サンプル値系の準最適制御†

——評価とサンプリング回数のトレード・オフ考慮——

毛 利 彰*・山 根 健 治**・高 田 勝*

Sub-Optimal Controls of Sampled-Data Systems

——Considering the Trade-Off Between Performance and the Number of Samplings——

Akira MOHRI*, Kenji YAMANE** and Masaru TAKATA*

In this paper, we propose two sub-optimal control methods of sampled-data systems, which consider the trade-off between performance and the number of samplings. They are as follows: 1) Multirate sampled-data control method, in which each component of input may have a different constant sampling interval. 2) Quasi-variable interval sampled-data control method, in which the sampling interval of each component of input need not be constant and can have integer multiple values of a basic interval T .

Two simple numerical examples show these methods are effective for practical uses.

1. ま え が き

計算機の普及により、サンプル値制御の実システムへの適用は興味ある問題となっている。サンプル値制御を実システムに適用する場合、理論上はサンプリング周期が小さいほうが評価値はよいであろう。しかし、サンプリング周期が小さくなると、i) 求められた最適入力各サンプリング時刻での変動があまり意味をもたない場合がある。たとえば整定状態に近いところでの小さな変動など。ii) 機械的な操作端をもつ系では、あまり小さな周期で変動させることは好ましくない。iii) 記憶すべきフィードバックゲインの数が多くなる、などの問題点が生じる。したがって、実用上はサンプリング周期をなるべく大きくするほうが好ましい場合も多いと考えられている。この場合、サン

プリング周期が大きくなるにつれて、評価がどれくらい劣化するかが問題となる。Levis など¹⁾は1入力無限時間サンプル値レギュレータのサンプリング周期が評価に及ぼす影響について報告しているが、多入力系についてはふれていない。また Schlueter²⁾、Kuo と Tabak³⁾は与えられたサンプリング数で、サンプル値入力の大きさとサンプリング時刻を最適に決める方法を提案しているが、これらはいずれも非線形計画問題となり、計算の複雑さの点で実用的とはいえない。そのほか、制御入力の変動に対するコストを考慮したもの⁴⁾や、パルス幅変調制御の分野で準最適ものを求めているものもある⁵⁾。

本論文では、隣り合うサンプル区間で最適値があまり変動しない入力、あるいは、最適値からの変動の評価関数への影響が小さい入力に対しては、サンプリング周期を大きくしても、ほとんど最適に近い制御が可能であるとの考えのもとに、(1)多入力サンプル値系に対して、いくつかの入力グループが異なる周期をもつ multirate サンプル値制御、(2)制御の初期あるいは評価に大きく影響すると考えられるところでは、サンプリング周期を小さくし、評価にあまり影響を及ぼさないところ、たとえば整定状態にほぼ近いようなところでは、それをできるだけ大きくするとした準可変周期(注1)サンプル値制御、の二つの方法を提案し、それらの方法が実用的な準最適制御として有効であることを例題によって示す。なお、ここで提案する方法は、計算法の点でも文献2)や3)よりも簡単であり実用的といえる。以下、2章で、サンプリング周期に対する、開ループモード周波数や評価関数感度からの考察

† 第23回自動制御連合講演会で一部発表(昭55・11)

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

** 宇部工業高等専門学校 宇部市常盤台

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

** Ube Technical College, Ube

(Received January 8, 1981)

(Revised August 21, 1981)

(注1) 適当に定めた基本周期の整数倍の時刻でのみ入力の値を変えうとした場合を、ここではこのように呼ぶこととする。

を行い、3章で、multirate サンプリングによる準最適制御を述べ、4章で、準可変な周期をもつ準最適制御について述べる。

2. サンプリング周期に対するモード周波数や評価関数感度よりの考察

2.1 モード周波数よりの考察

Levis など¹⁾は、開ループ系が一對の共役な複素極 $\alpha \pm j\beta$ をもつ 1 入力無限時間最適サンプル値レギュレータの評価関数値は、入力のサンプリング周期を大きくしていくとき、ゆるやかに単調増加し、サンプル値系が不可制御になるサンプリング周期 π/β に近づくにつれて急激に大きくなることを示している。したがって、大まかな目安であるが、終端時間がある程度長ければ終端時間指定の最適サンプル値レギュレータの場合にも、入力のサンプリング周期の上限が、 π/β よりも小さい適当な値になるであろうと類推される。さらに、多入力系の場合には系がつぎの仮定、i) 複素開ループ極には、その虚数部の絶対値が小さいもの（以後低周波モードという）と大きいもの（以後高周波モードという）がある。ii) 入力の中には高周波モードにあまり作用しないものがある、を満たしていれば、すべての入力のサンプリング周期を同一にする必要はなく、個々の入力のサンプリング周期の上限は、それが支配的に作用するモードの虚数部のみから決定できると考えられる。しかし、以上のようにして各入力のサンプリング周期をできるだけ大きくする方法は、評価関数値の増加が小さいという意味で必ずしも有効であるとは限らない（たとえば、モード変数に対する評価の重みが、低周波モードと高周波モードで大きく異なる場合など）。したがって、上に述べた意味でどの入力のサンプリング周期を大きくできるかをより定量的にとらえるために、つぎに述べる評価関数感度を考える。

2.2 評価関数感度よりの考察

つぎの最適レギュレータ問題を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt \quad (2)$$

ここで、 $x(t)$ は n 次元状態ベクトル、 $u(t)$ は m 次元入力ベクトル、 A は $n \times n$ 行列、 B は $n \times m$ 行列、 Q_f , Q は $n \times n$ 準正定対称行列、 R は $m \times m$ 正定対称行列とする。(1), (2) 式をサンプリング周期 T のサンプル値系で表わす。時間区間 $[0, t_f]$ を N 等分し、

$x_k = x(kT)$, $u_k = u(kT)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), $x_N = x(t_f)$ と書くと、(1), (2) 式は

$$x_{k+1} = Gx_k + Hu_k, \quad x_0 = x(0), \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{2} x_N^T Q_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i^T \hat{Q} x_i + 2x_i^T M u_i + u_i^T \hat{R} u_i) \quad (4)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} G &= e^{AT}, \quad H = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \cdot B, \\ Q_N &= Q_f, \quad \hat{Q} = \int_0^T e^{A\tau} Q e^{A\tau} d\tau, \\ M &= \int_0^T e^{A\tau} Q \left(\int_0^{\tau} e^{A\sigma} d\sigma \right) d\tau \cdot B, \\ \hat{R} &= RT + B^T \int_0^T \left(\int_0^{\tau} e^{A\sigma} d\sigma \right) Q \left(\int_0^{\tau} e^{A\sigma} d\sigma \right) d\tau \cdot B \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

いま、サンプル値入力の第 k 時刻の値が、最適値 u_k^* から Δu_k だけ変動したとき、時刻 $(k+1)T$ 以降の軌道は、

$$x_i = x_i^* + G^{i-(k+1)} H \Delta u_k \quad (i=k+1, \dots, N) \quad (6)$$

となる（ただし、 $*$ は最適を意味する）。(6) 式を (4) 式に代入すると

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{1}{2} x_N^{*T} Q_N x_N^* + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i^{*T} \hat{Q} x_i^* + 2x_i^{*T} M u_i^* + u_i^{*T} \hat{R} u_i^*) \right]_1 \\ &+ \left[\left\{ x_N^{*T} Q_N G^{N-(k+1)} H + \sum_{i=k+1}^{N-1} (\hat{Q} x_i^* + M u_i^*)^T G^{i-(k+1)} H + x_k^{*T} M + u_k^{*T} \hat{R} \right\} \Delta u_k \right]_2 \\ &+ \left[\frac{1}{2} \Delta u_k^T \left\{ (G^{N-(k+1)} H)^T Q_N (G^{N-(k+1)} H) + \sum_{i=k+1}^{N-1} (G^{i-(k+1)} H)^T \hat{Q} (G^{i-(k+1)} H) + \hat{R} \right\} \Delta u_k \right]_3 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。最適性の条件より、 $[\dots]_2 = 0$ (注 2)、また $[\dots]_1 = J^*$ より、入力の変動 Δu_k による評価の増分 ΔJ_k は

$$\begin{aligned} \Delta J_k &= \frac{1}{2} \Delta u_k^T \left\{ (G^{N-(k+1)} H)^T Q_N (G^{N-(k+1)} H) + \sum_{i=k+1}^{N-1} (G^{i-(k+1)} H)^T \hat{Q} (G^{i-(k+1)} H) + \hat{R} \right\} \Delta u_k \end{aligned} \quad (8)$$

(注 2) $[\dots]_2$ の $\{ \}$ の中は、サンプル値系の最適制御問題のこの配関数に、最適値 u_i^* , $i=k, \dots, N-1$ を代入したものになっている。

となる。入力の変動が第 l 成分にのみ生じたとして、
 $\Delta u_k = (0 \cdots 0 \Delta u_k^l 0 \cdots 0)^T$ と置き、

$$\Delta J^l = \sum_{k=0}^{N-1} \{ \Delta J_k / (\Delta u_k^l)^2 \} \quad (9)$$

で表わされる ΔJ^l を、入力 u^l に対する評価関数感度と定義する。このとき ΔJ^l は

$$\Delta J^l = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{q}_{ll}(k) + N \hat{r}_{ll} \right\} \quad (10)$$

となる。ただし、 $\tilde{q}_{ll}(k)$, $\hat{r}_{ll}$ はそれぞれ、行列 $\tilde{Q}(k) = (G^k H)^T \{ Q_N + (N-k-1)\hat{Q} \} (G^k H)$, $\hat{R}$ の第 l 対角要素である。したがって、 ΔJ^l の値が他の入力のそれに比べて小さい場合には、その入力のサンプリング周期を大きくできると考える。

3. 入力によって異なる周期をもつ準最適制御

2章の考察に基づき、多入力系に対して、各入力グループが異なるサンプリング周期をもつ準最適制御法を示す。ここでは、系は2章1節の仮定 i), ii) を満たすものとし、その場合準最適解はつぎの手順にしたがって求められる(注3)。i) 開ループモード周波数の最大値 $\beta_{\max}$ を考慮して、基本サンプリング周期を決める(注4)。ii) (10)式より、各入力に対する評価関数感度を求める。iii) すべての開ループモード周波数と評価関数感度を考慮して、サンプリング周期 $\mu_1 T, \mu_2 T$ を決める。ここで μ_1, μ_2 は互いに素な正の整数とし、 $\min(\mu_1, \mu_2) \cdot T$ が i) における基本サンプリング周期に等しくなるように、 μ_1, μ_2, T を選ぶものとする。iv) 以下に示す計算法に従って、 μ_1, μ_2, T を用いて最適 multirate サンプル値制御を求める。

3.1 最適 multirate サンプル値制御の計算

入力が複数のサンプリング周期をもつ場合 (Fig. 1 参照)、Chang⁶⁾ の手法を応用して最適制御を求める。すなわち、各サンプリング時刻において、値を変えない入力は状態変数の一部とみなし、ダイナミックプログラミングにより、残りの入力を最適に決定する。いま、 m 次元入力 u_k を $u_k = (u_k^1 T u_k^{2T})^T$, $u_k^1: m_1$ 次元, $u_k^2: m_2$ 次元 ($m_1 + m_2 = m$) と分割し、 u_k^1, u_k^2 のサ

Fig. 1 Multirate sampled-data control.

ンプリング周期を、それぞれ $\mu_1 T, \mu_2 T$ とし $\mu_0 = \mu_1 \cdot \mu_2$ と置くと、最適 multirate サンプル値制御は、行列 $H, M, \hat{R}, \bar{T}_k$ のつぎのような分割

$$\left. \begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix}, \\ \hat{R} &= \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ \hat{R}_{12}^T & \hat{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}, \quad \bar{T}_k = \begin{bmatrix} T_{1k} & T_{2k} & T_{4k} \\ T_{2k}^T & T_{3k} & T_{5k} \\ T_{4k}^T & T_{5k}^T & T_{6k} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を用いて、以下述べるように求められる。ここで、 $\bar{T}_k$ は以下の一連の Riccati 差分方程式の解である。

(1) $k = j\mu_0$ ($j=0, 1, \dots$) のとき

$$u_k = -(\Gamma^T \bar{T}_{k+1} \Gamma + \hat{R})^{-1} (\Gamma^T \bar{T}_{k+1} D + M^T) x_k, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_{1k} &= D^T \bar{T}_{k+1} D + \hat{Q} - (\Gamma^T \bar{T}_{k+1} D + M^T)^T \\ &\quad \cdot (\Gamma^T \bar{T}_{k+1} \Gamma + \hat{R})^{-1} (\Gamma^T \bar{T}_{k+1} D + M^T), \end{aligned} \quad (13)$$

$$T_{ik} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, 6) \quad (14)$$

ここで、

$$D = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} H \\ I_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし、 I_m は $m \times m$ 単位行列である。

(2) $k = j\mu_2$ かつ $k \neq j'\mu_1$ ($j, j'=1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} u_k^2 &= -(\tilde{C}_2^T \bar{T}_{k+1} \tilde{C}_2 + \hat{R}_{22})^{-1} (\tilde{C}_2^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_1 + \tilde{M}_2^T) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ u_k^1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_{1k} & T_{2k} \\ T_{2k}^T & T_{3k} \end{bmatrix} &= \tilde{A}_1^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_1 + \tilde{P}_1 \\ &\quad - (\tilde{C}_2^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_1 + \tilde{M}_2^T)^T (\tilde{C}_2^T \bar{T}_{k+1} \tilde{C}_2 + \hat{R}_{22})^{-1} \\ &\quad \cdot (\tilde{C}_2^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_1 + \tilde{M}_2^T), \end{aligned} \quad (17)$$

$$T_{ik} = 0 \quad (i=4, 5, 6) \quad (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 &= \begin{bmatrix} M_2 \\ \hat{R}_{12} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_1 = \begin{bmatrix} \hat{Q} & M_1 \\ M_1^T & \hat{R}_{11} \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} G & H_1 \\ 0 & I_{m_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 I_{m_1} は $m_1 \times m_1$ 単位行列、 I_{m_2} は $m_2 \times m_2$ 単位行列である。

(3) $k = j\mu_1$ かつ $k \neq j'\mu_2$ ($j, j'=1, 2, \dots$) のとき

$$u_k^1 = -(\tilde{C}_1^T \bar{T}_{k+1} \tilde{C}_1 + \hat{R}_{11})^{-1} (\tilde{C}_1^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_2 + \tilde{M}_1^T)$$

(注3) ここでは簡単のため、サンプリング周期の大きさは2種類としている。

(注4) 基本サンプリング周期の選定に関しては、以下のよう考える。周期を大きくしてもよい場合とか大きくしたい場合には、たとえば $\pi/2\beta_{\max}$ 位にするのが一方法であろう。また小さくすることが可能な場合には、周期を大きくすることによる評価の劣化と、小さくしてより精密な制御を行うことによる費用の増加などとの兼ね合いから、適当な周期を選ぶべきであろう。

$$\begin{bmatrix} x_k \\ u_k^2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} T_{1k} & T_{4k} \\ T_{4k}^T & T_{6k} \end{bmatrix} = \tilde{A}_2^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_2 + \tilde{P}_2 \\ - (\tilde{C}_1^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_2 + \tilde{M}_1^T)^T (\tilde{C}_1^T \bar{T}_{k+1} \tilde{C}_1 + \hat{R}_{11})^{-1} \\ \cdot (\tilde{C}_1^T \bar{T}_{k+1} \tilde{A}_2 + \tilde{M}_1^T), \quad (21)$$

$$T_{ik} = 0 \quad (i=2, 3, 5) \quad (22)$$

ここで,

$$\tilde{M}_1 = \begin{bmatrix} M_1 \\ \hat{R}_{12}^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_2 = \begin{bmatrix} \hat{Q} & M_2 \\ M_2^T & \hat{R}_{22} \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} G & H_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ I_{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

(4) $k \neq j\mu_1$ かつ $k \neq j'\mu_2$ ($j, j'=1, 2, \dots$) のとき
この場合, 入力是不変しない.

$$\bar{T}_k = \bar{A}^T \bar{T}_{k+1} \bar{A} + \bar{P} \quad (24)$$

ここで,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \hat{Q} & M \\ M^T & \hat{R} \end{bmatrix} \quad (25)$$

以上を終端条件

$$T_{1N} = Q_N, T_{iN} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, 6) \quad (26)$$

を用いて解く. そのときの評価関数値 $J_{\min}$ は次式で与えられる.

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x_0^T T_{10} x_0 \quad (27)$$

3.2 例題

本節では, 2 章 1 節の仮定 i), ii) を満たすような多入力系に対しては, 上述の multirate サンプル値制御が, 実用的な準最適制御を与えることを, 簡単な 2 入力 4 次系の例を用いて示す.

対象とする系および評価関数のパラメータはつぎのように与えられるものとする ($n=4, m_1=m_2=1$).

$$A = \begin{bmatrix} 0.0167 & -0.5333 & 0.8 & -0.6667 \\ -0.4 & -0.05 & -0.2 & -0.2 \\ -1.4 & -3.4 & 1.95 & -4.6 \\ -0.3333 & -1.7333 & 1.2 & -2.1167 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2\gamma & 2 \\ 2-\gamma & -1+2\gamma \\ 1 & \gamma \\ -1+\gamma & 1-\gamma \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q = Q_f = I_4, \quad R = I_2, \quad t_f = 24.$$

ここで, I_4 は 4×4 単位行列, I_2 は 2×2 単位行列である. この系のモード変数 x_m による表現

$$x_m = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 1.0 \\ 0 & 0 & -1.0 & -0.05 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

Table 1 Performance sensitivities: $\Delta J^1, \Delta J^2$

r	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
ΔJ^1	235.8	244.2	287.3	365.2	477.9
ΔJ^2	446.8	446.7	464.5	500.2	553.9

Table 2 Minimum cost $J_{\min}$'s for various combinations of sampling intervals

Sampling interval		$r =$				
u^1	u^2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.5	0.5	16.899	17.005	17.692	19.630	25.998
1.0	0.5	16.904	17.008	17.707	19.692	26.234
2.0	0.5	16.960	17.022	17.719	19.717	26.266
0.5	1.0	18.629	18.871	19.592	21.441	27.619
1.0	1.0	18.685	18.875	19.676	21.807	28.640

$$\begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$$

からわかるように, r が小さいとき入力 u^1 は高周波モードにあまり作用しない. いま $T=0.5$ として r の値を適当に変えたときの, r の値と評価関数感度 $\Delta J^1, \Delta J^2$ の値を Table 1 に示す. つぎに, $(\mu_1, \mu_2) = (1, 1), (2, 1), (4, 1), (1, 2)$ (注 5), $(2, 2)$ (注 6) のとき, 各 r に対し 3 章 1 節の方法に従って $J_{\min}$ を計算した結果を Table 2 に示す. この Table 2 からわかるように, $T=0.5$ のとき, $\mu_1=\mu_2=1$ の場合に対しての, i) $\mu_1=2, \mu_2=1$ の場合あるいは ii) $\mu_1=4, \mu_2=1$ の場合の $J_{\min}$ の増加はわずかである. たとえば $r=0.2$ のとき, i) の場合で 0.02% の増加, ii) の場合で 0.10% の増加, $r=0.6$ のとき, i) の場合で 0.32% の増加, ii) の場合で 0.44% の増加である. したがって, この場合には, 評価とサンプリング回数のトレード・オフ考慮という点から, $\mu_1=2, \mu_2=1$ あるいは $\mu_1=4, \mu_2=1$ とした multirate サンプル値制御が実用上有効であることがわかる.

4. 準可変な周期をもつ準最適制御

4.1 準可変周期サンプル値制御

一般に, 最適サンプル値レギュレータによって得られる最適制御入力, 制御の初期においてはその値の変動が大きく, その精度は制御性能を大きく左右する. しかし, 制御の終り近く整定状態に近づくにつれて, その値の変動は小さくなり, 制御性能への影響も小さ

(注 5) $\mu_1=1, \mu_2=2$ の場合は, 意味がないと思われるが, 比較のため参考として示した.

(注 6) この場合は $T=1, \mu_1=\mu_2=1$ の場合である.

くなる。そこで、評価関数値の増加をある程度小さくおさえる範囲で、初期の制御はサンプリング周期を小さく、制御の終り近くの整定状態に近いところでは、それをできるだけ大きくするようなサンプル値制御が実用上有効であると考えられる。このようなサンプル値制御を実現するために、ここでは3章1節の計算法を利用する。すなわち、3章1節の一連の“Riccati 差分方程式”に注目すると、時刻 kT において入力の変えるか変えないか(以後入力変動パターンという)を決めると、時刻 $(k+1)T$ における $\bar{T}_{k+1}$ から、入力変動パターンに応じて $\bar{T}_k$ が求められる。したがって、時刻 kT における状態 x_k および入力 u_k が既知であれば、時刻 kT におけるすべての入力変動パターンに対して、時刻 kT から終端時刻までの評価の値を求めることができる。そこで、たとえば、ある入力を一定値に保つような入力変動パターンを用いたときの評価の増分が、一定の基準(ここでは、ある基本サンプリング周期 T での最適入力を用いたときの全体の評価との比 ε を用いる)以下であれば、時刻 kT においてその入力の値は変えないことにする。ところで実際には、時刻 kT における状態 x_k および入力 u_k は、全制御区間にわたってどのような入力変動パターンをとるかによって変化し、既知ではない。そのため、ここでは、基本サンプリング周期 T の最適サンプル値入力 u_k^* およびそれによる軌道 x_k^* を出発値とした反復計算により、入力変動パターンを求め、準可変周期サンプル値制御を求める。以下にそのアルゴリズムを述べる。ただし、以下では、入力がサンプリング周期に関して二つのグループに分けられる場合について話を進めるが、このような考え方は当然一般の r グループの場合に対しても適用できる。また、以下のように記号を定義する。

$\{x_i\}_{0^N} = (x_0, x_1, \dots, x_N) : t=iT (i=0, \dots, N)$ における x の値の系列

$\{u_i\}_{0^{N-1}} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) : i=0$ から $N-1$ までのサンプル値入力の系列

J^* : 基本周期 T での最適サンプル値制御による評価関数値

$P_{l,k}$: 時刻 kT における第 l グループ入力 u_k^l の変動パターン。可変のとき $P_{l,k}=1$, 不変のとき $P_{l,k}=0$, $k=0, \dots, N-1, l=1, 2$

$J_{j,k}$: 時刻 kT で以下のような入力変動パターンを用いたときの、時刻 kT 以降の評価関数値

$$\left. \begin{array}{l} j=1: u_k^1, u_k^2 \text{ 共に可変} \\ j=2: u_k^2 \text{ のみ可変} \\ j=3: u_k^1 \text{ のみ可変} \end{array} \right\} \quad (28)$$

$j=4: u_k^1, u_k^2$ 共に不変

$\bar{T}_{j,k}$: (28)式のような入力変動パターンをもつとして、 $\bar{T}_{k+1}$ より“Riccati 差分方程式”を解いて求められる $\bar{T}_k$

$\{G_i\}_{0^{N-1}} = (G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) : i=0$ から $N-1$ までのフィードバックゲイン行列の系列

$G_{j,k}$: (28)式のような入力変動パターンをもつとしたときの、時刻 kT におけるフィードバックゲイン行列

以下アルゴリズムの詳細を述べるが、各ステップの大略の目的はつぎのとおりである。step 1: 基本周期 T での最適解の計算。step 2: 各時刻 kT におけるより好ましい入力変動パターンの選択。step 3: $G_0, \bar{T}_0$ の計算。step 4: 新しく求めた入力変動パターンと一反復前のパターンとの比較。

[準可変周期サンプル値制御計算アルゴリズム]

(step 1) 基本サンプリング周期 T での最適軌道

$\{x_i^*\}_{0^N}$, 最適入力 $\{u_i^*\}_{0^{N-1}}$ および J^* を求める。 $\{x_i^0\}_{0^N} = \{x_i^*\}_{0^N}$, $\{u_i^0\}_{0^{N-1}} = \{u_i^*\}_{0^{N-1}}$ と置く。またこのときは当然 $p_{l,k}=1$ ($k=0, \dots, N-1, l=1, 2$) であるが、これを $p_{l,k}$ ($k=0, \dots, N-1, l=1, 2$) とする。

(step 2) $k=N-1, \dots, 1$ (注7)について以下を繰返す。

2-1) x_k^0, u_k^0 を用いて $J_{j,k}, \bar{T}_{j,k}$ ($j=1, \dots, 4$) を求める。ただし、 $\bar{T}_{j,k}$ は $j=1$ のとき(13), (14)式より、 $j=2$ のとき(17), (18)式より、 $j=3$ のとき(21), (22)式より、 $j=4$ のとき(24)式より求められ、 $J_{j,k}$ は次式により求められる。

$$J_{j,k} = \frac{1}{2} [x_k^{0T} u_k^{0T}] \bar{T}_{j,k} \begin{bmatrix} x_k^0 \\ u_k^0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

2-2) $J_{4,k} - J_{1,k} < \varepsilon \cdot J^*$ が成立すれば $p_{1,k}=p_{2,k}=0$, $\bar{T}_k = \bar{T}_{4,k}$ と置く。成立しなければ 2-3)へ

2-3) $J_{2,k}$ と $J_{3,k}$ を比較する。 $J_{2,k} \leq J_{3,k}$ ならば 2-4)へ。 $J_{2,k} > J_{3,k}$ ならば 2-5)へ

2-4) $J_{2,k} - J_{1,k} < \varepsilon \cdot J^*$ ならば $p_{1,k}=0$, $p_{2,k}=1$, $\bar{T}_k = \bar{T}_{2,k}$, $G_k = G_{2,k}$ と置く。 $J_{2,k} - J_{1,k} \geq \varepsilon \cdot J^*$ ならば 2-6)へ

2-5) $J_{3,k} - J_{1,k} < \varepsilon \cdot J^*$ ならば $p_{1,k}=1$, $p_{2,k}=0$, $\bar{T}_k = \bar{T}_{3,k}$, $G_k = G_{3,k}$ と置く。 $J_{3,k} - J_{1,k} \geq \varepsilon \cdot J^*$ ならば 2-6)へ

2-6) $p_{1,k}=p_{2,k}=1$, $\bar{T}_k = \bar{T}_{1,k}$, $G_k = G_{1,k}$ と置く
(step 3) 上で求めた $\bar{T}_1$ より (12)~(14)式を用いて $G_0, \bar{T}_0$ を求める。

(step 4) 以上のようにして求めた $\{G_i\}_{0^{N-1}}$ を用い

(注7) $p_{l,0}$ ($l=1, 2$) は当然常に1とする。

て、軌道 $\{x_i\}_{0^N}$ 、およびサンプル値入力 $\{u_i\}_{0^{N-1}}$ を求める。そして $k=1, \dots, N-1, l=1, 2$ なるすべての l, k について $p_{l,k} = p_{l,k}^0$ であれば (step 5) へ。 $p_{l,k} \neq p_{l,k}^0$ なるものが一つでもあれば、 $\{x_i\}_{0^N} = \{x_i\}_{0^N}$ 、 $\{u_i\}_{0^{N-1}} = \{u_i\}_{0^{N-1}}$ 、 $p_{l,k}^0 = p_{l,k}$ ($k=1, \dots, N-1, l=1, 2$) とおいて (step 2) へ戻る。

(step 5) 計算終了。

以上のようにして求められた $\{u_i\}_{0^{N-1}}$ 、 $\{G_i\}_{0^{N-1}}$ は、それぞれ準可変サンプル値入力、およびそのときのフィードバックゲインを与える。ただし、これらがどのようなものになるかは ε の値と関係している。したがって、評価の劣化割合とサンプリング周期の大小という相反する 2 面から検討し、問題に応じて、望ましいものが得られるまで ε の値を変えて上記アルゴリズムを繰返すというようなことが、実際には必要であろう。また $p_{l,k}$ ($k=1, \dots, N-1, l=1, 2$) の値の組がいくつかの異なるものを周期的にとって、上記アルゴリズムが収束しない場合も考えられる。このような場合には、上述の観点から最も望ましいものをそれらの中から選ぶとか、あるいは ε を変えて計算をやり直すといった操作が必要であろう。なお、基本サンプリング周期 T については、2 章 1 節の考察に基づき、開ループモード周波数を考慮して決定する。

Fig. 2 Quasi-variable interval controls u^1 and u^2 compared with optimal control of a basic sampling interval $T=0.5$

4.2 例題

3 章の例題と同じ系を扱う。 $T=0.5$ とし $\varepsilon=10^{-3}$ として上のアルゴリズムによる計算を行った。この場合、計算は 7 回の反復で収束し、準可変周期サンプル値制御による評価関数値は $J'=17.027$ となった。この値は最適サンプル値制御による値 $J^*=17.005$ に比べ 0.13% の増加にすぎず、準最適制御として十分な制御性能をもっていると考えられる。Fig. 2(a), (b) にそれぞれ、 u^1, u^2 の準可変周期サンプル値制御を、最適サンプル値制御と比較して示す。図において、太線は準可変周期サンプル値制御、細線は最適サンプル値制御を示す。

5. あとがき

最適サンプル値制御を実用的な観点から見直した準最適サンプル値制御として、i) 多入力系に対して、各入力グループが異なるサンプリング周期をもつ multirate サンプル値制御、および ii) 準可変なサンプリング周期をもつサンプル値制御を示した。これらはサンプリング周期をできるだけ大きくとることにより、記憶すべきフィードバックゲインの数を少なくすると共に、サンプル値入力の変動回数をできるだけ少なくしている。そのため、特に機械的な操作端をもつ制御系では実用的なメリットがあると思われる。また、準可変周期サンプル値制御は、評価関数感度の計算の必要もなく、4 章 1 節のアルゴリズムで与えた ε をある程度小さくしておけば、評価の劣化も実用上十分許容できる程度に小さくすることができ、multirate サンプル値制御よりもより有効な準最適制御を与える。なおこの場合、基本サンプリング周期 T の上限は開ループモード周波数によって規定され、 T を小さくするほど計算量は多くなるが、制御性能は向上するであろう。

最後に、ここでは評価はすべて $1/2 x_k^T T_k x_k$ のような形で考えた。しかし、一般によく行われているように、たとえば 3 章では $J_{\min} = t_r T_{10}$ として各場合の比較を行う、また 4 章では、途中の $J_{j,k}$ を $J_{j,k} = t_r \bar{T}_{j,k}$ として考察するというのも、もちろん可能である。

参考文献

- 1) A. H. Levis, R. A. Schlueter and M. Athans: On the Behaviour of Optimal Linear Sampled-Data Regulators, Int. J. of Control, **13**-2, 343/361 (1971)
- 2) R. A. Schlueter: The Optimal Linear Regulator with Constrained Sampling Times, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18**-5, 515/518 (1973)
- 3) R. C. Kuo and D. Tabak: A Nonlinear Programming Approach to Optimal Control of Discrete

- Systems with Constrained Sampling Times, Proc. of the 1968 JACC, 918/922 (1968)
- 4) 斎藤, 寺尾: 準最適 PWM 制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **9-1**, 64/70 (1973)
 - 5) I. Awad and I.B. Rhodes: Regulator Problems with a Cost for Applying or Changing Control, Automatica, **11**, 171/180 (1975)
 - 6) S.S.L. Chang: Optimal Control with Multiple Control Periods, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-21-2**, 291/292 (1976)
-