線形構造化システムの可同定性に関する考察[†]

早 川 義 一*・細 江 繁 幸*・林

陸**・伊 藤 正 美*

A Study of Structural Identifiability of Linear Systems

Yoshikazu HAYAKAWA*, Shigeyuki HOSOE*, Mutsumi HAYASHI* and Masami ITO*

In many modeling problems, the system matrices have a number of fixed zero entries determined by the physical structure of the system while the remaining entries are a priori known functions of the free (physical) parameters. Then, from input-output data (e. g. transfer function), can we uniquely determine the unknown free parameters? This problem introduced the concept of structural identifiability (abbreviated to SI).

This paper discusses SI of the system whose parametrization is affine. Firstly we remark the relation between SI and the structural controllability (and observability), and give new algebraic equivalent conditions for SI. Based upon these results, secondly, we obtain all the SI structured systems the indeterminate entries of that are unrelated, and it is made clear how SI of compartmental systems is influenced by the way of connection among its subsystems.

Keyword: structural identifiability, structured system, compartmental system, coates graph, compartmental graph

1. ま え が き

適当な物理量を状態変数に選び状態方程式を記述すると、システムの構造的・物理的要求から、状態方程式の係数行列はある定まった位置に零に固定された要素(零固定要素)をもち、ほかの要素(非零固定要素)はある独立なパラメータ(たとえば、質量、静電容量などの物理パラメータ)の関数になる。

このとき、システムの構造(すなわち、係数行列における零固定要素の位置および非零固定要素の独立パ

ラメータによる表現式)は既知であるが、独立パラメータの値は未知であるとする線形構造化システムに対し、その入出力応答(たとえば、伝達関数)から未知の独立パラメータの値を、ほとんどすべての nominal value に対して、局所的かつ一意的に決定することができるかどうかという問題がある。これは Bellman, Åström の提案した構造可同定性¹⁾の問題であり、Glover の定義したパラメータ可同定性^{2)~4)}が generic に成立するかどうかの問題である。

本論文では、非零固定要素が独立パラメータに関して affine である 1 入力-1 出力線形構造化システムが構造可同定であるための新たな必要十分条件を与え、これをもとに、

(i) 非零固定要素が互いに独立であるシステム(以後“一般の構造化システム”と呼ぶ)

(ii) 非零固定の移行係数が互いに独立であるコンパートメントシステム(以後単に“コンパートメントシステム”と呼ぶ)

の構造可同定性について考察する。

一般の構造化システムの構造可同定性に関しては、著者らの知る限り、これまでまったく研究がなされていない。本論文では、一般の構造化システムの構造可同定性が、本質的に、システムの次元によって完全に特徴づけられることを示す。

コンパートメントシステムの構造可同定性に関しては、従来多くの研究がなされてきている^{5)~8)}が、その多くはシステムの構造に関する情報を構造可同定性の問題の中に明確な形で取り込むことに成功しておらず、その結果、構造可同定性の必要十分条件をシステムの構造上の表現に帰着させるという最終的に程遠いのが現状である。こうした中で、前田ら⁹⁾はシステムの構造上の変化(流れの反転や漏れの有無)が構造可同定性にどのような影響を与えるかを考察し、興味ある二、三の結果を与えている。これに対し、本論文ではサブシステム間の結合の仕方が全体のコンパートメントシステムの構造可同定性にどのような影響を与

[†] 第 11 回制御理論シンポジウムで発表(昭 57・5)

* 名古屋大学工学部 名古屋市千種区不老町

** 東レ(株) 大津市園山 1-1-1

* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

** Toray Inc., Otsu

(Received May 12, 1982)

(Revised September 13, 1982)

えるかを考察している。

2. 構造可同定性と構造可制御・可観測性

本論文で考察するシステムは、次式で記述される 1 入力—1 出力線形構造化システム S である。

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{p})\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $v(t), y(t) \in \mathbf{R}$, 行列 $A(\mathbf{p})$ の非零固定要素は独立パラメータを並べたベクトル $\mathbf{p}(\in \mathbf{R}^r)$ に関して affine であるとする。すなわち、

$$A(\mathbf{p}) = A(0) + \bar{A}(\mathbf{p}), \quad \bar{A}(0) = 0 \quad (2)$$

であり、 $\bar{A}(\mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ に関して線形である。また、

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_j \quad (3)$$

であるとし (ただし、 $\mathbf{e}_i$: 第 i 単位ベクトル), $i=j$ のとき、 S は D.P. (driving point) システム, $i \neq j$ のとき T. (transfer) システムと呼ばれる。

システム S の伝達関数 $g(s, \mathbf{p})$ は、

$$\begin{aligned} g(s, \mathbf{p}) &= \frac{\delta_{ij}s^{n-1} + b_{n-2}(\mathbf{p})s^{n-2} + \dots + b_1(\mathbf{p})s + b_0(\mathbf{p})}{s^n + a_{n-1}(\mathbf{p})s^{n-1} + \dots + a_1(\mathbf{p})s + a_0(\mathbf{p})} \\ &\quad (4) \end{aligned}$$

ただし

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j, \text{ すなわち D.P. システム}) \\ 0 & (i \neq j, \text{ すなわち T. システム}) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 $a_{n-1}(\mathbf{p}), \dots, a_0(\mathbf{p}), b_{n-2}(\mathbf{p}), \dots, b_0(\mathbf{p}) \in \mathbf{R}[\mathbf{p}]$ である。 $\mathbf{R}[\cdot]$ は $[\]$ 内の要素を変数とするすべての実数係数多変数多項式の集合である。

【定義 1】

「(i) システム S が nominal value $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^r$ で可同定であるとは、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $\|\mathbf{p}' - \mathbf{p}\| < \varepsilon$ であり、

$$g(s, \mathbf{p}') = g(s, \mathbf{p}) \quad (5)$$

ならば、 $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ となることである (ただし、 $\|\cdot\|$ は適当なノルムでよい)。

(ii) システム S が構造可同定であるとは、ある proper variety $V \subset \mathbf{R}^r$ が存在して、任意の nominal value $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^r - V$ で S が可同定となることである。」

(注 1) (i) の可同定性は Grewal, Grover の定義した局所パラメータ可同定性⁹⁾と同一のものである。

一方、Lin の定義した構造可制御 (可観測) 性⁹⁾の自然な拡張として、システム S の構造可制御性、構造可観測性をつぎのように定義する。

【定義 2】

「システム S が構造可制御 (可観測) であるとは、あ

る proper variety $V \subset \mathbf{R}^r$ が存在して、任意の $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^r - V$ で、 $(A(\mathbf{p}), \mathbf{b})$ ($(\mathbf{c}^T, A(\mathbf{p}))$) が可制御 (可観測) 対となることである。」

このとき、システム S の構造可制御性、構造可観測性と、(4) 式の伝達関数 $g(s, \mathbf{p})$ の分母 $a(s, \mathbf{p})$, 分子 $b(s, \mathbf{p})$, すなわち

$$\begin{cases} a(s, \mathbf{p}) = s^n + a_{n-1}(\mathbf{p})s^{n-1} + \dots + a_1(\mathbf{p})s + a_0(\mathbf{p}) \\ b(s, \mathbf{p}) = \delta_{ij}s^{n-1} + b_{n-2}(\mathbf{p})s^{n-2} + \dots + b_1(\mathbf{p})s + b_0(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (6)$$

との間につぎの補題が成り立つ。

【補題 1】

「システム S が構造可制御かつ構造可観測であるための必要十分条件は、 $a(s, \mathbf{p}), b(s, \mathbf{p}) (\in \mathbf{R}[s, \mathbf{p}])$ が $\mathbf{R}[s, \mathbf{p}]$ 上で共通 s -因子 (s に関して次数が 1 次以上の共通因子) をもたないことである。」

(証明) $a(s, \mathbf{p}), b(s, \mathbf{p})$ が $\mathbf{R}[s, \mathbf{p}]$ 上で共通 s -因子をもたないことと、ある proper variety $V \subset \mathbf{R}^r$ が存在して、任意の $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^r - V$ で $a(s, \mathbf{p}), b(s, \mathbf{p}) (\in \mathbf{R}[s])$ が共通因子をもたないことが等価である (たとえば、文献 10), 補題 1) ので、補題の主張は明らかである。(証明終)

しかし、文献 14) でも指摘されているように、システム S が構造可同定であるためには、必ずしも、 S が構造可制御かつ構造可観測である必要はない。

そこで、本論文では、特に断わらない限り、システム S は構造可制御かつ構造可観測である必要はないものとする。したがって、(6) 式の $a(s, \mathbf{p}), b(s, \mathbf{p})$ の $\mathbf{R}[s, \mathbf{p}]$ 上での最大共通因子を $h(s, \mathbf{p})$ とし、

$$a(s, \mathbf{p}) = h(s, \mathbf{p})\bar{a}(s, \mathbf{p}), \quad b(s, \mathbf{p}) = h(s, \mathbf{p})\bar{b}(s, \mathbf{p}) \quad (7)$$

$$\begin{cases} h(s, \mathbf{p}) = s^m + h_{m-1}(\mathbf{p})s^{m-1} + \dots + h_1(\mathbf{p})s + h_0(\mathbf{p}) \\ \bar{a}(s, \mathbf{p}) = s^{n-m} + \bar{a}_{n-m-1}(\mathbf{p})s^{n-m-1} + \dots + \bar{a}_1(\mathbf{p})s + \bar{a}_0(\mathbf{p}) \\ \bar{b}(s, \mathbf{p}) = \delta_{ij}s^{n-m-1} + \bar{b}_{n-m-2}(\mathbf{p})s^{n-m-2} + \dots + \bar{b}_1(\mathbf{p})s + \bar{b}_0(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (8)$$

と書くことにする。

《定理 1》

つぎの三つの条件は等価である。

(i) システム S は構造可同定である。

$$(ii) \quad g. \text{ rank } \bar{J}(\mathbf{p}) = r \quad (9)$$

ただし、 $\bar{J}(\mathbf{p})$ は、

$\bar{F}(\mathbf{p}) \triangleq (\bar{a}_{n-m-1}(\mathbf{p}), \dots, \bar{a}_0(\mathbf{p}), \bar{b}_{n-m-2}(\mathbf{p}), \dots, \bar{b}_0(\mathbf{p}))^T$ のヤコビ行列

$$\bar{J}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \bar{F}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} (\in \mathbf{R}[\mathbf{p}]^{(2n-2m-1) \times r}) \quad (10)$$

であり、“g. rank” は generic rank を意味する。

(iii) $q \in R[p]^r$ に対して,

$$\det \begin{bmatrix} sI - A(p) & 0 & b \\ \bar{A}(q) & sI - A(p) & 0 \\ 0 & c^T & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

ならば, $q=0$ である.

もし, システム S が構造可制御かつ構造可観測であれば, (i), (ii), (iii) に加え, つぎの条件も等価である.

(iv) $X \in R[p]^{n \times n}$, $q \in R[p]^r$ に対して,

$$\begin{cases} XA(p) - A(p)X = \bar{A}(q) & (12.a) \\ Xb = 0 & (12.b) \\ c^T X = 0 & (12.c) \end{cases}$$

ならば, $X=0$, $q=0$ である.

(証明) (i) $\Leftrightarrow$ (ii): 仮定より, $\bar{a}(s, p)$, $\bar{b}(s, p)$ は $R[s, p]$ 上で共通 s -因子をもたず, したがって, ある proper variety $V \subset R^r$ が存在して, $\forall p \in R^r - V$ で, $\bar{a}(s, p)$, $\bar{b}(s, p) (\in R[s])$ は共通因子をもたない. ゆえに, nominal value として任意の $p \in R^r - V$ を考えれば, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $\|p' - p\| < \varepsilon$ を満たす任意の p' が $p' \in R^r - V$ とすることができ, $\bar{a}(s, p)$, $\bar{b}(s, p) (\in R[s])$ は共通因子をもたず, $\bar{a}(s, p')$, $\bar{b}(s, p') (\in R[s])$ も共通因子をもたないことになる.

さて, (5) 式は $\bar{a}(s, p)\bar{b}(s, p') = \bar{a}(s, p')\bar{b}(s, p)$ と等価であり, 上述のことから, $\bar{a}(s, p) = \bar{a}(s, p')$, $\bar{b}(s, p) = \bar{b}(s, p')$, つまり $\bar{F}(p') = \bar{F}(p)$ と等価である.

以上のことから, 条件 (i) と (ii) の等価性は, 陰関数・逆関数の定理¹³⁾より明らかである.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii):

$$\det \begin{bmatrix} sI - A(p_1) & 0 & b \\ \bar{A}(p_2) & sI - A(p_2) & 0 \\ 0 & c^T & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$N(p) = \begin{bmatrix} \xrightarrow{2n-2m-1} & & \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \bar{h}_{2m-1}(p) & & 1 \\ & \ddots & \\ \bar{h}_0(p) & & \bar{h}_{2m-1}(p) \\ 0 & & \bar{h}_0(p) \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 2n-1 \\ \downarrow \end{matrix}, \quad M(p) = \begin{bmatrix} \xrightarrow{n-m} & \xrightarrow{n-m-1} & \\ -\delta_{ij} & 0 & 1 \\ -\bar{b}_{n-m-2}(p) & -\delta_{ij} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\bar{b}_0(p) & -\bar{b}_{n-m-2}(p) & \bar{a}_{n-m-1}(p) \\ 0 & -\bar{b}_0(p) & \bar{a}_0(p) \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 2n-2m-1 \\ \downarrow \end{matrix} \quad (15)$$

であるので, 結局, $N(p)M(p)\bar{J}(p) = G(p, p)$ を得る. (15) 式から $N(p)$ は column full rank であり, また仮定 ($\bar{a}(s, p)$, $\bar{b}(s, p)$ は $R[s, p]$ 上で共通 s -因子をもたないこと) から $M(p)$ は generic に正則である.

以上より, $\text{g. rank } \bar{J}(p) = \text{g. rank } G(p, p)$ であり, 条件 (ii) と (iii) の等分性を示すことができた. $\nearrow$

$$\searrow = (s^{2n-2}, s^{2n-3}, \dots, s, 1)G(p_1, p_2)p_3 \quad (13)$$

(ただし, $G(p_1, p_2) \in R[p_1, p_2]^{(2n-1) \times r}$) と書くことができることから, 条件 (iii) と $\text{g. rank } G(p, p) = r$ とは等価である.

一方,

$$\begin{aligned} & \frac{b(s, p')}{a(s, p')} \frac{b(s, p)}{a(s, p)} \\ &= c^T (sI - A(p'))^{-1} b - c^T (sI - A(p))^{-1} b \\ &= (0 \quad c^T) \begin{pmatrix} sI - A(p) & 0 \\ -\bar{A}(p' - p) & sI - A(p') \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} & b(s, p')a(s, p) - b(s, p)a(s, p') \\ &= \det \begin{pmatrix} sI - A(p) & 0 & b \\ \bar{A}(p' - p) & sI - A(p') & 0 \\ 0 & c^T & 0 \end{pmatrix} \\ &= (s^{2n-2}, s^{2n-3}, \dots, s, 1)G(p, p')(p' - p) \end{aligned}$$

であり, したがって,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial b(s, p)}{\partial p} a(s, p) - b(s, p) \frac{\partial a(s, p)}{\partial p} \\ &= (s^{2n-2}, \dots, s, 1)G(p, p) \end{aligned} \quad (14)$$

を得る. ここで,

(14) 式の左辺

$$\begin{aligned} &= h^2(s, p) \left(\bar{a}(s, p) \frac{\partial \bar{b}(s, p)}{\partial p} - \bar{b}(s, p) \frac{\partial \bar{a}(s, p)}{\partial p} \right) \\ &= (s^{2n-2}, s^{2n-3}, \dots, s, 1)N(p)M(p)\bar{J}(p) \end{aligned}$$

ただし,

$$h^2(s, p) = s^{2m} + \bar{h}_{2m-1}(p)s^{2m-1} + \dots + \bar{h}_1(p)s + \bar{h}_0(p)$$

と書けば

$\searrow$ つぎに, 構造可制御かつ構造可観測なシステム S に対して, 条件 (iii) と (iv) の等価性を示す.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): ある $X \in R[p]^{n \times n}$, $q \in R[p]^r$ で (12) 式が成立したとする. このとき, (12.a) 式から

$$\begin{aligned} & (sI - A(p))^{-1} \bar{A}(q)(sI - A(p))^{-1} \\ &= X(sI - A(p))^{-1} - (sI - A(p))^{-1} X \end{aligned}$$

が成り立ち, (12.b), (12.c) 式を用いて,

$$\mathbf{c}^T(s\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{p}))^{-1}\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{q})(s\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{p}))^{-1}\mathbf{b}=0 \quad (16)$$

を得る。(16)式は(11)式と等価であり、結局 $\mathbf{q}=0$ を得る。 $\mathbf{q}=0$ を(12.a)式に代入し、(12.b)式を用いると、 $X[\mathbf{b}, \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}(\mathbf{p})^{n-1}\mathbf{b}]=0$ 。仮定(構造可制御性)より、 $X=0$ を得る。

(iv) $\Rightarrow$ (iii): ある $\mathbf{q} \in \mathbf{R}[\mathbf{p}]^r$ に対して、(11)式が成立したとする。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &\triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{p}) & 0 \\ -\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) & \mathbf{A}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \\ C &\triangleq (\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{b}}, \dots, \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{b}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}, \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}(\mathbf{p})^{n-1}\mathbf{b} \\ 0, & \times \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} \overset{n}{\leftarrow} \mathbf{C}_n \\ -\mathbf{U} \end{pmatrix} \uparrow^n \\ O &\triangleq \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{c}}^T \\ \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{A}}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{c}^T \\ \times & \mathbf{c}^T \mathbf{A}(\mathbf{p}) \\ & \vdots \\ & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \overset{n}{\leftarrow} \mathbf{V} & \overset{n}{\leftarrow} \mathbf{O}_n \end{pmatrix} \uparrow^n \end{aligned}$$

と置けば、(11)式は $\hat{\mathbf{c}}^T(s\mathbf{I}-\hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{b}}=0$ と等価であり、ゆえに、

$$\begin{cases} OC = VC_n - O_n U = 0 & (17.a) \\ O\hat{\mathbf{A}}C = V\mathbf{A}(\mathbf{p})C_n - O_n \mathbf{A}(\mathbf{p})U - O_n \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{q})C_n = 0 & (17.b) \end{cases}$$

を得る。ここで、

$$\alpha \triangleq \det O_n \cdot \det C_n (\neq 0) \in \mathbf{R}[\mathbf{p}],$$

$$X \triangleq \alpha O_n^{-1}V \in \mathbf{R}[\mathbf{p}]^{n \times n}$$

と置き、 $\alpha \mathbf{q}$ を改めて $\mathbf{q} (\in \mathbf{R}[\mathbf{p}]^r)$ と置けば、(17.a)式から $X = \alpha UC_n^{-1}$ であり、(17.b)式から(12.a)式を得る。さらに、

$$\begin{cases} X\mathbf{b} = \alpha UC_n^{-1}\mathbf{b} = \alpha U\mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{c}^T X = \alpha \mathbf{c}^T O_n^{-1}V = \alpha \mathbf{e}_1^T V = 0 \end{cases}$$

より、(12.b)、(12.c)式を得る。したがって、 $\mathbf{q}=0$ である。(証明終)

(注 2) 条件(ii)は、 $F(\mathbf{p})=(a_{n-1}(\mathbf{p}), \dots, a_0(\mathbf{p}), b_{n-2}(\mathbf{p}), \dots, b_0(\mathbf{p}))^T$ のヤコビ行列の column full rank 性、すなわち、

$$J(\mathbf{p}) = \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \in \mathbf{R}[\mathbf{p}]^{(2n-1) \times r}$$

に対して $\text{g. rank } J(\mathbf{p})=r$ という条件と等価でない。一般に $\text{g. rank } J(\mathbf{p}) \geq \text{g. rank } \bar{J}(\mathbf{p})$ であるので注意を要する。

(注 3) 条件(iv)は、文献 2) でクロネッカ積の表現で与えられている条件が generic に成立することと同じことである。

3. 一般の構造化システムとコンパートメントシステムの構造可同定性

この章では、前章、定理 1 をもとに、一般の構造化システムやコンパートメントシステムの構造可同定性をシステムのグラフ構造との関係から考察する。

3.1 一般の構造化システムの構造可同定性

(1)式において、行列 $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ の非零固定要素がすべて互いに独立なパラメータであるとき、システム S を一般の構造化システムと呼ぶことにする。

一般の構造化システム S では、行列 $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ のすべての非零固定要素を並べたベクトルを $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^r$ とすることができ、したがって、(2)式において、 $A(0) \triangleq O$ 、 $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}(\mathbf{p})$ である。

n 次元の一般の構造化システム S のシステム構造は一つの入力節点、一つの出力節点、および n 個の状態節点をもつ Coates グラフ⁹⁾で表現することができる。この Coates グラフの強連結成分のうち、自己ループをもたないただ一つの状態節点だけからなる強連結成分を零節点と呼ぶことにする。また、強連結成分で入力節点からのパスおよび出力節点へのパスがともに存在するものは入出力連結と呼ぶことにする。

[補題 2]

一般の構造化システム S が構造可同定であるためには、その Coates グラフにおいて、入出力連結でない強連結成分は孤立した零節点でなければならない。

(証明) 入出力連結でない強連結成分 D が零節点でなければ、 D に含まれる有向枝(少なくとも一つ存在)に対応する $\mathbf{p}$ の要素は(8)式の $h(s, \mathbf{p})$ に含まれ、 $\bar{a}(s, \mathbf{p})$ や $\bar{b}(s, \mathbf{p})$ には含まれない ($a(s, \mathbf{p})$, $b(s, \mathbf{p})$ は $\mathbf{p}$ の各要素に関して 1 次以下である)。したがって、定理 1、条件(ii)が満たされず、構造可同定になり得ない。

一方、入出力連結でない強連結成分が零節点ではあるが、孤立していないとする。このとき、その零節点は少なくとも一つの入枝か出枝をもつことになるが、それらに対応する $\mathbf{p}$ の要素は(6)式の $a(s, \mathbf{p})$, $b(s, \mathbf{p})$ に現れず、したがって、定理 1、条件(ii)が満たされない。ゆえに、この場合も構造可同定になり得ない。(証明終)

この補題から、すべての強連結成分が入出力連結である一般の構造化システムだけを考えればよいことになる。

《定理 2》

Coates グラフのすべての強連結成分が入出力連結

Fig. 1 Coates graph

である一般の構造化システム S において、

(i) システムの次元が2次以上の D.P. システムは構造可同定になり得ない。

(ii) システムの次元が3次以上の T. システムは構造可同定になり得ない。」

(証明) $n(\geq 3)$ 次元の T. システムでは、一般性を失うことなく、(1)式において、

$$A(p) = \begin{pmatrix} A_{11} & w \uparrow^{n-1} \\ v^T & a_{22} \uparrow^1 \end{pmatrix}, \quad b = e_1, \quad c = e_{n-1}$$

$\begin{matrix} \leftarrow n-1 & \leftarrow 1 \end{matrix}$

としてよい (Fig. 1)。ここで、 v は $v_1, v_2, \dots, v_s$ と零固定要素から、 w は $w_1, w_2, \dots, w_t$ と零固定要素からなるベクトルであり (仮定から、 $s, t \geq 1$)、 A_{11} 、 a_{11} に含まれる p の要素からなるベクトルを $\tilde{p}$ とすれば、 $p = (v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t, \tilde{p}^T)^T$ である。

定理 1, 条件 (iii) の q として、 $q = (-v_1, \dots, -v_s, w_1, \dots, w_t, 0 \dots 0)^T (\neq 0) \in R[p]^r$ を考えれば、

$$\bar{A}(q) = A(q) = \begin{pmatrix} 0 & w \uparrow^{n-1} \\ -v^T & 0 \uparrow^1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \leftarrow n-1 & \leftarrow 1 \end{matrix}$

であり、したがって簡単な計算から、(11)式が成り立つことがわかる。ゆえに、構造可同定でないことを示すことができた。

$n(\geq 2)$ 次元の D.P. システムについても同様に構造可同定でないことを示すことができる。(証明終)

定理 2 から、構造可同定な一般の構造化システムの Coates グラフ構造をすべて挙げることができ、孤立した零節点を除けば、Fig. 2 に示す 9 種類である。

3.2 コンパートメントシステムの構造可同定性

n 個のコンパートメントからなり、 i 番目のコンパートメントを入力コンパートメント、 j 番目のコンパートメントを出力コンパートメントとするコンパートメントシステムを考える。非零固定の移行係数 k_{ij} (j 番目のコンパートメントから i 番目のコンパートメントへの移行係数) や k_{0i} (j 番目のコンパートメントから系外への漏れの移行係数) が互いに独立なパラメータとみなすことができれば、これらすべての非零固定の移行係数を並べたベクトル $p \in R^r$ を用いて、コンパートメントシステムは (1) 式で記述される。ただし、(2) 式において、 $A(0) = O$ 、 $\bar{A}(p) = A(p)$ であ

Fig. 2 All the structured systems that are structurally identifiable

り、 $A(p)$ の (i, j) 要素 a_{ij} は

$$a_{ji} = k_{ij} (i \neq j), \quad a_{ii} = -k_{0i} - \sum_{j=1}^n k_{ji} \quad (18)$$

である¹²⁾。したがって、 i 番目のコンパートメントが漏れをもたなければ ($k_{0i} = 0$)、 $\sum_{j=1}^n a_{ij} \equiv 0$ である。行列 $A(p)$ の非零固定要素のこの従属性により、コンパートメントシステムでは、もはや定理 2 が成立しない。

コンパートメントシステムのシステム構造を表現するコンパートメントグラフの強連結成分は、ほかの強連結成分間との流入出枝の有無によって、ソース、トランジット、シンクに分類される¹²⁾。孤立した強連結成分は定義よりソースともシンクとも考えられる¹²⁾が、ここではシンクと考えることにする。特に、漏れをもたないシンクはトラップと呼ばれる¹²⁾。ここでは、ただ一つのコンパートメントからなるトラップを単純トラップと呼ぶことにする。したがって単純トラップには、ほかの強連結成分からの流入枝をもつ単純トラップと孤立した単純トラップがあることになる。

[補題 3]

「コンパートメントシステムが構造可同定であるためには、そのコンパートメントグラフにおいて、入出力連結でない強連結成分は単純トラップだけでなければならない。」

(証明) 補題 2 とほぼ同様に示すことができるので略す。(証明終)

[補題 4]

コンパートメントグラフ G で表現されるコンパートメントシステム S を考える。 G の入出力連結でないすべての単純トラップを取り除き、単純トラップへの流入枝を漏れとする (したがって、一つのコンパートメントが複数の漏れをもつ場合があるが、複数の漏れのままとする) ことによってできるコンパートメン

Fig. 3 Compartmental system consisting of subsystems S_1 and S_2

トグラフ $\bar{G}$ で表現されるコンパートメントシステムを $\bar{S}$ とする。このとき、 S と $\bar{S}$ の構造可同定性は等価である。」

(証明) S と $\bar{S}$ に対して、(8)式の $\bar{a}(s, \mathbf{p})$, $\bar{b}(s, \mathbf{p})$ は同一であり、したがって、定理 1 の条件 (ii) より、補題の主張は明らかである。(証明終)

補題 3, 4 により、コンパートメントシステムの構造可同定性を考察する場合、本質的には、入出力連結なコンパートメントグラフ構造だけを考えれば十分であることがわかる。

そこで、つぎに、サブシステム間の結合の仕方が全体のコンパートメントシステムの構造可同定性にどのような影響を与えるかを考察する。

まず最初に、容易に推察できるつぎの定理を挙げることができる。

《定理 3》^{13), 15)}

「Fig. 3 のコンパートメントグラフで表現されるコンパートメントシステムを考える。ここで入出力コンパートメントは S_1 に含まれ、 S_1 から S_2 への流出枝 $v_1, \dots, v_s$ の終点は C_2 , S_2 から S_1 への流出枝 $w_1, \dots, w_t$ の終点は C_1 であるとする。このとき、 C_2 を入力コンパートメント、 C_1 を出力コンパートメントとするサブシステム $\bar{S}_2$ (ただし、 C_1 からの流出枝は、漏れを含め、すべて取り除く) が構造可同定でなければ、全体のコンパートメントシステムは構造可同定になり得ない。」

(注 4) 文献 13) では、あるクラスのコンパートメントシステムに限って、定理 2 と同様のことが述べられている。また、定理 3 と対応する結果が文献 15) で示されているが、そこではサブシステム $\bar{S}_2$ の意味が明確でないで、ここで定理 3 として挙げておく。なお、定理 3 の証明は、文献 15) と異なり、定理 1 の条件 (iii) を用いて示すことができるが、ここでは省略する。

さらに、つぎの定理が成り立つ。

《定理 4》

「Fig. 4 のコンパートメントグラフで表現されるコンパートメントシステムを考える。ここで入出力コンパートメントはサブシステム S_1 に含まれ、 S_1 から S_2

Fig. 4 Unidentifiable structure of compartmental systems

への流出枝 $v_1, \dots, v_s$ および S_2 から S_1 への流出枝 $w_1, \dots, w_t$ をもつコンパートメントはすべて漏れをもつものとする。このとき、全体のコンパートメントシステムは構造可同定になり得ない。」

(証明) $n(S_1: n_1$ 次元, $S_2: n_2$ 次元, $n=n_1+n_2$) 次元の T. システムを考える。

一般性を失うことなく、入力コンパートメントを 1 番目、出力コンパートメントを n_1 番目としてよい。このとき、

$$A(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} A_1 & W \\ \downarrow & \downarrow \\ V & A_2 \\ \uparrow & \uparrow \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

であり、 V は $v_1, \dots, v_s$ と零固定要素、 W は $w_1, \dots, w_t$ と零固定要素からなる行列である。

仮定から、 $v_1, \dots, v_s$ および $w_1, \dots, w_t$ の始点のコンパートメントは漏れをもつので、定理 1 の条件 (iii) の $\mathbf{q}$ として、

$$A(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & W \\ -V & 0 \end{pmatrix}$$

なる $\mathbf{q} (\neq 0) \in \mathcal{R}[\mathbf{p}]^r$ が存在する。しかも、簡単な計算から、この $\mathbf{q}$ に対して (11) 式が成立することがわかる。ゆえに、構造可同定になり得ないことを示すことができた。

D. P. システムの場合も同様に示すことができる。

(証明終)

4. あとがき

本論文では、非零固定要素が独立パラメータに関して affine である 1 入力-1 出力構造化システムが構造可同定であるための代数的必要十分条件を新たに与え、これをもとに、グラフ構造的見地から、一般の構造化システムとコンパートメントシステムの構造可同定性を考察した。

本論文での考察により、構造可同定な一般の構造化システムをすべて挙げる事ができた。また、コンパートメントシステムの構造可同定性に関しては

参考文献

- 1) R. Bellman and K. J. Åström: On Structural Identifiability. Math. Bios., **7**, 329/339 (1970)
- 2) K. Glover and J. C. Willems: Parametrizations of Linear Dynamical Systems; Canonical Forms and Identifiability, IEEE Trans. on Automatic Control **AC-19-6**, 640/646 (1974)
- 3) M. S. Grewal and K. Glover: Identifiability of Linear and Nonlinear Dynamical Systems, IEEE Trans. on Automatic Control **AC-21-6**, 833/837 (1976)
- 4) 丹羽：線形定係数系の可同定性，計測自動制御学会論文集，**16-2**，195/202 (1980)
- 5) M. Millanese and N. Sorrentino: Decomposition Methods for the Identifiability Analysis of Large Systems, International. J. of Control, **28-1**, 71/79 (1978)
- 6) C. Cobelli, A. Lepschy and G. Roman-Jacur: Identifiability of Compartmental Systems and Related Structural Properties, Math. Bios., **44**, 1/18 (1979)
- 7) J. Delforge: Necessary and Sufficient Structural Condition for Local Identifiability of a System with Linear Compartments, Math. Bios., **54**, 159/180 (1981)
- 8) 前田，他：コンパートメントシステムの構造可同定性とグラフ構造，計測自動制御学会論文集，**17-4**，455/460 (1981)
- 9) C. T. Lin: Structural Controllability, IEEE Trans on Automatic Control **AC-19-3**, 201/208 (1974)
- 10) 早川，他：線形時不変コンパートメントシステムの構造可制御性，信学論，**J 65-A-4**，371/378 (1982)
- 11) 高木：解析概論，p. 296，岩波書店 (1971)
- 12) 前田：コンパートメントシステムの構造と特性，計測と制御，**20-7**，713/719 (1981)
- 13) 岡野，他：コンパートメントシステムの構造可同定性に関する一考察，信学論，**J 64-A-3**，203/210 (1981)
- 14) J. J. Distefano: On the Relationships between Structural Identifiability and the Controllability, Observability Properties, IEEE Trans. on Automatic Control **AC-22-4**, 652 (1977)
- 15) 岡野，他：線形時不変コンパートメントシステムの構造可同定性，第2回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，39/44 (1979)