省エネルギーを目的とした空気圧シリンダの最適制御[†]

—数理計画法に基づく理論的考察—

吉田 要*・清水 泰*・高森 年*・米持政忠*

Study on the Energy Minimum Control of Pneumatic Cylinder

—Theoretical Investigation by Mathematical Programming—

Kaname YOSHIDA*, Yasushi SHIMIZU*, Toshi TAKAMORI* and Masatada YONEMOCHI*

This paper presents the investigation of the optimal valve control which minimizes the consumption of air, or that of energy. At first, the simultaneous differential equations which describe the dynamics of a pneumatic cylinder are changed into a set of discrete equations, and the nonlinear optimization problem of several variables, which aims the minimization of the consumption of air, is set up. And then, we apply the nonlinear mathematical programming to this problem, and the optimal state variables at each time are obtained. Finally, we simulate the continuous model with the optimal valve control patterns which are obtained by solving the optimization problem, and compare the simulated responses with the solutions of the problem. The comparison between the two systems shows that the solutions of the problem agree well with the results of the simulation. And with this control, the consumption of air will be decreased to about 50~60%, and it will be possible to position a piston precisely. We can conclude that the proposed method is very effective when we decide the position of the piston under condition of minimizing its energy consumption.

Keyword: optimal control, pneumatic cylinder, mathematical programming, discrete system, computer control

1. はじめに

空気圧シリンダは、動作応答性、出力パワー、メンテナンスなどの面で優れたアクチュエータ特性をもつため、多くの自動化の自動化装置に応用されている。

[†] 第16回フルイディクスシンポジウムで発表(昭56・10)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received March 13, 1982)

(Revised August 23, 1982)

また、そのピストン位置決め制御の方式についても、これまでに比較的多くの研究がなされ、報告されている^{1)~3)}。しかしながら、最近、社会的にも問題とされつつある各種動力装置における省エネルギー化の観点から見れば、これまでに公表された位置決め制御方式が、必ずしも満足すべきものであるとは思われない。特に空気圧による制御の要素のなかでも空気消費量が極めて多い空気圧シリンダについては、その省エネルギー化の問題は重要であると考えられる。

本研究では以上の点を考慮して、空気圧シリンダの空気消費量最小化を目的とした空気圧シリンダの最適位置決め制御について理論的に検討した。具体的には、片ロッド空気圧シリンダの動特性を記述する数学モデル(連立常微分方程式)を時間分割による離散化モデルで表わし、多変数の非線形最適化問題として設定し、非線形数理計画法(Nonlinear Mathematical Programming)を適用して、弁開閉の最適制御パターンを求めた。すなわち、モデルが満足すべき基本式を等号制約式、最終位置と最終速度、および加速度に対する条件式を不等号制約式として設定し、最適化問題を解くことにより、弁開閉最適制御パターンを求めた。また、最後にシミュレーション計算を行い、モデルの応答と数理計画法によって得られた解と

Table 1 Values of model parameters

P_H	2.0 kgf/cm ²
P_C	1.0 kgf/cm ²
M	1.01×10 ⁻³ kgf·s ² /cm
F	2.0 kgf, 0.0 kgf
S_1	101.0 cm ²
S_2	100.0 cm ²
D	1.0 cm ²
l_1	25.0 cm
l_2	75.0 cm
l_x	50.0 cm

の比較を行い、本方法の有効性を示した。

【本論文で用いる主な記号】（モデルの設定値は

Table 1 参照）

M : ピストンと負荷を合せた質量 [kg]
 F : ピストンと負荷を合せた摩擦力 [kgf]
 S_1, S_2 : シリンダの断面積 [cm²]
 D : ピストンロッドの断面積 [cm²]
 G_1, G_2 : シリンダ室内の空気質量 [kg]
 V_1, V_2 : シリンダ室の容積 [cm³]
 P_H : 供給圧 [kgf/cm²]
 P_C : 大気圧 [kgf/cm²]
 d_1, d_2 : 弁の有効断面積 [cm²]
 Q_1, Q_2 : 質量流量 [kg/s]
 l_1, l_2 : ピストンの初期位置 [cm]
 x : ピストンの変位 [cm]
 l_x : ピストンの最終位置 [m]
 P_1, P_2 : シリンダ室内の圧力 [kgf/cm²]

なお、圧力は絶対圧で示し、添字 1 は左室側、添字 2 は右室側を示す。

2. 空気圧シリンダのモデル

2.1 空気圧シリンダの構成 (Fig. 1 参照)

定圧力源 P_H (2.0 kgf/cm²) からの空気の流入により、シリンダ左室内の圧力を高め、その力によりピストンを距離 l_x (50 cm) 移動させる。このとき、右室内から空気は大気中に放出されるものとし、それぞれ逆流はしないものとする。そして、このときの空気の流量は、on-off 弁、または比例弁により制御するものとする。

2.2 モデルの基本式

空気圧シリンダの運動特性を以下の数学モデルで表わす。

ピストンの運動：

$$M \cdot (d^2x/dt^2) + F = P_1 \cdot S_1 - P_2 \cdot S_2 - P_C \cdot D \quad (1)$$

Fig. 1 Pneumatic cylinder model

シリンダ室内の状態変化を断熱変化と仮定したとき、質量流量に関する連続の条件：

$$dP_1/dt = K \cdot P_1 \cdot Q_1 / G_1 - K \cdot P_1 \cdot S_1 / V_1 \cdot (dx/dt) \quad (2)$$

$$dP_2/dt = -K \cdot P_2 \cdot Q_2 / G_2 + K \cdot P_2 \cdot S_2 / V_2 \cdot (dx/dt) \quad (K: \text{比熱比}) \quad (3)$$

流入側の弁を通過する空気の質量流量 Q_1 : (注 1)

$$Q_1 = d_1 \cdot P_H \sqrt{2 \cdot \varphi(P_1/P_H) / (g \cdot R \cdot T)} \quad (4)$$

(g : 重力加速度, R : ガス定数, T : 温度)

ただし、i) $0.528 \leq P_1/P_H \leq 1$ のとき

$$\varphi(P_1/P_H) = \{K/(K-1)\} \left\{ (P_1/P_H)^{\frac{2}{K}} - (P_1/P_H)^{\frac{K+1}{K}} \right\} \quad (4.1)$$

ii) $P_1/P_H \leq 0.528$

$$\varphi(P_1/P_H) = \{K/(K-1)\} \left\{ 2/(K+1) \right\}^{\frac{2}{K-1}} \quad (4.2)$$

流出側の弁を通過する空気の質量流量 Q_2 :

$$Q_2 = d_2 \cdot P_2 \sqrt{2 \cdot \varphi(P_C/P_2) / (g \cdot R \cdot T)} \quad (5)$$

ただし、i) $0.528 \leq P_C/P_2 \leq 1$ のとき

$$\varphi(P_C/P_2) = \{K/(K-1)\} \left\{ (P_C/P_2)^{\frac{2}{K}} - (P_C/P_2)^{\frac{K+1}{K}} \right\} \quad (5.1)$$

ii) $P_C/P_2 \leq 0.528$

$$\varphi(P_C/P_2) = \{K/(K-1)\} \left\{ 2/(K+1) \right\}^{\frac{2}{K-1}} \quad (5.2)$$

なお、シリンダ室内の空気質量 G_1, G_2 およびシリンダ室の容積 V_1, V_2 はつぎのように表わされる。

$$G_1 = G_{1,1} + \int_0^t Q_1 dt \quad (6)$$

$$G_2 = G_{2,1} - \int_0^t Q_2 dt \quad (7)$$

$$V_1 = S_1 \cdot (l_1 + x) \quad (8)$$

$$V_2 = S_2 \cdot (l_2 - x) \quad (9)$$

ただし、 $G_{1,1}, G_{2,1}$ は初期値とする。

3. 最適化問題の設定

上の(1)~(9)式までの連続系の基本式に対して、サンプル間隔が一定の中心差分法を用いて離散化する。離散化された式は各時刻に対応した独立変数を導入する。さらに速度、位置、加速度に対してつぎのような制約を付加する。

(注 1) (4), (5)式は通常、準定常流と仮定して用いられる式であるが、本式を非定常流に用いた場合でも、比較的实际をよく表わしているとの報告がある。本論文においても準定常と仮定して用いている。

- i) 速度制御として最終速度を ε_1 以下にするための制約:

$$(x_n - x_{n-1} + \varepsilon_1)(x_n - x_{n-1} - \varepsilon_1) \leq 0 \quad (10)$$

- ii) 位置制御として最終位置と目標点との差を ε_2 以下にするための制約:

$$(x_n - l_x + \varepsilon_2)(x_n - l_x - \varepsilon_2) \leq 0 \quad (11)$$

- iii) 加速度制御として最終加速度を ε_3 以下にするための制約:

$$(P_{1,n} \cdot S_1 - P_{2,n} \cdot S_2 - F - P_C \cdot D - \varepsilon_3) \times (P_{1,n} \cdot S_1 - P_{2,n} \cdot S_2 - F - P_C \cdot D + \varepsilon_3) \leq 0 \quad (12)$$

ただし, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は特に 0 として選ぶこともでき, その場合は等号制約になる。

また, 弁の有効断面積に対する制約として

$$0 \leq d_{1,j} \leq d_1^* \quad (13)$$

$$0 \leq d_{2,j} \leq d_2^* \quad (14)$$

d_1^*, d_2^* は最大有効断面積; 添字はそれぞれ, j 番目, n 番目 (最終時刻) のサンプル時刻を表わす。

3.1 目的関数

空気消費量を評価するため, 空気圧シリンダ左室内の最終時刻における空気の質量を目的関数として設定する。このように定めた f で空気消費量が評価できることは, 定圧源より左室へ流入する空気が制御時間中は外部へ放出されないことから明らかである。すなわち f をつぎのように表わす。

$$f = \int_0^{t_n} Q_1 dt = G_{1,n} - G_{1,1} \quad (t_n: \text{最終時刻})$$

以下では, この目的関数 f を制約条件を満足する範囲内で最小化する方法について検討する。

3.2 最適化手法

本研究では最適化法として非線形数値計画法の乗数法 (The Method of Multipliers) を用いる⁵⁾。すなわち, つぎの不等号制約式および等号制約式

$$g_i(x) \leq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad h_j(x)=0 \quad (j=1, \dots, n)$$

を満たし目的関数 $f(x)$ を最小にする x を求める問題を考える。ここで, 状態変数 x は, 離散時刻ごとに独立変数を導入して,

$$x \triangleq (P_{1,1}, \dots, P_{1,n}, P_{2,1}, \dots, P_{2,n}, x_1, \dots, x_n, d_{1,1}, \dots)^T$$

となる。

今, $g_i(x)$ に対して

$$g_i(x) \leq 0 \quad \text{のとき} \quad s_i = -g_i(x)$$

$$g_i(x) \geq 0 \quad \text{のとき} \quad s_i = 0$$

となる変数 s_i (Slack Variable) を用いて $g_i(x) \leq 0$ の制約式を $g_i(x) + s_i = 0$ の等号制約式に置き換える。ここで, ラグランジュ関数 (Lagrange Function) Q を

Fig. 2 The algorithm of the method of multipliers

$$Q = f(x) + \sum_{i=1}^m \phi_i(g_i(x) + s_i) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j(x) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n (h_j(x))^2 \quad (r > 0)$$

とする。ここで, r はペナルティ定数で, ある程度以下の一定値として設定する。また ϕ, λ はラグランジュ乗数 (Lagrange Multipliers) と呼ばれるものである。このラグランジュ関数に対して, Fig. 2 に示すアルゴリズムを適用し, 計算を行う。

4. 計算結果とシミュレーションとの比較および考察

ここでは前節で示したアルゴリズムによる計算結果とそれによって得られた弁開閉の制御パターンを用いて連続系のモデル (1)~(9) 式をシミュレーションする。シミュレーションに用いる方法は高精度のルンゲ・クッタ・ギル法で, その出力は連続系をほぼ完全にシミュレートしていると考えられる。このシミュレーションと計画法による結果との比較を行うことにより, 本論文で使用する離散モデル式 (中心差分法によって得た) の精度についての妥当性を確かめることができる。

4.1 モデルの初期値

サンプリング時間 h を 2.0×10^{-3} [s], 制御を行う時間を $51 \cdot h = 1.02 \times 10^{-1}$ [s] とする。また, 弁の有効断面積は $5 \cdot h = 1.0 \times 10^{-2}$ [s] ごとに変化するものとす

Fig. 3 A curve by plotting the displacement X calculated with mathematical programming in friction of 2.0 kgf

Fig. 4 Curves by plotting the pressure p_1, p_2 calculated with mathematical programming in friction of 2.0 kgf

る。 $T=0.0[s]$ においては両室内の圧力は共に 1.0 kgf/cm^2 とし、 d_1, d_2 は共に 0.0 cm^2 とする。また、最終時刻においても共に d_1, d_2 は 0.0 cm^2 とする。弁の有効断面積の上限としては、シリンダの断面積の 15% を限度とする。なお、摩擦力としては $F=2.0 \text{ [kgf]}$ とする。

4.2 結果および考察

計算結果を Fig. 3～Fig. 5 に示す。まず Fig. 5 より $T=0.012[s]$ において d_1 が 13.72 cm^2 と最も弁が開かれているのに対し、 d_2 は 0.0 cm^2 と閉じられている。これにより P_1 は急激に上昇しようとする。Fig. 4 をみると、このとき P_1 は最高圧力 1.99 kgf/cm^2 でピストンに大きな加速度を生ずる。しかしながら、その後 $T=0.022[s]$ から $0.042[s]$ までは d_1, d_2 共に 0.0 cm^2 となっているがピストンが移動するために P_1 は圧力が下降し始め、逆に P_2 は上昇し制動が加わる。 $T=0.042[s]$ においては $d_1=4.01 \text{ cm}^2$ (26.5%), $d_2=5.07 \text{ cm}^2$ (33.5%) となって、ここで P_1, P_2 は極値をとり P_1 は上昇、 P_2 は下降し始める。それ以後 $T=0.062[s]$ まで加速度を生じる。そして、 $T=0.062[s]$ から $0.072[s]$ におい

Fig. 5 Curves by plotting the cross-sectional area of valve d_1, d_2 calculated with mathematical programming in friction of 2.0 kgf

Fig. 6 A curve by plotting the displacement X simulated with optimal valve control in friction of 2.0 kgf

Fig. 7 Curves by plotting the pressure P_1, P_2 simulated with optimal valve control in friction of 2.0 kgf

て $d_1=0.02 \text{ cm}^2$ (0.1%), $d_2=13.60 \text{ cm}^2$ となり、そのときピストンが急速に移動し始めるため、 P_1 は急速に下がるが、 d_2 が大きく開放されているので P_2 はそれほど上昇しない。それ以後 $T=0.092[s]$ まで P_1 が下降、 P_2 が上昇して位置決めのための最終的な制動を行い、速度を 0 に近づける。こうして速度が 0 に近づいたところで $d_2=7.21 \text{ cm}^2$ (47.6%) と大き

Fig. 8 Curves by plotting the air mass G_1 , G_2 simulated with optimal valve control in friction of 2.0 kgf

Fig. 9 A curve by plotting the displacement X simulated with $d_1=2.25\text{cm}^2$, $d_2=2.25\text{cm}^2$ in friction of 2.0 kgf

Fig. 10 Curves by plotting the pressure P_1 , P_2 simulated with $d_1=2.25\text{cm}^2$, $d_2=2.25\text{cm}^2$ in friction of 2.0 kgf

く開放して、圧力を急速に下げる。以上のことより Fig. 3～Fig. 5 の応答に関する対応は一致しているといえる。

最終時間において弁の有効断面積を共に $0.0[\text{cm}^2]$ としたときには、 $P_1=1.03[\text{kgf/cm}^2]$ 、 $P_2=1.01[\text{kgf/cm}^2]$ となる。目的関数の空気消費量($G_{1,n}-G_{1,1}$)の最小化を行うことは $G_{1,n}$ が $P_{1,n}$ に正比例することから $P_{1,n}$ の最小化を行うことになるからである。さらに $P_{1,n}$ と $P_{2,n}$ がほぼ等しいのは加速度の制約式を満た

Fig. 11 Curves by plotting the air mass G_1 , G_2 simulated with $d_1=2.25\text{cm}^2$, $d_2=2.25\text{cm}^2$ in friction of 2.5 kgf

Fig. 12 A curve by plotting the displacement X calculated with mathematical programming in friction of 0.0 kgf

Fig. 13 Curves by plotting the pressure P_1 , P_2 calculated with mathematical programming in friction of 0.0 kgf

すからである。このとき、最終位置の誤差は $|x_n - l_x| = 0.04[\text{cm}]$ (0.08%) である。この誤差は収束条件をより厳しくすることにより改良できる。

以上のようにして得られた弁開閉の制御パターンを用いてシミュレーションを行った結果が Fig. 6～Fig. 8 である。Fig. 3 および Fig. 4, Fig. 6 および Fig. 7 を比べればわかるように両者はほとんど一致している。なお、シミュレーションの最終位置の誤差は 0.59cm (1.18%) である。

Fig. 14 Curves by plotting the cross-sectional area of valve d_1 , d_2 calculated with mathematical programming in friction of 0.0 kgf

つぎに同じモデルに対して同じ時間でピストンが 50 cm 移動する単純駆動方式の例として $d_1 = d_2 = 2.25$ [cm²] の一定値に保ったときのシミュレーション結果を Fig. 9~Fig. 11 に示す。最適制御によった場合の空気の消費量が 0.679×10^{-5} kg (Fig. 8 参照) に対して、後者の例では空気の消費量は 0.101×10^{-4} kg (Fig. 11 参照) となっており、前者に比べて 1.49 倍の空気を消費することがわかり、本方法が省エネルギー上有効であることがわかる。

ついで摩擦がない場合に対して同様の計算を行った結果を Fig. 12~Fig. 14 に示す。傾向は摩擦のある場合とほとんど同じであるが P_1 , P_2 の応答は幾分緩やかであることがわかる。この場合も最適制御方式に比べて d_1 , d_2 を一定に保ったときには空気の消費

量は約 1.40 倍となっていることがわかる。

5. おわりに

本論文は空気圧シリンダの位置決め制御に対する省エネルギーを目的とした制御方式を非線形数値計画法を適用することによって理論的に検討した。その結果、単純駆動方式における空気消費量を 100% とすると最適制御方式の空気消費量は 50%~60% に節約できることがわかった。このことから、本論文で扱った最適制御方式は、省エネルギー上有効であることが示された。今後、以上の結果に基づいて実際のモデルに対して計算機制御を行った結果を次回に報告したい。また、この方法によりモデルの最適設計も可能であるが今後の課題とする。

参考文献

- 1) 花房, 則次: 空気圧ミリンダーの高精度位置決めのための圧力制御方式, 昭和 54 年秋季油圧空圧講演論文集, 37/40 (1979)
- 2) 永野, 野上, 木藤: マイコンを用いた空気圧シリンダー位置決めに関する検討, 第 15 回フルイデクスシンポジウム講演論文集, 141 (1980)
- 3) 花房: 空気圧制御の問題点, 油圧と空気圧, 8-3, 135/141 (1977)
- 4) G. P. Blair and J. R. Goulburn: The Pressure-Time History in the Exhaust System of a High-Speed Reciprocating Internal Combustion Engine, SAE Transactions 76 (1968)
- 5) 志水: システム最適化理論, 48, コロナ社 (1976)