確率近似法を用いた分布定数系の空間変動 パラメータの逐次同定[†]

平 澤 俊 一*・魚 崎 勝 司*

Recursive Identification of Space-Dependent Parameters in Distributed Parameter Systems Using Stochastic Approximation

Toshikazu HIRASAWA* and Katsuji UOSAKI*

A recursive algorithm of stochastic approximation type is derived for the identification of the space-dependent parameters in a class of distributed parameter systems driven by random inputs. The algorithm uses noisy observations taken over at a finite number of equi-distant observation points located in a spatial domain through a linear observation system. The convergence of the estimates to the true parameters with probability one is proved using Ljung's theorem. Simulation studies exemplify good convergence property of the algorithm. The proposed algorithm is much more simple in structure, easier to implement, and less restrictive on system structure to apply the algorithm, compared to the algorithm of Kubrusly and Curtain, derived for the same situations.

Keyword: identification, recursive estimation, stochastic approximation, distributed parameter system, space-dependent parameter

1. 緒 言

数学モデルが偏微分方程式で記述される、分布定数系の同定については種々の接近がなされてきており、一階ないし二階の線形分布定数系の定数パラメータの場合には、ほぼ満足できる手法が与えられている^{1)~3)}。分布定数系のパラメータ同定においては、まず本来無限次元空間での問題を数値計算が可能となるように有限次元空間での問題に帰着させねばならず、そのために有限差分法がよく用いられるが、この結果、問題は極めて大次元になるのが常である。このような場合、

逐次同定アルゴリズムの開発は、用いる計算機の記憶容量、計算速度の点から必須のものであると考えられる。この種の接近法の一つに、確率近似法による同定法があげられ、Zhivoglyadov, Kaipov らによる研究⁴⁾、Kubrusly, Curtain による研究⁵⁾ などがある。これらは共に、二階放物形偏微分方程式で記述される分布定数系を対象としており、前者は、定係数パラメータの場合、後者は空間変動パラメータの場合を取り扱っている。後者の立場は実際の面から興味あるものと考えられるが、手法自体は、2段階に分れてやや複雑であり、かつシステム近似の段階で導入された仮定から、一般の放物形分布定数系の場合には、必ずしも一致推定値を与えないことがわかる。そこで、本論文では、空間変動パラメータの同定に対し、より簡単でかつ、一般の放物形分布定数系に対しても適用可能なアルゴリズムを導出して、その収束性を吟味する。

2. 問題の記述と Kubrusly-Curtain 法の概要

システムの状態 $u(x, t)$ は、つぎの二階放物形偏微分方程式に従うものとする。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha_0(x)u(x, t) + \alpha_1(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_2(x)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \beta(x)w(x, t) \quad (1)$$

初期条件: $u(x, 0) = f(x)$, $x \in (0, l)$

境界条件: $u(0, t) = u(l, t) = 0$ $t > 0$

ここに $\{w(x, t)\}$ は 2 次確率過程(注 1)、空間変動パラメータ、 $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta(x)$ は $(0, l)$ で有界とし、 $\alpha_2(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ を仮定する。さらに初期値 $f(x)$ は $(0, l)$ で有界連続とする。

さてここで状態変数 $u(x, t)$ は直接観測することは

(注 1) 2 次モーメントが有界な確率過程⁶⁾

[†] 第 22 回自動制御連合講演会で発表 (昭 54・10)

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘 2-1

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita (Received January 4, 1982)

(Revised June 7, 1982)

できず、(0, l) の範囲内で等間隔に配置された K 個の観測点で、観測雑音の付加される線形観測器を通してのみ得られる場合を考える。すなわち

$$z(x_k, t) = cu(x_k, t) + dv(x_k, t) \quad (2)$$

ここに $\{v(x_k, t)\}$ は 2 次確率過程 (注 1), $c(\neq 0)$, d は定数である。

このとき問題は『雑音に汚された観測値 $\{z(x_k, t)\}$ に基づいて、空間変動パラメータ $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ を推定せよ。ただしパラメータ $\beta(x)$, c は必ずしも既知ではなく、また雑音 $\{w(x, t)\}$, $\{v(x, t)\}$ に対する制約はできる限り弱いものとせよ』となる。

ここで本来、無限次元システムである分布定数系を有限次元システムに近似する一つの手段として、状態方程式 (1) および観測方程式 (2) を空間的、時間的に離散化 (注 2) して、次式を得る。

$$u(m+1) = Au(m) + Bw(m) \quad (3)$$

初期条件: $u(0) = f$

$$z(m) = cu(m) + dv(m) \quad (4)$$

ここに

$$\begin{aligned} u(m) &= [u(x_1, m\delta_t), u(x_2, m\delta_t), \dots, u(x_k, m\delta_t)]^T \\ w(m) &= [w(x_1, m\delta_t), w(x_2, m\delta_t), \dots, w(x_k, m\delta_t)]^T \\ z(m) &= [z(x_1, m\delta_t), z(x_2, m\delta_t), \dots, z(x_k, m\delta_t)]^T \\ v(m) &= [v(x_1, m\delta_t), v(x_2, m\delta_t), \dots, v(x_k, m\delta_t)]^T \\ f &= [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)]^T, \end{aligned} \quad (5)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_2(x_1) & a_3(x_1) & & & 0 \\ a_1(x_2) & a_2(x_2) & a_3(x_2) & & \\ & a_1(x_3) & a_2(x_3) & a_3(x_3) & \\ & & a_1(x_{k-1}) & a_2(x_{k-1}) & a_3(x_{k-1}) \\ 0 & & & a_1(x_k) & a_2(x_k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Q(x_k, m+1) = \frac{1}{1-\mu(m)} \left[Q(x_k, m) - \frac{\mu(m)Q(x_k, m)z(x_k, N+m)z^T(x_k, N+m)Q(x_k, m)}{1-\mu(m)+\mu(m)z^T(x_k, N+m)Q(x_k, m)z(x_k, N+m)} \right] \quad (10)$$

$$\hat{a}(x_k, m) = [\hat{a}_1(x_k, m), \hat{a}_2(x_k, m), \hat{a}_3(x_k, m)]^T \quad (11)$$

$$z(x_k, m) = [z(x_{k-1}, m\delta_t), z(x_k, m\delta_t), z(x_{k+1}, m\delta_t)]^T$$

$$\varepsilon(x_k) = d^2[s(x_k)\sigma_v(0) - \sigma_v(1)][1, 1, 1]^T \quad (12)$$

$$s(x_k) = 1 + \delta_t \alpha_0(x_k) = a_1(x_k) + a_2(x_k) + a_3(x_k) \\ k = 2, 3, \dots, K-1$$

$$s(x_1) = 1 - \frac{\delta_t}{\delta_x^2} \alpha_2(x_1) + \delta_t \alpha_0(x_1) = a_2(x_1) + a_3(x_1) \quad (13)$$

(注 2) 空間的離散化はすべての観測点に一致する差分点について行うものとする。

$$B = \begin{bmatrix} b(x_1) & & 0 \\ & b(x_2) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & b(x_k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$a_1(x_k) = \frac{\delta_t}{\delta_x^2} \alpha_2(x_k),$$

$$a_2(x_k) = 1 - \frac{2\delta_t}{\delta_x^2} \alpha_2(x_k) - \frac{\delta_t}{\delta_x} \alpha_1(x_k) + \delta_t \alpha_0(x_k), \quad (8)$$

$$a_3(x_k) = \frac{\delta_t}{\delta_x^2} \alpha_2(x_k) + \frac{\delta_t}{\delta_x} \alpha_1(x_k),$$

$$b(x_k) = \delta_t \beta(x_k),$$

$$x_k = k\delta_x = \frac{kl}{K+1}, \quad (k=1, 2, \dots, K)$$

であり、時間サンプリング刻み δ_t は行列 A が安定なるように選ばれる⁶⁾。またこの場合、境界条件はつぎのように変換される。

$$u(0, m\delta_t) = u(l, m\delta_t) = 0, \quad m=1, 2, \dots$$

このとき、問題は『観測値 $\{z(m)\}$ に基づいて、行列 A の成分 $\{a_i(x_k); i=1, 2, 3; k=1, 2, \dots, K\}$ の推定値 $\{\hat{a}_i(x_k, m)\}$ を求めよ』と変換される。ただし分布定数系の近似に伴ない (8) 式から後述の (13) 式の制約を満たす必要がある。

この問題に対して、Kubrusly と Curtain⁶⁾ は確率近似法に基づく以下の推定法を提案した。

$$\begin{aligned} \hat{a}(x_k, m+1) &= \frac{1-\lambda(m)}{1-\mu(m)} [I - \mu(m)Q(x_k, m+1)z(x_k, N+m) \\ &\quad \times z^T(x_k, N+m)] \hat{a}(x_k, m) \\ &\quad + \lambda(m)Q(x_k, m+1)[z(x_k, (N+m+1)\delta_t) \\ &\quad \times z(x_k, N+m) + \varepsilon(x_k)] \end{aligned} \quad (9)$$

ここに

$$\begin{aligned} s(x_k) &= 1 - \frac{\delta_t}{\delta_x^2} \alpha_2(x_k) - \frac{\delta_t}{\delta_x} \alpha_1(x_k) + \delta_t \alpha_0(x_k) \\ &= a_1(x_k) + a_2(x_k) \end{aligned}$$

かつ N は $\{z(x_k, N+m)\}$ が定常時系列で近似できるように十分大きくとった定数である。

さらに彼らはこのように定義した推定法によって得られる推定値 $\{\hat{a}(x_k, m)\}$ が、ゲイン系列 $\{\lambda(m)\}$ と $\{\mu(m)\}$, および雑音に対するある緩い条件のもとで、 $m \rightarrow \infty$ とするとき真値 $a(x_k)$ に確率 1 で収束することを示した。

しかしこの推定法は $\alpha_0(x_k) = 0$ の場合を除いては、 $\varepsilon(x_k)$ を通じて未知パラメータ $\{a_i(x_k)\}$ を必要とするため、現実には用いることができない。Kubrusly

らはこのため、サンプリング刻み δ_i を、 $\varepsilon(x_k)$ が 1 と近似できるよう小さくすることをすすめているが、 $\alpha_0(x_k)$, $\alpha_1(x_k)$, $\alpha_2(x_k)$ の値によってはどうしても推定値に偏りが残ることは避け得ない。また $\varepsilon(x_k)$ に含まれる未知パラメータ $\{a_i(x_k)\}$ の代りにその推定値 $\{\hat{a}_i(x_k, m)\}$ を用いることも考えられるが、その際には確率 1 での収束に関する証明は不完全なものとなってしまう。さらに Kubrusly らの推定法は、 $\{\hat{a}_i(x_k, m)\}$ と $\{Q(x_k, m)\}$ の 2 段階逐次推定法となっており、複雑でもある。

次章では、 $\alpha_0(x) \neq 0$ の場合にも近似なしに適用できる、より簡単で、かつ同様の収束性をもつ逐次推定法を導出する。

3. 簡単化した推定法

まず、未知パラメータ $\{a_i(x_k)\}$ と観測値の分散との関係を与えるつぎの補題を証明する。

〔補題〕

$$\begin{aligned} p(x_k, m) &= E[z(x_k, (N+m+1)\delta_i)z(x_k, N+m)], \\ Q(x_k, m) &= E[z(x_k, N+m)z^T(x_k, N+m)] \quad (14) \\ e &= d^2 C_v(1)[0, 1, 0]^T \\ D &= d^2 C_v(0) \end{aligned}$$

と定義する。なお行列 $C_v(1)$ は以下で定義される。このときつぎの仮定を置く。

$$N1. E[w(m)] = 0$$

$$N2. Cov[w(m), w(n)] = C_w \delta_{mn}$$

ただし C_w は正値対称行列、

$$N3. E[v(x_k, m)] = 0$$

ただし

$$\begin{aligned} v(x_k, m) &= [v(x_{k-1}, m\delta_i), v(x_k, m\delta_i), \\ &\quad v(x_{k+1}, m\delta_i)]^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$N4. Cov[v(x_i, m), v(x_k, n)] = C_v(|m-n|, j, k)$$

$$C_v(|m-n|, k, k) = C_v(|m-n|)$$

ただし $C_v(i, j, k)$, $C_v(i)$ はそれぞれ i, j, k へのみ依存する正値対称行列で、 $C_v(i)$ は既知とする。

$$N5. Cov[w(m), v(n)] = 0$$

$$N6. E[\|w(m)\|^p] < \infty$$

$$E[\|v(m)\|^p] < \infty \quad 1 \leq p \leq 4$$

なお N は $\{u(x_k, (N+m)\delta_i)\}$ が十分定常時系列と見做し得るよう大きくとられる定数であることは前と同様である。

このとき、以下の関係が成立する。

$$p(x_k, m) = [Q(x_k, m) - D]a(x_k) + e \quad (16)$$

(証明)

(3), (4)式から

$$z(x_k, (N+m+1)\delta_i)$$

$$\begin{aligned} &= [z^T(x_k, N+m) - d v^T(x_k, N+m)]a(x_k) \\ &\quad + d v(x_k, (N+m+1)\delta_i) \\ &\quad + c b(x_k) w(x_k, (N+m)\delta_i) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} &E[z(x_k, (N+m+1)\delta_i)z(x_k, N+m)] \\ &= [E[z(x_k, N+m)z^T(x_k, N+m)] \\ &\quad - d E[z(x_k, N+m)v^T(x_k, N+m)]]a(x_k) \\ &\quad + d E[z(x_k, N+m)v(x_k, (N+m+1)\delta_i)] \\ &\quad + c b(x_k) E[z(x_k, N+m)w(x_k, (N+m)\delta_i)] \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} E[z(x_k, N+m)v^T(x_k, N+m)] &= d C_v(0) \\ E[z(x_k, N+m)v(x_k, (N+m+1)\delta_i)] \\ &= d C_v(1)[0, 1, 0]^T \\ E[z(x_k, N+m)w(x_k, (N+m)\delta_i)] &= 0 \end{aligned}$$

の関係をを用いると、(16)式が直ちに導びかれる。◀

(注意)

仮定 N1~N4 を満たす雑音は、正規性雑音のみならず、指数分布、ガンマ分布などに従う極めて範囲の広いものである。また Kubrusly らの推定法では、観測雑音の統計的性質として、同一時刻にはどの観測点にも同一の観測雑音が付加されることに対応する

$$C_v(|m-n|) = \sigma_v(|m-n|) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が仮定されていたが、仮定 N4 では観測点ごとに観測雑音が異なってもよく、さらに空間的相関もおりこむことが可能となっている。◀

(16)式の成立することを考慮して、つぎの簡単な構造をもつ確率近似形の逐次推定法をとりあげる。

$$\begin{aligned} \hat{a}(x_k, m+1) &= \hat{a}(x_k, m) \\ &\quad + \gamma(m)[z(x_k, N+m)z(x_k, (N+m+1)\delta_i) - e \\ &\quad - \{z(x_k, N+m)z^T(x_k, N+m) \\ &\quad - D\} \hat{a}(x_k, m)] \end{aligned} \quad (17)$$

この推定法の収束性については、以下の定理の成立することが示される。

《定理》

〔補題〕に現れる仮定 N1~N6 に加えて

$$A1. E[\|\hat{a}(x_k, 1)\|] < \infty$$

$$G1. \{\gamma(m)\} \text{ は単調減少実数列}$$

$$G2. \sum_{m=1}^{\infty} \gamma(m) = \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \{\gamma(m)\}^2 < \infty$$

$$G3. \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\gamma(m)} - \frac{1}{\gamma(m+1)} \right| < \infty$$

が成立するとき、(17)式で定義された推定値は真値に確率 1 で収束する、すなわち

$$P \{ \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_k, m) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \} = 1 \quad (18)$$

(証明)

定理の条件および逐次推定法(17)式の構造は Ljung による逐次推定法の常微分方程式による解析に関する定理⁷⁾の要件を満たしていることが容易に確かめられる。したがって逐次推定値(17)式の漸近的挙動が $\mathbf{z}$ の常微分方程式の解軌跡に対応することが示される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{a}(\mathbf{x}_k, t)) &= \lim_{m \rightarrow \infty} E[\mathbf{z}(\mathbf{x}_k, N+m) \mathbf{z}(\mathbf{x}_k, N+m+1) \delta_t] \\ &\quad - \mathbf{e} - \{\mathbf{z}(\mathbf{x}_k, N+m) \mathbf{z}^T(\mathbf{x}_k, N+m) \\ &\quad - D\} \mathbf{a}(\mathbf{x}_k, t) \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(\mathbf{x}_k, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{e} - [Q(\mathbf{x}_k) - D] \mathbf{a}(\mathbf{x}_k, t) \quad (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{p}(\mathbf{x}_k, N+m) \\ Q(\mathbf{x}_k) &= \lim_{m \rightarrow \infty} Q(\mathbf{x}_k, N+m) \end{aligned} \quad (20)$$

さらに Ljung の解析によれば、もし常微分方程式(19)が定常点 $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}_k)$ をもち、かつそれが漸近安定であるならば、推定値(17)式は常微分方程式の定常解に確率 1 で収束することが示されているが、(19)の常微分方程式の定常点は

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}_k) = [Q(\mathbf{x}_k) - D]^{-1} [\mathbf{p}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{e}] \quad (21)$$

であり、さらにこの点は

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_k) - D &= \lim_{m \rightarrow \infty} c^2 E[\mathbf{u}(\mathbf{x}_k, (N+m)\delta_t) \\ &\quad \times \mathbf{u}^T(\mathbf{x}_k, (N+m)\delta_t)] \end{aligned} \quad (22)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, m\delta_t) &= [\mathbf{u}(\mathbf{x}_{k-1}, m\delta_t), \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, m\delta_t), \mathbf{u}(\mathbf{x}_{k+1}, m\delta_t)]^T \\ &\quad (23) \end{aligned}$$

が正値対称行列であることより、安定解であることもわかる。

したがって補題の結果を(21)式に用いることにより、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_k, m) = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_k) \quad \text{w. p. 1}$$

ところで、補題より(16)式の関係がすべての時刻 m について成立することから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{p}(\mathbf{x}_k, m) = [\lim_{m \rightarrow \infty} Q(\mathbf{x}_k, m) - D] \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}$$

すなわち

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_k) = [Q(\mathbf{x}_k) - D]^{-1} (\mathbf{p}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{e}) = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_k)$$

が成立する。ゆえに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_k, m) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) \quad \text{w. p. 1}$$

Fig. 1 Performances of the estimates for $\mathbf{a}_i(0.5)$
solid line: proposed algorithm
broken line: Kubrusly and Curtian's algorithm

が導びける。

ここで提案した推定法は、Kubrusly らの推定法に比べて、構造的に極めて簡単なものであり、したがって計算量、記憶容量が少なくなる利点があり、しかも確率 1 で真値への収束も保証されている。しかし、もし収束速度が低下したならば、構造を単純化して計算量、記憶容量を減少させた利点が生かされないことになる。そこで、推定法を実際に応用するにあたっては、収束速度の吟味が重要になってくる。収束速度の解析的検討は一般に極めて難しく、したがって数値シミュレーションに頼らざるを得ないが、以下では、提案した簡単な推定法の収束速度の吟味のために行った数値シミュレーションの結果を示す。

[例 1]

対象とする数学モデルは

Fig. 2 Performance of normalized squared error
solid line: proposed algorithm
broken line: Kubrusly and Curtin's algorithm

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -u(x, t) - x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{2x^2}{9} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 10 \sin(\pi x) w(t)$$

初期条件: $u(x, 0) = 0 \quad x \in (0, 1)$

境界条件: $u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0$

であり、観測値は5個の点、 $x_k = k/6$ ($k=1, 2, \dots, 5$)
で、観測方程式

$$z(x_k, t) = u(x_k, t) + v(x_k, t)$$

に従って得られるものとする。

外乱 $\{w(t)\}$ と観測雑音 $\{v(x_k, t)\}$ は正規分布し、

期待値は各おのおの0、共分散行列は

$$C_w = \text{diag}(1)$$

$$C_v(0) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_v(1) = 0$$

と与えた。また時間サンプリング間隔は $\delta_t = 0.01$ とし、 $N=100$ と選んだ。

Fig. 1 に推定値 $\{\hat{a}_i(0.5, m)\}$ の挙動を与えている。比較のために、真値 $a(0.5) = [0.2, 0.8, -0.1]^T$ を点線で、Kubrusly らの推定法による推定値の挙動を破線で同じ図上に示した。**Fig. 2** には規格化した2乗誤差 $\|a(0.5, m) - a(0.5)\|^2 / \|a(0.5, 0) - a(0.5)\|^2$ を示している。**Fig. 1, Fig. 2** から、ここで提案した簡単な構造をもつ推定法による推定値の真値への収束速度は Kubrusly らのそれとほぼ同等であり、また $\alpha_0(x) = 0$ でないため Kubrusly らの方法では300段以降で収束が

飽和しているのに比し、提案した方法ではそのような現象は生じていないことがわかる。一方、提案した推定法の計算に要する時間は、大阪大学大型計算機センターの ACOS 900 によれば、1000 段当たり 0.37 秒で、これは Kubrusly らの推定法によるよりも約30% 少なく、計算時間の点でも秀れている。なお **Fig. 3** には $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ の推定値を示している。ここで観測点以外の点での推定値は、観測点での推定値から3次スプライン補間して得たものである。1000 段での結果は、ここで提案した推定法が十分実用的で

Fig. 3 Estimated parameters $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$ and $\alpha_2(x)$

Fig. 4 Effect of the number of spatial measurements on the estimated value of $\alpha_2(x)$

あることを示している。

[例 2]

ここで提案した手法は、分布定数系を等間隔に配置した観測点に一致する差分点で空間的に差分近似した差分方程式に基づいている。そこで空間差分幅、すなわち観測点の個数が同定精度に与える影響を確かめるために、熱伝導方程式モデル

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_2(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + w(t)$$

初期条件: $u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1)$

境界条件: $u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0$

ただし

$$\alpha_2(x) = 1 + x,$$

について $\alpha_2(x)$ の推定値に対する観測点の個数 K の

影響を調べた。ここで観測方程式は

$$z(x_k, t) = u(x_k, t) + v(x_k, t) \quad k = 1, 2, \dots, K$$

とし、外乱、観測雑音はおのの期待値 0, 共分散行列が

$$C_w = \text{diag} (1)$$

$$C_v(0) = \text{diag} (1/4), \quad C_v(1) = 0$$

の正規性雑音とした。観測点の個数 K を 4, 9, 24 と変化させ、それぞれに対し、時間サンプリング間隔を $\delta_t = 0.02, 0.004, 0.0008$ と選び、推定を行った。 $\alpha_2(x)$ の推定結果は Fig. 4 に示される。ここで観測点以外の点での推定値はスプライン補間によって求められている。推定段数が多くなるにつれ、観測点の個数の影響は減少していることがわかる。

これから、 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ の滑らかさにも依存するが、観測点の個数は、 $l=1$ の場合、10 程度でも十分であると考えられる。

なおこの例は Kubrusly らの手法は適用できない観測雑音の場合である。

なおほかの例に対しても、同様の結論が得られている。

4. 結 言

本論文では、確率的入力をもつ二階放物形偏微分方程式で記述される分布定数系の空間依存パラメータの同定のための確率近似法に基づく一つの新しい逐次推定法を提案した。この手法は、同一の対象に対して従来提案されていた Kubrusly-Curtain の手法を改良して、構造的に簡単で、また対象とするシステム構造ならびに観測雑音の統計的性質に対する

制限を緩和したもので、この手法により、確率 1 で真値に収束する推定値の得られることを理論的に示した。またシミュレーションによって、Kubrusly らの手法とほぼ同等の収束性を確認し、計算量が軽減されることを示した。

本論文では、観測雑音の統計的性質を既知としたが、現実には未知とすべき場合も多い。このような場合、あらかじめ観測系の特性を推定、較正するか、観測雑音の統計的性質を未知とした推定法を開発する必要があるが、これは今後の重要な課題である。さらに適切な観測点の個数を、同定精度、推定コストの観点から理論的に考察することが必要と思われる。

終りに日頃御指導いただく杉山 博教授に深謝する。

参 考 文 献

- 1) C.S. Kubrusly: Distributed Parameter System Identification-A Survey, Int. J. of Control, **26**-4 509/535 (1977)
- 2) M.P. Polis and R.E. Goodson: Parameter Identification in Distributed Systems-A Synthesizing Overview, Proc. IEEE, **64**, 45/61 (1976)
- 3) 相良, 中野: 分布定数システムの同定へのアプローチ, 計測と制御, **19**-11 1035/1043 (1980)
- 4) V.P. Zhivoglyadov and V.K. Kaipov: Application of the Method of Stochastic Approximations in the Problem of Identification, Automation & Remote Control, **27**, 1702/1706 (1966)
- 5) C.S. Kubrusly and R.F. Curtain: Identification of Noisy Distributed Parameter Systems Using Stochastic Approximation, Int. J. of Control, **25**-3 441/455 (1977)
- 6) G.E. Forsythe and W.R. Wasow: Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, 92, John Wiley & Sons, Inc. (1960)
- 7) L. Ljung: Analysis of Recursive Stochastic Algorithms, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-22**-4, 551/575 (1977)
- 8) P.G. Hoel, S.C. Port and C.J. Stone: Introduction to Stochastic Processes, 111, Houghton Mifflin (1972)