重力勾配計による重力加速度の実時間推定

黒 崎 正 大*

Real-Time Gravity Filtering from On-Board Gradiometers

Masahiro KUROSAKI*

An airplane carries gradiometers which measure all components of the gravity-gradient tensor. The airplane is flying at constant speed and altitude in a constant direction, and good estimates are desired of the gravity deflection along and perpendicular to the flight direction. The gravity variations are described by the top three layers of a 5-layer statistical model due to Heller. The estimation is analyzed by two separate methods: (i) a low-order state-space model is constructed to approximate the Heller model and to apply Kalman filter; (ii) Wiener filter theory is used to obtain asymptotic results for high gradiometer accuracy, corroborating the results obtained in (i).

Keyword: Kalman filter, Wiener filter, optimal estimation, gravity disturbance, gravity gradiometer

1. ま え が き

本論文では、重力勾配計 (Gravity Gradiometer) による重力加速度の最適推定問題を取扱う。航空機などで使用される慣性航法システム (Inertial Navigation) では、加速度計で検知した物体の加速度を2回積分して物体の位置を検出するが、加速度計の出力には重力の加速度も含まれるので、積分を実行する前に重力の寄与分を差し引いて物体の真の加速度を求める必要がある。従来の慣性航法システムでは、楕円体モデルに基づき、緯度、経度、高度の関数として重力加速度を計算機内部に記憶させておき、現在位置を入力して、重力加速度を求める方法が用いられている。しかしながらジャイロや加速度計などの技術の急速な進歩により、現在の高精度慣性航法システムでは機器の誤差と比較して、重力モデル誤差の影響を無視できない状況となっている¹⁾。

一方、米国では重力勾配計の研究、開発が進められ

ている。これは、重力加速度の空間微分成分である重力勾配 (Gravity Gradient) を実時間で測定する装置で、平均時間10秒で1σ値が1EU (Eötvös Unit = $10^{-9}\text{ms}^{-2}/\text{m}$) の測定精度を目標としている。3種類の重力勾配計の開発が行われているが、そのうちベルエアロ・スペース社 (Bell Aerospace Co.) の重力勾配計は、0.5 Hz で回転するスピントーブルとスピントーブルの対称位置に搭載された受感軸を接線方向とする4個の加速度計で構成される (Fig. 1 参照)²⁾。

近接した2点P, Qでの重力加速度を $\vec{g}_P, \vec{g}_Q$, また, $\vec{PQ} = \vec{\Delta r}$ と置くと近似的に下式が成立する。

$$\vec{g}_Q = \vec{g}_P + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Delta r} \quad (1)$$

ここで $\vec{\nabla}$ は重力勾配テンソルで

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

と表わされ、スピントーブルをz軸とする重力勾配計の出力は、時間 $t=0$ で、スピントーブルと慣性空間のx軸が一致するとすれば、下式で表わされる。

$$\begin{aligned} \text{出力} &= (A_1 + A_2) - (A_3 + A_4) \\ &= -2\Delta r (\Gamma_{xx} - \Gamma_{yy}) \sin 2\omega t \\ &\quad + 2\Delta r \Gamma_{xy} \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (3)$$

ここで A_1, A_2, A_3, A_4 は Fig. 1 の各加速度計の出力であり、 ω はスピントーブルの回転角速度、 Δr は回転中心から加速度計までの距離である。重力勾配テンソルは、対称性およびラプラスの方程式が成立することから9個の要素のうち5個のみが独立であり、ス

Fig. 1 Heavy proof mass accelerometers gradiometer

* 石川島播磨重工業(株) 東京都西多摩郡瑞穂町殿ヶ谷229

* Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd., Nishitama-gun, Tokyo

(Received June 28, 1982)

ピン軸が互に異なる 3 組の重力勾配計ですべての要素を測定することができる。

本論文では、一定高度を一定速度で一定方向に飛行する物体上に重力勾配計を搭載し、計測された重力勾配から重力加速度を実時間で推定するための最適フィルタについて検討する。

2 章では、重力乱れすなわち重力楕円体モデルからのずれの統計学的モデルとして Heller²⁾の提案したモデルについて検討する。重力勾配計が一定高度、一定方向に一定速度で飛行する場合、Heller のモデルでは、重力乱れポテンシャル、重力乱れ、重力乱れ勾配のパワースペクトル密度は修正ベッセル関数で表わされるが、最小 2 乗法を用いて重力乱れを近似する 6 次の定係数線形モデルを作成する。

3 章では、前章の線形モデルを用いて、定常カルマン・フィルタを求め、重力勾配計の精度と推定誤差の関係を明確にする。

4, 5 章では、3 章と同一の問題をウィナー・フィルタ理論を用いて検討する。定係数線形システムの定常カルマン・フィルタがウィナー・フィルタに一致することはよく知られているが、重力勾配計の精度が高い場合、重力乱れのパワースペクトル密度の低周波近似を行いウィナー・フィルタを解析的に求め、両フィルタの結果が一致することを示す。フィルタの解析形を求めることにより、重力勾配計の精度がよくなるにつれ、フィルタが漸近的に近づくフィルタ構造が明確になり、フィルタ機能の理解が容易となる。

なお、本論文では、カルマン・フィルタを計算機プログラムより求め、ウィナー・フィルタを解析的に求めているので、前者を数値解、後者を解析解と定義する。

2. Heller の重力乱れモデル

重力乱れすなわち楕円体モデルからの重力のずれの統計的モデルとして数多くのモデルが提案されてきたが、いずれも重力乱れポテンシャルが発散したり、あるいは地球表面上でのみ成立し、高々度まで適用できないという不具合があった。Heller は地球内部に複数の“白色ノイズ”ポテンシャル層を仮定し、上記不具合の除去に成功し、さらに地球表面上ならびに人工衛星による重力乱れの観測データからモデルの定数（ポテンシャル層の数、深さ、強さ）を決定し、地球表面上から高々度にわたって適用できる重力乱れモデルを提案した。

地球中心から半径 r の地点での重力乱れのポテンシャルはポアソンの積分公式を用いて

Fig. 2 i th white noise potential layer and coordinates system

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{i=1}^N \frac{R_i(r^2 - R_i^2)}{4\pi}$$

$$\cdot \iint \frac{U w_i}{(r^2 + R_i^2 - 2rR_i \cos \phi)^{3/2}} d\Omega' \quad (4)$$

と表わされる。ここで $U w_i$ および R_i は、 i 番目のポテンシャル層のポテンシャルおよび半径、 ϕ は方向 (θ, ϕ) と (θ', ϕ') のなす角、 $d\Omega'$ は微小立体角要素 $\sin \theta' d\theta' d\phi'$ を表わす (Fig. 2 参照)。

地球半径より十分小さい波長の重力乱れを考える場合には地球を平らと仮定でき、(4) 式は、

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi}$$

$$\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(z + D_i) U w_i(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + D_i)^2]^{3/2}} \cdot dx' dy' \quad (5)$$

となる。ここで z は地表面からの高度、 D_i は i 番目のポテンシャル層の地表面からの深さを表わす。なお (5) 式は、深さ D_i に 2 次元白色ノイズの“質量ダブレット”があると仮定している。

Heller は、5 層の白色ノイズポテンシャル層を提案しているが深さが深い 2 層は波長の短い重力乱れにはほとんど寄与しないためここでは省略する。

Table 1 に白色ノイズポテンシャル層の深さ D_i とスペクトル密度 ϕ_i を示す。

つぎに (5) 式で表わされる重力乱れの性質を調べ

Table 1 Depths and spectral densities for potential variations

i	D_i (Km)	ϕ_i (Km ² /s ²)
1	16.3	7.13×10^{-8}
2	92.5	1.07×10^{-4}
3	390.5	1.16×10^{-3}

る. x, y に関する 2 次元フーリエ変換を行うと (5) 式は

$$U(\omega_x, \omega_y; z) = \sum_{i=1}^N e^{-z_i \omega} U W_i(\omega_x, \omega_y) \quad (6)$$

ここで $z_i = z + D_i$, $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ であり, $U W_i(\omega_x, \omega_y)$ は $U W_i(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換で

$$U W_i(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} U W_i(x, y) dx dy \quad (7)$$

と表わされる. ポテンシャルの空間微分である重力加速度の各成分, g_x, g_y, g_z の 2 次元フーリエ変換は (6) 式に $j\omega_x, j\omega_y, -\omega$ を乗じたものであり, したがって分散は,

$$(\sigma_{g_x^2}, \sigma_{g_y^2}, \sigma_{g_z^2}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} (\omega_x^2, \omega_y^2, \omega^2) \sum_{i=1}^N \phi_i e^{-2z_i \omega} d\omega_x d\omega_y$$

と表わされる. 右辺の積分を実行して, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \sigma_{g_x^2} = \sigma_{g_y^2} = \frac{1}{2} \sigma_{g_z^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-2z_i \omega} \omega^3 d\omega \\ &= \frac{3}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{(2z_i)^4} \end{aligned} \quad (8) \nearrow$$

$$\frac{\phi_i}{\pi(2z_i)^5} \begin{bmatrix} \Omega^3 k_1(\Omega) & 0 & -j\Omega^3 k_1'(\Omega) & 0 & -j\Omega^4 k_1''(\Omega) \\ 0 & \Omega^3 [k_1''(\Omega) - k_1(\Omega)] & 0 & \Omega^4 [k_1'''(\Omega) - k_1(\Omega)] & 0 \\ j\Omega^3 k_1'(\Omega) & 0 & \Omega^3 k_1''(\Omega) & 0 & \Omega^4 k_1'''(\Omega) \\ 0 & \Omega^4 [k_1'''(\Omega) - k_1'(\Omega)] & 0 & \Omega^5 [k_1''''(\Omega) - k_1''(\Omega)] & 0 \\ j\Omega^4 k_1''(\Omega) & 0 & \Omega^4 k_1'''(\Omega) & 0 & \Omega^5 k_1''''(\Omega) \end{bmatrix} \quad (10)$$

を得る. ここで $\Omega = 2z_i \omega_x$ であり, $k_1(\Omega)$ は修正ベッセル関数で下式で定義される.

$$k_1(\Omega) = \int_0^{\infty} e^{-\Omega \cosh u} \cosh u du$$

なお $\Gamma_{xx}, \Gamma_{xy}, \Gamma_{yz}$ は g_x, g_y, g_z をそれぞれ運動方向 (x 方向) に空間微分したものであり, $j\omega_x$ を適当な回数だけ乗じて, 1 次元自己および相互スペクトル密度関数を求めることができる. さらに Γ_{yy} はラプラスの方程式 ($\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz} = 0$) を利用し, Γ_{xx}, Γ_{zz} から得られる.

なお, g_y, Γ_{yz} と g_x, g_z, Γ_{zz} との間に相関がなく, g_y の最適推定は, Γ_{xy}, Γ_{yz} の計測値だけから得られ, g_x と g_z の最適推定は, $\Gamma_{xx}, \Gamma_{xz}, \Gamma_{zz}$ (あるいは Γ_{yy}) の計測値から得られることがわかる.

3. カルマン・フィルタ

重力勾配計が一定高度 ($z = \text{一定}$), 一定方向 (x 方向, $y = \text{一定}$) に一定速度で飛行する場合, Γ_{xx} と

同様に Γ_{yz}, Γ_{zz} などの 2 次元フーリエ変換も, (6) 式に $-j\omega_y \omega, \omega^2$ などに乗じて得られ, $g_x, g_y, g_z, \Gamma_{yz}, \Gamma_{zz}$ の 2 次元スペクトル密度行列は下式で表わされる.

$$\sum_{i=1}^N \phi_i e^{-2z_i \omega} \begin{bmatrix} \omega_x^2 & \omega_x \omega_y & j\omega_x \omega & -\omega_x \omega_y \omega & -j\omega_x \omega^2 \\ \omega_x \omega_y & \omega_y^2 & j\omega_y \omega & -\omega_y^2 \omega & -j\omega_y \omega^2 \\ -j\omega_x \omega & -j\omega_y \omega & \omega^2 & -j\omega_y \omega^2 & -\omega^3 \\ -\omega_x \omega_y \omega & -\omega_y^2 \omega & j\omega_y \omega^2 & \omega_y^2 \omega^2 & j\omega_y \omega^3 \\ -j\omega_x \omega^2 & j\omega_y \omega^2 & -\omega^3 & -j\omega_y \omega^3 & \omega^4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

物体が直線 $y=0$ に沿って水平飛行を行っているとは仮定すると, カルマンフィルタ, ウィナーフィルタを用いて最適推定を行うには, 直線 $y=0$ に沿っての 1 次元スペクトル密度行列が必要となる. これは (9) 式の各要素に以下のオペレーションを行って得られる⁴⁾.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} () dy$$

積分を実行し, i 番目の層による $g_x/2z_i, g_y/2z_i, g_z/2z_i, \Gamma_{yz}, \Gamma_{zz}$ の 1 次元スペクトル密度行列として

Γ_{xx} の計測値から g_x と g_z の最適推定を求めるための定常カルマン・フィルタについて検討する.

重力乱れ g_x , 重力乱れ勾配 Γ_{xx} は重力乱れポテンシャルの x 方向に関する 1 階, 2 階の微係数であり, 重力乱れ勾配 Γ_{xx} は重力乱れ g_x の x 方向に関する 1 階の微係数であることを考慮し, 重力乱れポテンシャル U と重力乱れ g_x の自己, 相互スペクトル密度関数 $\phi_{UU}(\omega_x), \phi_{g_x g_x}(\omega_x)$ および $\phi_{U g_x}(\omega_x)$ を近似する定係数線形システムを考える.

$\phi_{UU}(\omega_x), \phi_{g_x g_x}(\omega_x), \phi_{U g_x}(\omega_x)$ は

$$\begin{aligned} &(\phi_{UU}(\omega_x), \phi_{U g_x}(\omega_x)) \\ &(\phi_{U g_x}(\omega_x), \phi_{g_x g_x}(\omega_x)) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\sum_{i=1}^N \phi_i \omega_x k_1(2z_i \omega_x), -\sum_{i=1}^N \phi_i \omega_x^2 k_1'(2z_i \omega_x) \right) \\ &\quad \left(-\sum_{i=1}^N \phi_i \omega_x^2 k_1'(2z_i \omega_x), \sum_{i=1}^N \phi_i \omega_x^3 k_1''(2z_i \omega_x) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

と表わされる. なお Ω が小さいとき $k_1(\Omega) \sim 1/\Omega$ であ

るから

$$\phi_{uv}(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{2z_i}, \quad \phi_{g_z g_z}(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{4z_i^3} \quad (12)$$

である。

(11) 式のパワースペクトル密度を近似的に与える定係数線形システムを求める。互に独立な白色イズ、 W_1, W_2 で駆動される 2 組の線形システムの伝達関数を $G_1(s), G_2(s)$ 、出力を $\xi_1(s), \xi_4(s)$ とする

$$\begin{cases} \xi_1(s) = G_1(s)W_1(s) \\ \xi_4(s) = G_2(s)W_2(s) \end{cases} \quad (13)$$

U と g_z が ξ_1, ξ_4 の線形結合として近似できると仮定する。

$$\begin{cases} U/\sqrt{\phi_{uv}(0)} \cong b_1\xi_1 - b_2\xi_4 \\ g_z/\sqrt{\phi_{g_z g_z}(0)} \cong -b_3\xi_1 + b_4\xi_4 \end{cases} \quad (14)$$

このとき U と g_z の自己、相互スペクトル密度は、

$$\begin{cases} \phi_{uv}(\omega_x)/\phi_{uv}(0) \cong b_1^2 G_1(s)G_1(-s) \\ \quad + b_2^2 G_2(s)G_2(-s) |_{s=j\omega_x} \\ \phi_{g_z g_z}(\omega_x)/\phi_{g_z g_z}(0) \cong b_3^2 G_1(s)G_1(-s) \\ \quad + b_4^2 G_2(s)G_2(-s) |_{s=j\omega_x} \end{cases} \quad (15)$$

と表わされる。 Γ_{xx} は U を x で 2 階微分した量であり、その分散が有限となるためには、線形システムは少なくとも 3 次以上でなければならない。ここでは $G_k(s)$ が以下の 3 次式で表わされると仮定する。

$$G_k(s) = a_k \omega_k^2 / \{s + a_k\}(s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2) \quad (16)$$

(16) 式は、状態変数、 $\xi_k (k=1, 6)$ を用いて

$$\begin{cases} d\xi_1/dx = \xi_2 \\ d\xi_2/dx = -2\zeta_1 \omega_1 \xi_2 - \omega_1^2 \xi_1 + \omega_1^2 \xi_3 \\ d\xi_3/dx = -a_1 \xi_3 + a_1 W_1 \\ d\xi_4/dx = \xi_5 \\ d\xi_5/dx = -2\zeta_2 \omega_2 \xi_5 - \omega_2^2 \xi_4 + \omega_2^2 \xi_6 \\ d\xi_6/dx = -a_2 \xi_6 + a_2 W_2 \end{cases} \quad (17)$$

と表示できる。 $g_z, \Gamma_{xx}, \Gamma_{xy}$ は状態変数、 ξ_{i1} を用い

$$\begin{cases} g_z/\sqrt{\phi_{uv}(0)} = b_1\xi_2 - b_2\xi_5 \\ \Gamma_{xx}/\sqrt{\phi_{uv}(0)} = b_1(-2\zeta_1 \omega_1 \xi_2 - \omega_1^2 \xi_1 + \xi_3) \\ \quad - b_2(-2\zeta_2 \omega_2 \xi_5 - \omega_2^2 \xi_4 + \xi_6) \\ \Gamma_{xz}/\sqrt{\phi_{g_z g_z}(0)} = -b_3\xi_2 + b_4\xi_5 \end{cases} \quad (18)$$

となる。なお 2 個の白色ノイズ、 W_1, W_2 、にはなんら物理的意味はないが、無限個のじょう乱源による重力乱れのポテンシャル、重力加速度、重力勾配の自己および相互スペクトル密度関数を近似することができる。

周波数領域、 $0 \leq \omega_x \leq 8 \times 10^{-6} m^{-1}$ 、において地表面での $G_1(s), G_2(s)$ の分母の多項式および係数、 $b_i, i=1 \sim 4$ を最小 2 乗法により求めた。得られた結果を以下に示す。

Fig. 3 Spectral-density relating U and G_z and rational approximation

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.49 \times 10^{-3} km^{-1}, \quad \omega_1 = 2.82 \times 10^{-3} km^{-1}, \\ \zeta_1 \omega_1 &= 1.64 \times 10^{-3} km^{-1}, \quad a_2 = 1.00 \times 10^{-1} km^{-1}, \\ \omega_2 &= 6.02 \times 10^{-3} km^{-1}, \quad \zeta_2 \omega_2 = 5.76 \times 10^{-3} km^{-1}, \\ b_1 &= \sqrt{0.86}, \quad b_2 = \sqrt{0.08}, \quad b_3 = \sqrt{0.18}, \quad b_4 = \sqrt{0.94} \end{aligned}$$

周波数零でのスペクトル値は

$$\phi_{uv}(0) = 4.9 \times 10^{-6} km^5(s)^{-4}$$

$$\phi_{g_z g_z}(0) = 2.8 \times 10^{-11} km^3(s)^{-4}$$

となる。Fig. 3 に (15) 式の両辺を比較する。

このようにして求めた 6 次の線形モデルを使用して海面上を $50 ms^{-1}$ の速度で一定方向に水平飛行する場合の定常カルマンフィルタをスタンフォード大学で開発されたコンピュータプログラム「OPTSYS」を用いて求めた⁶⁾。OPTSYS は固有ベクトル分解法 (Eigenvector Decomposition) を用い定常フィルタ・ゲインならびに共分散行列を高精度でかつ効率的に求めることができる。重力勾配計の測定誤差とカルマンフィルタによる重力加速度の推定精度との関係を Fig. 4 に示す。重力勾配計の測定誤差 (分散 σ_{gz}) は連続測定を 10 秒間平均した値に対するもので、測定誤差のパワースペクトル密度、 r は、分散と平均時間 (T) により以下のように表わされる。

$$r = T \sigma_{gz}^2$$

なお図中の破線は次章で説明する測定誤差が小さい場

Fig. 4 In-track gravity deflection estimation

Fig. 5 Integral contour

合の漸近解を示している。

5個の独立な重力勾配テンソル成分のうち、 g_x の推定のためには Γ_{xx} よりも Γ_{zz} を用いるほうがはるかに秀れた結果が得られる。これは g_x が Γ_{zz} の積分であることから当然の結果であり、同様に、 g_z の推定には、 Γ_{zz} より Γ_{xx} を用いるほうがより有効である。

4. ウィナー・フィルタ

ノイズを含む測定、 $z+n$ (z は m 次元ベクトル、 n は m 次元白色ノイズ) に基づく定常過程 y の推定値、 $\hat{y}$ が次式で与えられるとする。

$$\hat{y}(s) = \phi^T(s)[z(s) + n(s)] \quad (19)$$

ここで m 次元ベクトル伝達関数、 $\phi(s)$ は s 平面で左半平面のみに極を有するとする。このとき、推定誤差、 $\tilde{y} = y - \hat{y}$ は下式で計算される。

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{y}}^2 = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{ \phi^T(-s)(\Phi_{zz}(s) + \Phi_n)\phi(s) \\ & - \phi^T(-s)\Phi_{zy}(s) - \Phi_{zy}^T(-s)\phi(s) \\ & + \Phi_{yy}(s) \} ds \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $\Phi_{yy}(j\omega_x)$ は y のスペクトル密度、すなわち自己相関関数 (ACF) のフーリエ変換である。 Φ_{zz} 、 Φ_{zy} 、 Φ_n は、観測ベクトル、 z 、の ACF および y との相互相関関数のフーリエ変換およびノイズ n のスペクトル (一定) を表す。たとえば、 $y(x)$ の ACF を $C_y(x)$ とすると

$$\Phi_{yy}(j\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x) \cos \omega_x x dx$$

最適推定を与える伝達関数 $\phi(s)$ はつぎの条件を満たしなければならない。

- (1) (20) 式の $\sigma_{\tilde{y}}^2$ は有限である
- (2) $(\Phi_{zz}(s) + \Phi_n)\phi(s) - \Phi_{zy}(s)$ は s 平面の左半平面内に極をもたない。

条件 (2) は、 $\sigma_{\tilde{y}}^2$ が極小となるための必要条件である。推定誤差の分散の極小値は下式で与えられる。

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_c \{ \Phi_{yy}(s) - \Phi_{zy}^T(-s)\phi(s) \} ds \quad (21)$$

ここで c は虚軸に沿っての直線と被積分項の左半平面にあるすべての極を含む曲線からなっている (Fig. 5)。

5. 漸近解

高精度の測定ができる場合、重力モデルのスペクトル密度行列は、低周波数部の近似だけで十分と考えられる。このとき、前章のウィナー・フィルタ理論を用いて、最適フィルタを解析的に導くことができる。

(11) 式の低周波数近似形は

$$\frac{\phi_i}{\pi(2z_i)^5} \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & j\Omega & 0 & -2j\Omega \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ -j\Omega & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 0 & 24 & 0 \\ 2j\Omega & 0 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix} \quad (22)$$

したがって g_y 、 Γ_{yz} と g_x 、 g_z 、 Γ_{zz} のスペクトル密度行列の低周波数近似はつぎのように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} 2k_3 & -6k_4 \\ -6k_4 & 24k_5 \end{pmatrix} \quad (23)$$

および

$$\begin{pmatrix} -k_1s^2 & k_2s & -2k_3s \\ -k_2s & 2k_3 & -6k_4 \\ 2k_3s & -6k_4 & 24k_5 \end{pmatrix}$$

ここで $k_i = 1/\pi \sum_i [\phi_i/(2z_i)^i]$ であり s は $j\omega_x$ を表す。

ウィナー・フィルタ理論を適用して得られるフィルタ形的具体例を以下に示す。例1では、重力乱れの水平方向成分のうち進行方向 (x 方向) に垂直な成分、 g_y を g_y と最も相関の高い Γ_{zy} の測定から推定する場合、例2では、進行方向成分、 g_x を g_x と最も相関の高い Γ_{xx} の測定から推定する場合を示す。例3、4では、 g_x と相関のある Γ_{xz} 、 Γ_{zx} の測定を追加した場合、 g_x の推定がどの程度改善されるかについて検討する。

[例1] Γ_{zy} の測定から g_y の推定 (または Γ_{zz} から g_z の推定)

$\hat{g}_y = \phi(s)(\Gamma_{zy} + n)$ 、 $\tilde{g}_y = g_y - \hat{g}_y$ と置くと (20) 式から推定誤差の分散、 $\sigma_{\tilde{g}_y}^2$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{g}_y}^2 = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{ \phi(-s)(-2k_3s^2 + \Phi_n)\phi(s) \\ & + \phi(-s)(2k_3s) + (-2k_3s)\phi(s) + 2k_3 \} ds \\ = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \{ 2k_3[1 + s\phi(-s)][1 - s\phi(s)] \\ & + \Phi_n\phi(-s)\phi(s) \} ds \end{aligned}$$

$\phi(s)$ をつぎのように選ぶと分散を極小にできる。

$$\begin{cases} s \rightarrow \infty \text{ のとき } 1-s\phi(s) \rightarrow 0 \\ (\Phi_n - 2k_3 s^2)\phi(s) \text{ が左半平面に極をもたない。} \end{cases}$$

上記2条件を満たす関数として

$$\phi(s) = 1/[s + (1/L)]$$

を得る。これは1次遅れフィルタで、 L は時定数であり $(2k_3/\Phi_n)^{1/2}$ に等しい。このとき推定誤差の分散は、つぎようになる。

$$\sigma_{\hat{g}_y}^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c 2k_3 [1-s\phi(s)] ds = \sqrt{2k_3 \Phi_n}$$

分散1 EU の Γ_{xy} (または Γ_{xz}) の測定が、50 m/s の速度で飛行している物体上で10秒ごとに、すなわち0.5 km ごとに得られるとすると、 $\Phi_n = 0.5 \times 10^{-18} \text{ km/s}^4$ となり、さらに Table 1 の値を代入して $\sigma_{\hat{g}_y} = \sigma_{\hat{g}_z} = 6.2 \times 10^{-6} \text{ g}$ を得る。時定数は $L = 7900 \text{ km}$ である。ただし重力の乱れの分散は $\sigma_{g_x} = \sqrt{2} \sigma_{g_y} = \sqrt{3} k_4 = 4.3 \times 10^{-5} \text{ g}$ である。測定精度が0.1 EU に向上すると L は10倍となり σ_{g_x} は $1/\sqrt{10}$ 倍となる。

[例2] Γ_{xx} の測定から g_x の推定

$\hat{g}_x = \phi(s)(\Gamma_{xx} + n)$ と置くと最適フィルタは

$$\phi(s) = \frac{s + \frac{2}{L}}{s^2 + \frac{2}{L}s + \frac{2}{L^2}}$$

で与えられる。ここで $L = (4k_1/\Phi_n)^{1/4}$ であり、最適推定誤差の分散は

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{g}_x}^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c (-k_1 s) [1-s\phi(s)] ds \\ &= 4k_1/L^3 = (4k_1\Phi_n^3)^{1/4} \end{aligned}$$

で与えられる。数値例として測定精度が1 EU のとき、 $\sigma_{\hat{g}_x} = 3.5 \times 10^{-6} \text{ g}$ 、 $L = 2500 \text{ km}$ となり、0.1 EU の場合、 L は $10^{1/4}$ 倍になり $\sigma_{\hat{g}_x}$ は $1/10^{3/4}$ 倍となる。

[例3] Γ_{xx} と Γ_{xz} の測定から g_x の推定

$$\hat{g}_x = \phi_1(s)(\Gamma_{xx} + n_1) + \phi_2(s)(\Gamma_{xz} + n_z)$$

と置くと最適フィルタは、 Φ_n が小さい場合近似的に

$$\phi_1(s) = \frac{s + \frac{2}{L}}{s^2 + \frac{2}{L}s + \frac{2}{L^2}}, \quad \phi_2(s) = \frac{-\lambda/L}{s^2 + \frac{2}{L}s + \frac{2}{L^2}}$$

で与えられる。ここで

$$\lambda = \frac{k_2}{k_3 L}, \quad L = \left[\frac{4k_1}{\Phi_n} \left(1 - \frac{k_2^2}{2k_1 k_3} \right) \right]^{1/4}$$

である。このとき、推定誤差の分散は

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{g}_x}^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \{-k_1 s^2 [1-s\phi_1(s)] - k_2 s^2 \phi_2(s)\} ds \\ &= \frac{4k_1}{L^3} \left(1 - \frac{\lambda k_2 L}{2k_1} \right) = \left[4k_1 \Phi_n^3 \left(1 - \frac{k_2^2}{2k_1 k_3} \right) \right]^{1/4} \end{aligned}$$

となる。例2に Γ_{xz} の測定を追加しても、推定精度の大幅な向上はみられず、測定条件が例3と等しいとすると L は10%、 $\sigma_{\hat{g}_x}$ は5%減少するだけである。

[例4] Γ_{xx} , Γ_{xz} , Γ_{zz} の測定から g_x の推定

$$\begin{aligned} \hat{g}_x &= \phi_1(s)(\Gamma_{xx} + n_1) + \phi_2(s)(\Gamma_{xz} + n_2) \\ &\quad + \phi_3(s)(\Gamma_{zz} + n_3) \end{aligned}$$

と置くと、 Φ_n が小さい場合、最適フィルタは近似的に

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \frac{s + \frac{2}{L}}{s^2 + \frac{2}{L}s + \frac{2}{L^2}}, \quad \phi_2(s) = \frac{\lambda_1/L^2}{s^2 + \frac{2}{L}s + \frac{2}{L^2}} \\ \phi_3(s) &= \frac{-(\lambda_2/L^2)s}{s^2 + \frac{2}{L}s + \frac{2}{L^2}} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_1}{12(2k_2 k_5 - k_3 k_4)} \\ &= \frac{\lambda_2}{2(2k_3^2 - 3k_2 k_4)} = \frac{1}{12(4k_3 k_5 - 3k_4^2)} \end{aligned}$$

であり、また L は

$$L^4 = \frac{4k_1}{\Phi_n} \left\{ 1 - \frac{\frac{k_2^2}{k_1 k_3} - \frac{k_2 k_4}{k_1 k_5} + \frac{k_3^2}{3k_1 k_5}}{2 - \frac{3}{2} \frac{k_4^2}{k_3 k_5}} \right\}$$

で与えられる。このときの推定誤差の分散は、

$$\sigma_{\hat{g}_x}^2 = (4k_1)^{1/4} \Phi_n^{3/4} \left\{ 1 - \frac{\frac{k_2^2}{k_2 k_3} - \frac{k_2 k_4}{k_1 k_5} + \frac{k_3^2}{3k_1 k_5}}{2 - \frac{3}{2} \frac{k_4^2}{k_3 k_5}} \right\}^{1/4}$$

となる。例3に比べ、 L 、 $\sigma_{\hat{g}_x}$ はそれぞれ3%、1.5%ずつ減少する。

例1から4までの数値例を Fig. 4 に示す。3章で求めたカルマン・フィルタの結果とよく一致しており、また、図には示していないが、推定誤差の特性根のうち低周波数の根もよく一致している。

6. ま と め

現在米国で開発中の重力勾配計を用い、重力乱れを推定する実時間最適フィルタを二つの方法で検討した。Heller の重力乱れモデルを近似する定係数線形モデルを求め、計算機プログラム“OPTSYS”により、計測精度と重力乱れの推定誤差の関係を明らかにした。

最適フィルタの構造を明確にし、フィルタ機能の理解を容易にするため、重力乱れモデルの低周波近似を行い、ウィナフィルタ理論を用いて計測精度が高い場

合の最適フィルタを解析的に求める方法も示した。

今回導かれたフィルタは、時定数が大きすぎること、重力勾配計のバイアスを考慮する必要があることなど、実用的なフィルタを得るために解決すべき点がいくつか残されており、引き続き Stanford 大学で研究が続けられている。本論文は、筆者が Stanford 大学滞在中に行った研究に加筆したものであり、熱心に御指導いただき、種々の有益な示唆を賜った同大学の J. V. Breakell 教授ならびに D. B. DeBra 教授に深い感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) R. R. Hilderbrant, K. R. Britting and S. J. Madden, Jr.: The Effects of Gravitational Uncertainties on the Errors of Inertial Navigation Systems, J. Institute of Navigation, 7/363, Winter (1974-75)
- 2) E. J. Pelka and D. B. DeBra: Effects of Relative Instrument Orientation upon Gravity Gradiometer System Performance, J. Guidance and Control, 2, 18/24 (1979)
- 3) S. K. Jordan: Statistical Model for Gravity, Topography, and Density Contrasts in the Earth, J. Geophysical Research, 83, B 4, 1816/1824 (1978)
- 4) R. A. Nash, Jr. and S. K. Jordan: Statistical Geodesy-An Engineering Perspective, Proc. IEEE 66, 532/550 (1978)
- 5) W. E. Hall, Jr and A. E. Bryson: Optimal Control and Filter Synthesis by Eigenvector Decomposition, SUDAAR 436, Stanford Univ., Dec. (1971)

1) R. R. Hilderbrant, K. R. Britting and S. J. Madden,