完全制御と完全観測を用いたロバスト制御系の設計法[†]

木村 英 紀*・杉 山 治*

Design of Robust Controller Using Perfect Regulation and Perfect Observation

Hidehori KIMURA* and Osamu SUGIYAMA*

This paper proposes a procedure for recovering asymptotically the robustness of the optimal output feedback system via perfect regulation and perfect observation. The duality between the perfect regulation and the perfect observation is fully exploited to treat both of the return difference matrices at the plant input and at the plant output. Explicit expressions of these return difference matrices are derived and their asymptotic properties are examined. A simple algorithm for perfect regulation is given based on the coprime matrix fraction description. Some numerical results are given to illustrate the theory.

Keyword: optimal regulator, perfect regulation, observer, robust control, return difference matrix

1. は し が き

現代制御理論に基づく設計法の代表である最適レギュレータは、安定余有がきわめて大きいこと¹⁾ 円条件に基づく感度改善が保証されていること²⁾ がその特徴としてよく知られている。これらの特徴は最適レギュレータの一種の「ロバスト性」(Robustness)を示すものであり、最適レギュレータが設計法として優れていることの根拠とされてきた。しかしこれらのロバスト性が成り立つのは最適レギュレータが状態フィードバックによって理想的に実現された場合に限られている。このような場合は実際には稀で、多くの場合状態の一部分に関する出力情報からオブザーバまたはカルマンフィルタを用いて最適レギュレータを実現しなければならないが、その場合上述のロバスト性はもた

や成立しない³⁾。これは最適レギュレータの優位性を主張する際の大きな弱点である。この問題に対処するため、Kwakernaak⁴⁾ および Doyle⁵⁾ は “cheap control” に基づく高ゲインフィードバックを用いて最適レギュレータのロバスト性を漸近的に回復する方法を提案した。これらの方法は計算が面倒であるだけでなく、仮想的な観測雑音を仮定するなど直感的な意味付けの困難な定式化を含んでいる。

本稿ではオブザーバを併合した出力フィードバック系に対する選送差行列をブロック線図の変換によって直接導出し、それに基づいて「完全制御」(perfect regulation)⁶⁾ とその双対である「完全観測」(perfect observation)を用いた新しい漸近的なロバスト性回復の手法を提案する。この方法は Kwakernaak, Doyleらの方法よりも設計の自由度が大きいうえに、より直感的でしかも計算が容易である。また完全制御と完全観測の双対性を利用することにより、制御対象の入力側のロバスト性と出力側のロバスト性を統一的に取り扱うことができる。

2章で後の議論に必要な幾つかの結果を述べ、3章で完全制御の周波数領域における構成アルゴリズムを示す。4章で最適出力フィードバック系に対する選送差行列を導出する。これらの結果に基づいて5章で漸近的なロバスト性回復の手順を述べる。最後に数値例を示す。

2. 準 備

線形システム

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1a)$$

$$y = Cx \quad (1b)$$

を考える。ここで x は n 次元状態ベクトル、 u は r 次元入力ベクトル、 y は m 次元出力ベクトルで、 A , B , C は適当なサイズの定数行列である。システム(1)は可制御、可観測であると仮定する。評価関数

[†] 第4回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表(昭 56・12)

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Suita

(Received April 1, 1982)

(Revised June 17, 1982)

$$J = \int_0^{\infty} (y^T Q y + u^T R u) dt, \quad Q > 0, R > 0 \quad (2)$$

に対する最適レギュレータは、状態フィードバック

$$u = K_{\text{opt}} x, \quad K_{\text{opt}} = -R^{-1} B^T P \quad (3)$$

で与えられる。ただし P はリカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + C^T Q C = 0$$

の正定解である。最適還送差行列を

$$T_{\text{opt}}(s) = I - K_{\text{opt}}(sI - A)^{-1} B \quad (4)$$

で定義すると、 $T_{\text{opt}}(s)$ は不等式

$$T_{\text{opt}}(j\omega)^* R T_{\text{opt}}(j\omega) - R \geq 0, \quad \forall \omega \quad (5)$$

を満足することがよく知られている。(5)式は安定余有や感度改善などの最適レギュレータのロバスト性に関する議論の基礎を与えるもので、本稿ではこれをロバスト性不等式と呼ぶことにする。

最適(カルマン)フィルタのロバスト性不等式も双対性を用いれば直ちに導かれる。すなわち

$$F_{\text{opt}} = -P' C R'^{-1} \quad (6)$$

$$AP' + P' A^T - P' C^T R'^{-1} C P' + B Q' B^T = 0$$

で与えられる最適フィルタゲインに対して、最適還送差行列を

$$T'_{\text{opt}}(s) = I - C(sI - A)^{-1} F_{\text{opt}} \quad (7)$$

で定義すると、 $T'_{\text{opt}}(s)$ は

$$T'_{\text{opt}}(j\omega)^* R' T'_{\text{opt}}(j\omega) - R' \geq 0 \quad (8)$$

を満足する。ここで $Q' > 0, R' > 0$ はそれぞれ外乱、観測雑音の共分散行列である。

ここで完全制御⁵⁾(perfect regulation)について必要な結果を述べておく。

パラメータ ρ を含む状態フィードバックの族

$$u = K_{\rho} x \quad (9)$$

を考える。ただし ρ はゲイン行列の各要素に有理関数として含まれる。 K_{ρ} が

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \|C e^{(A+BK_{\rho})t}\|^2 dt = 0 \quad (10)$$

を満足するとき、 K_{ρ} はシステム(1)に対して完全制御を達成するといひ、 $K_{\rho} \xrightarrow{\text{p.r.}} (C, A, B)$ と書く。以下 $\rho \rightarrow \infty$ で閉ループ系の極が ρ の条件を満足する場合のみを考える。

[A] $A+BK_{\rho}$ のすべての固有値(状態フィードバック(9)のもとの閉ループ極)は ρ の二つの条件のうちのいずれかを満足する。

$$(i) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \lambda_i(A+BK_{\rho}) = r_i \quad (11)$$

$$(ii) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-1} \lambda_i(A+BK_{\rho}) = r_i \quad (12)$$

ただし r_i は負の実部をもつ複素数である。仮定[A]のもとで関係(10)は等価な周波数領域における条件

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} C(sI - A - BK_{\rho})^{-1} = 0, \quad (a. e. s.) \quad (13)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} C(\rho sI - A - BK_{\rho})^{-1} = 0, \quad (a. e. s.) \quad (14)$$

に置き換えられる⁵⁾。完全制御の存在条件はつぎのように与えられる。

[命題 1]⁵⁾ $K_{\rho} \xrightarrow{\text{p.r.}} (C, A, B)$ を満足する K_{ρ} が存在するための必要十分条件は、システム (C, A, B) が右可逆かつ最小位相系(すべての零点の実部が負)であることである。

完全制御の双対は完全観測(perfect observation)である。完全観測は、 $F_{\rho} \xrightarrow{\text{p.r.}} (B^T, A^T, C^T)$ を満足するオブザーバゲインの族 F_{ρ} によって定義される。すなわち恒等オブザーバ

$$\dot{z} = (A + F_{\rho} C)z - F_{\rho} y + Bu \quad (15)$$

は、(10)式に対応した関係

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \|e^{(A+F_{\rho}C)t} B\|^2 dt = 0 \quad (16)$$

を満足する。[A]と同様の仮定のもとで(16)式は周波数領域における条件

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (sI - A - F_{\rho} C)^{-1} B = 0 \quad (17)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho sI - A - F_{\rho} C)^{-1} B = 0 \quad (18)$$

と等価である。完全観測を $F_{\rho} \xrightarrow{\text{p.o.}} (C, A, B)$ と書く。完全観測の存在は命題 1 で右可逆を左可逆に置き換えたものである。

3. 完全制御のアルゴリズム

完全制御 K_{ρ} を構成するアルゴリズムは [5] で述べられているが、ここでは伝達関数行列の右既約分解を用いた周波数領域におけるより簡単なアルゴリズムを示す。以下簡単のため $m=r$ (出力数=入力数) と仮定する。一般の $m < r$ の場合への拡張は容易である。

伝達関数行列の右既約分解を

$$C(sI - A)^{-1} B = N(s)D(s)^{-1} \quad (19)$$

と置く。 $(sI - A)^{-1} B D(s)$ は多項式行列であるから

$$(sI - A)P(s) = B D(s) \quad (20)$$

を満足する多項式行列 $P(s)$ が存在する。この $P(s)$ と $G(s)D(s)^{-1}$ が厳密にプロパーとなる任意の多項式行列 $G(s)$ に対して $KP(s) = G(s)$ を満足する定数行列 K が存在することがよく知られている⁶⁾。

以上の準備のもとで完全制御 K_{ρ} を構成するアルゴリズムはつぎようになる。

(Step 1) つぎの関係を満足する多項式行列 $U(s)$

と正則行列 L を求める。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U(s)N(s)D(s)^{-1} = L \quad (21)$$

$$\det U(s) = s^k, \quad k: \text{整数} \quad (22)$$

$U(s)$, L を求める一つの方法は Wolovich と Falb⁷⁾ によって示されている。

(Step 2) 次式を満足する K_p を求める。

$$K_p P(s) = D(s) - L^{-1} U(s + \rho) N(s) \quad (23)$$

このような K_p の存在は $(D(s) - L^{-1} U(s + \rho) N(s)) D(s)^{-1}$ が厳密にプロパーであることと、すでに述べた $P(s)$ の性質から明らかである。(23)式の K_p が求めるものである。すなわちつぎの結果が成り立つ。

【命題 2】 命題 1 の条件が成り立つとき、(23)式を満足する K_p は、 $K_p \xrightarrow{p.f.} (C, A, B)$ を満たす。

(証明) まず仮定 [A] が満足されていることを示そう。(23)式より

$$(sI - A - BK_p)P(s) = BL^{-1}U(s + \rho)N(s) \quad (24)$$

が成り立つ。 $P(s)$ はすべての s に関してフルランクであるから⁶⁾, $\det(sI - A - BK_p)$ は $\det U(s + \rho) \cdot \det N(s)$ で割りきれられる。一方(21)式より $\det U(s + \rho) \cdot \det N(s)$ の次数は n に等しい。これより(22)式から $A + BK_p$ の固有値の集合は

$$\Lambda = \underbrace{\{-\rho, -\rho, \dots, -\rho\}}_k, s_1, s_2, \dots, s_{n-k}$$

となる。ただし s_i は $\det N(s) = 0$ の根で、システム(1)の零点である。システム(1)は仮定より最小位相系であるから、 $\operatorname{Re}[s_i] < 0, i = 1, \dots, n - k$ である。したがって $\lambda_i(A + BK_p) = s_i$ は(11)式を満足する。ほかの固有値は $\lambda_i(A + BK_p) = -\rho$ であるから明らかに(12)式を満足する。すなわち仮定 [A] が成り立つ。(13)式と(14)式が成り立つことを示せば命題は証明されたことになる。

(21)式より

$$U(s)^{-1} = N(s)D(s)^{-1}(L + Q(s))^{-1}, \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s) = 0$$

と書けるから、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} N(s)D(s)^{-1} = 0$$

を用いると

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U(s)^{-1} = 0$$

を得る。これは

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(s + \rho)^{-1} = 0$$

を意味するから、(23)式と $CP(s) = N(s)$ より

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(s + \rho)^{-1} L K_p P(s) = -CP(s)$$

これより

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(s + \rho)^{-1} L K_p = -C \quad (a.e.s)$$

を得る。これから

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-1} U(\rho s + \rho)^{-1} L K_p = 0 \quad (a.e.s)$$

となる。これらの関係と(24)式より

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} C(sI - A - BK_p)^{-1} BK_p = -C \quad (a.e.s) \quad (25)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-1} C(\rho s I - A - BK_p)^{-1} BK_p = 0 \quad (a.e.s)$$

(26)

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow \infty} C(sI - A - BK_p)^{-1} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} C(I + (sI - A - BK_p)^{-1} BK_p)(sI - A)^{-1} \\ &= 0 \quad (a.e.s) \end{aligned}$$

を得る。すなわち(13)式が示された。(14)式も(26)式を用いれば容易に示される。□

(24)式より

$$C(sI - A - BK_p)^{-1} B = U(s + \rho)^{-1} L \quad (27)$$

となる。この関係は閉ループ伝達特性が $N(s)$ を含まないこと、すなわちすべての有限零点が閉ループ極と相殺されたことを示している。このことは完全制御の一つの大きな特徴である。

4. 還送差行列

Fig. 1 の閉ループ系を考える。 $T_a(s)$ を Fig. 1 の a 点の周りの還送差行列とすると

$$T_a(s) = I - (I - H(s)K(s))^{-1} H(s)G(s) \quad (28)$$

となる。一方 $T_b(s)$ を b 点の周りの還送差行列とすると

$$T_b(s) = I - H(s)(G(s) + K(s)) \quad (29)$$

である。したがって

$$T_b(s)T_a(s)^{-1} = I - H(s)K(s)$$

となるが、右辺は Fig. 1 から明らかなようにマイナーループの還送差行列である。これは主ループをたとえ a 点で切断した閉ループ系の b 点の周りの還送差行列とみなすことができる。したがってこれを $T_{ba}(s)$ と書くと(29)式より

$$T_a(s) = T_{ba}(s)^{-1} T_b(s) \quad (30)$$

となる。Fig. 2 は Fig. 1 の双対ブロック線図である。点 a, b はそれぞれ点 c, d に対応している。(30)式に対応する関係は

$$T_a(s) = T_a(s)T_{aa}(s)^{-1} \quad (31)$$

Fig. 1 Block diagram of a closed-loop system

Fig. 2 The dual block diagram of Fig. 1

御対象の入力側(出力側)における選送差行列 $T_e(s; \rho)$ ($T_e(s; \rho)$) は(37)式 ((38)式) を満足する。ただし $F_p \xrightarrow{p.o.} (C, A, B)(K_p \xrightarrow{p.r.} (C, A, B))$ である。

上の結果で示されたロバスト性回復の手順は、Kwakernaak や Doyle らの方法と異なり、 F_p や K_p の選び方に最適性をまったく仮定せず、自由度が非常に大きい。

6. 数 値 例

前章の結果を数値例によって示そう。つぎのように与えられるシステムを考える。

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.0025 & 0.24 & -0.5333 \\ -0.28 & 0.44 & -0.26 & -1.0 \\ 0 & 0.09 & -1.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 6.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.014 & -0.012 \\ 0.072 & -1.72 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.55 \end{bmatrix}$$

これは文献 8) の例にスケール変換を行ったものである。このシステムは $s_1 = -0.018$ に一つの零点をもつ。したがって最小位相系である。

まず閉ループ系 $\Sigma(K_{opt}, F_p)$ の漸近的性質を示す。ただし K_{opt} は $Q=R=I$ に対する最適レギュレータのゲインで、 F_p は 3 章のアルゴリズムに従って計算された $F_p \xrightarrow{p.o.} (C, A, B)$ を満足するオブザーバゲインである。Table 1 にこれらのゲインの数値を示す。Fig. 4 は $T_e(j\omega, \rho)$ の二つの特異値 $\bar{\sigma}(T_e)$ と $\underline{\sigma}(T_e)$ を各 ω に対してプロットしたものである。 $\bar{\sigma}(T_e)$ も $\underline{\sigma}(T_e)$ も共に ρ が増すと共に最適選送差行列 $T_{opt}(j\omega)$ の対応する特異値に漸近することがわかる。すなわち(37)式が数値的に示されている。

Table 1 Values of gain matrices of $\Sigma(K_{opt}, F_p)$

ρ	F_p^T				
2	-0.0020	-0.4	0.	0.	
	0.0295	0.	-0.1395	-0.4190	
5	-0.0063	-1.	0.	0.	
	-0.0305	0.	-0.8926	-1.0471	
20	-0.0279	-4.	0.	0.	
	-0.6934	0.	-13.9581	-4.1885	
50	-0.0709	-10.	0.	0.	
	-3.8342	0.	-87.2565	-10.4712	
100	-0.1427	-20.	0.	0.	
	-14.4468	0.	-349.0262	-20.9424	
K_{opt}	0.03337	-0.236	-14.64	-10.15	
	-0.1711	5.258	-0.2927	-0.5411	

閉ループ系 $\Sigma(K_p, F_{opt})$ に対する $T_e(j\omega; \rho)$ に対して同様の漸近的な特異値のふるまいを示したのは Fig. 5 である。(38)式が数値的に示されていることがわかる。

7. む す び

完全制御とその双対である完全観測に基づく最適出力フィードバック系に対する新しいロバスト性回復の手法を提案した。この方法は cheap control の原理に基づいて今まで提案されてきた手法よりも一般的で、多くの自由度を含むと共に、直感的な意味づけも容易で計算も簡単である。また制御対象の入力側にお

Fig. 4 σ -plots of a closed-loop system $\Sigma(K_{opt}, F_p)$

Fig. 5 σ -plots of a closed-loop system $\Sigma(K_p, F_{opt})$

けるロバスト性と出力側におけるロバスト性を統一的に論じることができる。この手法では、新しく得られた出力フィードバック系の選送差行列に対する表現が重要な役割を果たすが、これらの表現は最適出力フィードバック系の基本的な閉ループ構造を明らかにしている。数値例を用いてロバスト性回復の具体的なようすを示した。実際の制御系では操作量に飽和があり、本稿で述べた手法をそのままの形で実現することは不可能であるが、一つの定性論として高ゲインフィードバック系の基本的な性質を示すものであり、またダイナミックレンジの大きな駆動系をもつシステムに対しては、近似的に成立することが期待できる。操作量飽和に対してどの程度の性能劣化をもたらすかを検討することは重要であり、今後の課題である。

最後に本研究をまとめるに際して、御指導を賜った大阪大学 坂和愛幸教授に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) M. G. Safonov and M. Athans: Gain and Phase Margin of Multiloop LQG Regulators, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22-1**, 173/179 (1977)
 - 2) H. Kwakernaak and R. Sivan: Linear Optimal Control Systems, Wiley, New York (1972)
 - 3) J. G. Doyle and G. Stein, Robustness with Observers IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-24-5**, 607/611 (1979)
 - 4) H. Kwakernaak: Optimal Low-Sensitivity Linear Feedback Systems, Automatica, Vol. 5 (1969)
 - 5) H. Kimura: A New Approach to the Perfect Regulation and the Bounded Peaking in Linear Multivariable Control Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26-1**, 253/270 (1981)
 - 6) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer (1974)
 - 7) W. A. Wolovich and P. L. Falb: Invariants and Canonical Forms under Dynamic Compensation, SIAM J. on Control Opt., **14-6**, 996/1008 (1976)
 - 8) J. C. Doyle and G. Stein: Multivariable Feedback Design; Concepts for Classical/Modern Synthesis. IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-26-1**, 4/16 (1981)
- 1) M. G. Safonov and M. Athans: Gain and Phase