g_0(k)$ は単調増加関数であり, $g_0(j) \geq 0$ ($j=0, 1, \dots, l-1$) なるかぎり, $g_0(k) \geq 0$ となることわかる。

(15) 式の調整則を実現するために必要な拡張誤差 $\eta(k)$ は, (10), (15・b), (16), (11), (6) 式より得られるつぎの 3 次方程式の解として求めることができる。

$$C_3(k) \eta(k) + C_1(k) \eta(k-l) - e(k) = 0 \quad (17)$$

ただし,

$$C_3(k) = \gamma_0 (v^T(k-l) \Gamma v(k-l))^2$$

$$C_1(k) = 1 + g_0(k-l) v^T(k-l) \Gamma v(k-l)$$

(17) 式は, $g_0(k-l) \geq 0$ なるかぎり, 1 個の実根と 1 対の共役複素根をもつ。

3. MRACS の漸近安定性

この章では, 上述の適応制御系のプラント・規範モデル間の出力誤差の漸近安定性を明らかにする。

まず, 調整則 (13) 式により $k \rightarrow \infty$ で $\eta(k) \rightarrow 0$, $(\tilde{\phi}(k) - \tilde{\phi}(k-l)) \rightarrow 0$ となることを示す。パラメータ誤差 $\tilde{\phi}(k)$ のノルムとして,

$$V(k) = \tilde{\phi}^T(k) \tilde{F}^{-1} \tilde{\phi}(k) \quad (18)$$

を考え, $\Delta V(k+l, k) = V(k+l) - V(k)$ を評価すると, (13), (12) 式より,

$$\Delta V(k+l, k) = -2\eta^2(k+l) - \tilde{v}^T(k) \tilde{F} \tilde{v}(k) \eta^2(k+l) \quad (19)$$

$\Delta V(k+l, k) \leq 0$ であるから, $\tilde{\phi}(j)$ ($j=0, 1, \dots, l-1$) が有界ならば $V(k)$, $\tilde{\phi}(k)$ (すなわち, $g_0(k)$, $g(k)$) の有界性が保証される。したがって, つぎの関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta V(k+l, k) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2\eta^2(k+l) + \tilde{v}^T(k) \tilde{F} \tilde{v}(k) \eta^2(k+l)) < \infty \end{aligned} \quad (20)$$

上式より, $k \rightarrow \infty$ で $\eta(k) \rightarrow 0$, $\tilde{v}(k-l) \eta(k) \rightarrow 0$ となることわかる。さらに, $\tilde{v}(k-l) \eta(k) \rightarrow 0$ と $\tilde{\phi}(k)$ が有界なることを考えると, (13) 式より $(\tilde{\phi}(k) - \tilde{\phi}(k-l)) \rightarrow 0$ となることもわかる。

つぎに, $\eta(k) \rightarrow 0$, $\tilde{\phi}(k) - \tilde{\phi}(k-l) \rightarrow 0$ がプラント・規範モデル間の出力誤差 $e(k)$ を零ならしめることは, 文献 4) の考え方に準拠して, つぎのように証明することができる。まず, (6) 式より,

$$|\eta(k)| \geq |e(k)| - |w(k)| \quad (21)$$

(10) 式に Schwartz の不等式を用いると,

$$|v_0(k-l)| \leq \|g(k) - g(k-l)\| \cdot \|v(k-l)\| \quad (22)$$

したがって, (11) 式の関係と $g_0(k)$ の有界性, (すなわち, $g_0(k) < K < \infty$) を考えると, (21) 式は,

$$|\eta(k)| \geq |e(k)| - K \|g(k) - g(k-l)\| \cdot \|v(k-l)\| \quad (23)$$

ここで, $\eta(k) \rightarrow 0$, $(g(k) - g(k-l)) \rightarrow 0$ なることを考えると, 上式より $k \rightarrow \infty$ でつぎの関係が成り立つ。

$$|e(k)| / \|v(k-l)\| \rightarrow 0 \quad (24)$$

したがって, 信号 $v(k-l)$ が有界ならば $e(k) \rightarrow 0$ が保証されることがわかる。このため, つぎに $v(k-l)$ が有界であることを背理法によって示す。

いま, (1) 式のプラントの零点はすべて単位円内に存在するので, つぎの関係を成立させるような正の定数 c_1, c_2 が存在する⁴⁾。

$$|u(k-l)| \leq c_1 + c_2 \max_{0 \leq j \leq k} |x(j)| \quad (25)$$

したがって, (8) 式で定義される信号 $v(k)$ に対しても, 多項式 $F(z)$ が漸近安定で, 規範モデルの出力 $x_M(k)$ が有界であることより, つぎの関係が成り立つ。

$$\|v(k-l)\| \leq d_1 + d_2 \max_{0 \leq j \leq k} |x(j)| \quad (26)$$

ただし, $0 < d_1 < \infty$, $0 < d_2 < \infty$

上式に, (5) 式より得られる関係

$$|e(j)| \geq |x(j)| - |x_M(j)| \geq |x(j)| - c_3 \quad (27)$$

ただし,

$$c_3 = \max_{0 \leq j \leq k} |x_M(j)|$$

を用いると,

$$\|v(k-l)\| \leq d_3 + d_2 \max_{0 \leq j \leq k} |e(j)| \quad (28)$$

ただし,

$$d_3 = d_1 + d_2 c_3$$

ここで, $\{v(k-l)\}$ を発散列と仮定すると, 上式の関係より, $\{e(k)\}$ も発散列ということになる。したがって, このとき

$$k_i \rightarrow \infty \text{ で } e(k_i) \rightarrow \infty$$

かつ,

$$k \leq k_i \text{ に対して } |e(k)| \leq |e(k_i)|$$

となるような時刻列 $\{k_i\}$ が存在し, このような k_i に対して, $k_i \rightarrow \infty$ となるときつぎの関係が成り立つ。

$$\frac{|e(k_i)|}{\|v(k_i-l)\|} \geq \frac{|e(k_i)|}{d_3 + d_2 |e(k_i)|} \rightarrow \frac{1}{d_2} \quad (29)$$

上式の関係は (24) 式の関係に矛盾する。したがって, $\{v(k-l)\}$ が発散列になるという仮定は誤りであり, $v(k-l)$ はすべての k に対して有界ということになる。

4. 簡単化アルゴリズムの漸近安定性

文献 2) で示したように, 2 章で述べた適応アルゴリズムは, プラントパラメータ b_m の変動範囲の上限 $b_{m\max}$ があらかじめわかっている場合には, 可変パラメータ $g_0(k)$ を,

$$g_0(k) = g_0 > b_{m\max}/2 \quad (30)$$

として固定することにより, 簡単化することができる。この場合の拡張誤差 $\eta(k)$ の値は (17) 式において, $\gamma_0 = 0$ と置くことにより, つぎのように求められる。

$$\eta(k) = e(k) / (1 + g_0 v^T(k-l) \Gamma v(k-l)) \quad (31)$$

この簡単化したアルゴリズムによっても, MRACS としての安定性が保証されることは, つぎのように示すことができる。まず, $g_0(k) = g_0$ なる場合, 拡張誤差方程式 (12) 式は,

張誤差方程式 (12) 式は,

$$\eta(k) = \phi^T(k) v(k-l) + (g_0 - b_m) v_0(k-l) \quad (32)$$

また, この場合, $\phi(k)$ に対する調整則は (13), (14) 式より,

$$\phi(k) = \phi(k-l) - b_m \Gamma v(k-l) \eta(k) \quad (33)$$

ここで, パラメータ誤差 $\phi(k)$ のノルムとして,

$$V(k) = \phi^T(k) (b_m \Gamma)^{-1} \phi(k) \quad (34)$$

を考えると, $\Delta V(k+l, k)$ は (32), (33) 式より,

$$\begin{aligned} \Delta V(k+l, k) = & -2\eta^2(k+l) \\ & - (2g_0 - b_m) v^T(k) \Gamma v(k) \eta^2(k+l) \end{aligned} \quad (35)$$

(30) 式の関係より, $2g_0 - b_m > 0$ 。したがって, $\Delta V(k+l, k) < 0$ となる。この結果から $k \rightarrow \infty$ で $\eta(k) \rightarrow 0$, $(\phi(k) - \phi(k-l)) \rightarrow 0$, $e(k) \rightarrow 0$ が結論できることは 3 章と同様である。

5. あとがき

以上, 筆者らが先に示した離散時間 MRACS について, その漸近安定性を明らかにした。本論文では, 単一入出力系について述べたが, ここに示した証明法は, 文献 2) の多変数 MRACS に対してもそのまま適用することができる。

参考文献

- 1) 鈴木, 高島: 超安定離散時間モデル規範形適応制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **13**-5, 433/438 (1977)
- 2) 鈴木, 中村: 多変数離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **15**-3, 284/290 (1979)
- 3) 鈴木, 中村: 離散時間モデル規範形適応制御系の漸近安定性, 計測自動制御学会論文集, **16**-1, 130/136 (1980)
- 4) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines: Discrete-Time Multivariable Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC**-25-3, 449/456 (1980)