重みつき残差法を用いたある一階偏微分 方程式系の近似極配置†

川 田 誠 一*・嘉 納 秀 明*・増 淵 正 美*

Approximate Pole Assignment in Some Class of First Order Partial Differential Equation System by Applying the Method of Weighted Residuals

Seiichi KAWATA*, Hideaki KANOH* and Masami MASUBUCHI*

An approximate pole assignment procedure is proposed for some class of first order partial differential equation system whose transfer function has no bounded poles but bounded poles appear when it is feedback controlled.

As this system is equivalent to a system with delay in control, the finite spectrum assignment procedure by A. Manitius et al. seems to be applicable. However it can not be used for this system, since the equivalent system is found not to be absolute controllable.

The original distributed parameter system is approximated by applying the method of weighted residuals. When a feedback control law derived from the approximate system is applied to the original distributed parameter system, the resulting poles are apt to run into unstable region though the locations of assigned poles are in sufficiently stable region. It is found that this instability can be avoided when the two conjugate poles of the approximate system having the largest imaginary parts are fixed in the original locations and the residual approximate poles are appropriately assigned. Moreover, good pole assignments is obtained when the residual poles are assigned in the right hand side of the pole locations of the approximate system.

1. はじめに

従来、線形集中定数系の制御理論は、線形集中定数系として定式化される一般の系を対象として体系づけられてきた。一方、分布定数系の制御理論については、まだ一般的形で適用できるようにはなってお

ず、ある程度対象を限定して各論的に検討することが必要であると考えられる。

本論文では、単管熱交換器、電線被覆用押出し機、射出成形機など多くの工業プロセスを記述する一階偏微分方程式系¹⁾の近似極配置について検討した。この系は、その伝達関数の特異点として有界な極をもたず、フィードバックを行った閉ループ系において有界な極をもつような分布定数系である。従来、離散的な固有値をもち、解を固有関数展開できるような分布定数系についてモード制御^{2)~4)}や境界入力を用いて固有値制御^{5),6)}を行った研究はあるが、ここで考察したような分布定数系について極配置を検討した研究はほとんど見当たらない。この系の入出力関係だけに着目すれば、入力に遅れをもつむだ時間系として等価に記述できる。このようなむだ時間系の有限極配置について A. Manitius などが^{7)~9)}報告しているが、ここで取り扱う系は任意に有限極配置するための必要十分条件を満たしていないので適用できない。

ここで考察する系を分布定数系として厳密に極配置することが困難であることから、本論文では試行関数としてルジャンドル多項式を用いた重みつき残差法(以下 MWR と略す)による近似系を用いて極配置を行う問題について検討した。試行関数としてルジャンドル多項式を用いた近似が、Walsh 関数やスプライン関数を用いた近似と比較して、低次近似で優れていることが報告されている^{13),14)}。近似系で得たフィードバック則をもとの分布系に適用することは、近似次数と等しい個数の多点フィードバックを適用することになる。このときもとの分布系の閉ループ極がどのように配置されているかは興味ある問題である。ここでは、ある数値例について近似系の極もとの分布系の極を比較した。比較の方法としては、近似系の極を複素平面上のある直線に沿ってつぎつぎと移動させつ

† 第 22 回自動制御連合講演会で発表 (昭 54・10)

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘 2-1

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita (Received June 13, 1981)

(Revised September 9, 1981)

つ配置し、それぞれの極の位置に対応する制御則をもとの分布系に適用し、その系の極の軌跡を描くことにより両者の極配置を比較した。MWR による極の近似と近似次数の関係は、3 次近似から 5 次近似までとし、それぞれの極の移動の状況を比較して検討した。その結果近似系のすべての極を任意に配置すると、もとの分布系では不安定が生ずることがありうることがわかった。これを防止するために、近似系の共役極のうち最も虚数部の大きい極は固定して極配置すれば安定でよりよい極配置ができることがわかった。

2. 一階偏微分方程式系の極

つぎの一階偏微分方程式系で記述される分布定数系のフィードバック制御問題を考える。

$$\frac{\partial \theta(t, l)}{\partial t} + 2 \frac{\partial \theta(t, l)}{\partial l} = -a\theta(t, l) + af(t) \quad (1)$$

$$\theta(t, -1) = 0, \quad -1 \leq l \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

ただし t, l はそれぞれ時間および位置を表わす独立変数であり、 a は定数である。

このような系は各種の熱交換器や化学反応プロセスの多くの例で見られる双曲形プロセスと同様の性格をもち、たとえば熱交換器においては出口温度、化学反応器においては出口濃度というように、空間領域のある集中した点における状態量を制御量とする場合が多い。ここでは (1), (2) の系において制御量を $\theta(t, 1)$ とし、操作量を $f(t)$ とし、制御問題を考えることにする。これは単管熱交換器において制御量を $l=1$ における出口温度、操作量を一様な壁温度操作とした場合に相当する。

いま $f(t)$ と $\theta(t, l)$ の間の関係はつぎの伝達関数で表わすことができる。

$$G(s, l) = \frac{\theta(s, l)}{F(s)} = \frac{a[1 - \exp\{-(s+a)(l+1)/2\}]}{s+a} \quad (3)$$

ただし大文字はラプラス変換した関数を表わす。 $l=1$ の場合が操作量と制御量の間の伝達関数になる。

$G(s, l)$ は分母の零点として $s=-a$ をもつ。ところが次式のように $s=-a$ において $G(s, l)$ は有界となり

$$\lim_{s \rightarrow -a} G(s, l) = \frac{a(l+1)}{2} \quad (4)$$

したがって $s=-a$ は $G(s, l)$ の極ではなく除去可能な特異点であることがわかる。このことから s の有限の値に対して $G(s, l)$ は有界となり、閉ループ伝達関数は有界な極をもたない。

つぎに (3) 式の伝達関数において $l=1$ とし、変数

を (5) 式のように置き換えると (6) 式を得る。

$$X(s) \triangleq \Theta(s, 1) \quad (5)$$

$$(s+a)X(s) = a[1 - \exp\{-(s+a)\}]F(s) \quad (6)$$

$t \leq 0$ において $f(t)=0$ とし (6) 式を逆ラプラス変換すれば次式のような入力に遅れをもつむだ時間系と等価になることがわかる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B_0f(t) + B_1f(t-h) \quad (7)$$

ただし

$$A = -a, B_0 = a, B_1 = -ae^{-a}, h = 1$$

A. Manitius など⁷⁾ は、(7) 式のような入力に遅れをもつむだ時間系に対して、閉ループ系が有限個の極をもつための制御則、および任意に有限極配置できるための必要十分条件を報告している。その必要十分条件とは、入力に遅れをもつむだ時間系が絶対可制御であることであり、絶対可制御であるための必要十分条件は、 $B \triangleq B_0 + e^{-Ah}B_1$ とするとき、対 (A, B) が可制御対であることである⁸⁾。

いま (8) 式のように

$$B = B_0 + e^{-Ah}B_1 = a + e^a(-ae^{-a}) = 0 \quad (8)$$

となるため対 (A, B) は可制御対ではなく、(7) 式の系は絶対可制御ではない。したがって A. Manitius などの方法で任意に有限極配置することができないことがわかった。このように (1), (2) 式の系の厳密な極配置は一般には困難である。

3. 近似極配置

以下の章では (1), (2) 式の系を MWR で近似した系による極配置問題について考察した。MWR によれば分布定数系やむだ時間系を比較的低い次数で精度よく近似できることが、従来いくつかの報告で知られている^{10), 11)} (注 1)。

まず (1), (2) 式の系を MWR で近似する方法を概略的に述べる。

ルジャンドル多項式 $P_i(l)$ を正規化した多項式 $u_{i+1}(l) = \sqrt{(2i+1)/2} P_i(l)$ ($i=0, 1, \dots, N-1$) を用いて、試行関数および重み関数をそれぞれ $(l+1)u(l)$, $u(l)$ とし、つぎの多項式で $\theta(t, l)$ を近似する。

$$\theta^*(t, l) \triangleq (l+1)u^T(l)x(t) \quad (9)$$

ただし N は近似次数、 $x(t)$ は解を試行関数で展開して近似したときの係数を成分とする N 次元ベクトルとし、 $x^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]$, $u^T(l) = [u_1(l), u_2(l), \dots, u_N(l)]$ とする。(T は転置を意味する。)

いま θ の代りに θ^* を用いたことによる残差を R

(注 1) MWR における近似解の厳密解への収束については文献 15), 16) などで検討されている。

とすれば

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + 2 \frac{\partial \theta^*}{\partial l} + a \theta^* - a f(t) \\ &= (l+1) \mathbf{u}^T(l) \dot{\mathbf{x}}(t) + 2 \{ \mathbf{u}^T(l) + (l+1) \dot{\mathbf{u}}^T(l) \} \mathbf{x}(t) \\ &\quad + a(l+1) \mathbf{u}^T(l) \mathbf{x}(l) - a f(t) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで内積を次式で定義し

$$\langle f(l), g(l) \rangle = \int_{-1}^1 f(l) g(l) dl \quad (11)$$

残差 R と重み関数 $\mathbf{u}$ との内積を 0 と置くことにより以下の近似系を得る。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} f(t) \quad (12)$$

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{S}^{-1} (2\mathbf{T} + a\mathbf{S}) \quad (13)$$

$$\mathbf{S} \triangleq \int_{-1}^1 (l+1) \mathbf{u}(l) \mathbf{u}^T(l) dl \quad (14)$$

$$\mathbf{T} \triangleq \int_{-1}^1 \mathbf{u}(l) \frac{d}{dl} \{ (l+1) \mathbf{u}^T(l) \} dl \quad (15)$$

$$\mathbf{b} \triangleq a \mathbf{S}^{-1} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(l) dl = a \mathbf{S}^{-1} [\sqrt{2}, 0, \dots, 0]^T \quad (16)$$

混同を避けるためにこれ以降(1), (2)式の系をもとの分布系, (12)式の系を近似系と呼ぶ。

近似系は線形集中定数系であるから, (12)式の系が可制御であれば次式のような状態フィードバック則を用いて任意の極配置が可能である¹²⁾。

$$f(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) \quad (17)$$

ただしフィードバックゲイン $\mathbf{h}$ は N 次元ベクトルである。(17)式のような状態フィードバック則をもとの分布系に適用するためにつぎのような観測方程式を考える。

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \theta^*(t, l_1) \\ \theta^*(t, l_2) \\ \vdots \\ \theta^*(t, l_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1+1) \mathbf{u}^T(l_1) \\ (l_2+1) \mathbf{u}^T(l_2) \\ \vdots \\ (l_N+1) \mathbf{u}^T(l_N) \end{bmatrix} \mathbf{x} \triangleq \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (18)$$

ただし $l_1, l_2, \dots, l_N$ は観測点を表わす。いま(18)式の行列 $\mathbf{C}$ が正則になるように観測点を選べば $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}$ として観測量と状態量の間の対応がつく。

結局, 近似系で極配置を行い, そこで得た制御則をもとの分布系に適用することは, 次式の制御則を適用することに帰着する。

$$f(t) = \sum_{i=1}^N [\mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1}]_i \theta(t, l_i) \quad (19)$$

ただし $[\mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1}]_i$ はベクトル $\mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1}$ の i 番目の成分を表わす。

4. 多点フィードバックによる閉ループ極

近似系で極配置することにより得られる(19)式のような制御則をもとの分布系に適用することはブロック線図で示せば, Fig. 1 のようになる。これよりもと

Fig. 1 Closed loop system

の分布系の閉ループ伝達関数 $G_f(s, 1)$ を求めると(20)式ようになる。

$$G_f(s, 1) = \frac{a[1 - \exp\{-(s+a)\}]}{H(s)} \quad (20)$$

ただし $H(s)$ は(21)式で定義する。

$$\begin{aligned} H(s) &\triangleq s + a + a \sum_{i=1}^N [\mathbf{h}^T \mathbf{C}^{-1}]_i [1 - \exp\{1 \\ &\quad - (s+a)(l_i+1)/2\}] \end{aligned} \quad (21)$$

さて $G_f(s, 1)$ の分母の零点はつぎの超越代数方程式の解である。

$$H(s) = 0 \quad (22)$$

また $G_f(s, 1)$ の分子の零点はつぎの超越代数方程式の解である。

$$1 - \exp\{-(s+a)\} = 0 \quad (23)$$

(23)式において $s = \sigma + j\omega$ とすると(23)式の解はつぎのように求めることができる。

$$\sigma = -a, \quad \omega = 2n\pi (n=0, 1, \dots) \quad (24)$$

一方(22)式の解は, フィードバック数が多い場合に解析的に求めることは困難であり, ここでは Newton 法を用いて数値的に探索して解を求めた。そして(22)式の解のうち(23)式の解と一致しないものは閉ループ伝達関数 $G_f(s, 1)$ の値を無限大にするので極となる。

5. 極配置の比較

(1), (2)式の系が物理系を記述する場合, パラメータ a は一般に正值である。たとえば単管熱交換器を記述する場合, a は熱通過率に相当し物理的に正值となる。このことを考慮し, かつ計算の便宜上この章以降 $a=1$ とする。

まず開ループ近似系の極を2次近似から6次近似まで Fig. 2 に示した。近似次数が高くなると近似系の極が原点から遠ざかるようすがわかる。このことは, もとの分布系が有界な極をもたないことから, 近似次数の増加と共に近似系の極が無限遠点に近づくものと理解できる。

Fig. 2 Locations of poles for approximated system

した3個の極の組は近似系の開ループ極である。近似系の配置極は図において順に $A, B, \dots, F$ で示したように開ループ近似系の極の形を保ったまま移動させて配置した。それぞれの $A, B, \dots, F$ の配置に対応して制御則が求まり、これらの制御則をもとの分布系に適用した場合の閉ループ極の移動の状況を黒点と実線で示した。実線は $A, B, \dots, F$ などの代表点の中間の極配置も細かく行って求めたものである。小文字 $a, b, \dots, f$ は大文字 $A, B, \dots, F$ にそれぞれ対応する。ただし極の配列が実軸に対して対称であることから、虚部が負の極は省略した。またもとの分布系の閉ループ極は Newton 法で探索して求めたが、実際には無限個存在するので便宜上原点付近にある極だけを示した。

Fig. 3 において対応する極の移動をみると、もとの分布系の極のうち b の組と c の組の間で極の移動が不連続になっていることがわかる。このことを検討するため、近似系の極の配置とフィードバックゲインとの関係を Fig. 4 に示す。Fig. 4 において横軸は近似系の配置極の位置を表わし、縦軸は (19) 式におけ

Fig. 3 Pole loci of distributed system for the various pole assignments in the approximated system ($N=3$)

5.1 全ての極を同時に移動する場合

一例として近似次数が3の場合について、極配置の移動の状況を Fig. 3 を用いて示そう。ただし、(18)式の観測行列 C を正則にする観測点としてここでは $l_1=1.0, l_2=0.2, l_3=-0.4$ を選んだ。図中において $\otimes$ で示

Fig. 4 Feedback gain of approximated system ($N=3$)

るフィードバックゲイン $[h^T C^{-1}]_i$ の値である。図中①で示した実線は $l_1=1.0$ におけるフィードバックゲイン $[h^T C^{-1}]_1$ を、②で示した破線は $l_2=0.2$ におけるフィードバックゲイン $[h^T C^{-1}]_2$ を、③で示した一点鎖線は $l_3=-0.4$ におけるフィードバックゲイン $[h^T C^{-1}]_3$ をそれぞれ表わしている。Fig. 3 において極の配置は不連続になっているが、Fig. 4 のゲインの変化は連続的である。

いま Fig. 3 において $\otimes$ で示した位置に極を配置することを考えてみると、そのような系は開ループそのものとなり、Fig. 4 において $\otimes$ で示したようにフィードバックゲインは零となる。この場合のもとの分布系の伝達関数は (3) 式であり、すでに検討したように有界な極をもっていない。したがって近似系の極を B の位置から $\otimes$ の位置に近づけて配置するにつれて、もとの分布系の極は無限遠点に近づき、また $\otimes$ の位置から C の位置に近づくように配置するにつれて、もとの分布系の極は無限遠点から C の位置に近づく、その結果 Fig. 3 で示したもとの分布系の極の移動に不連続が生じていることになる。

近似次数が4あるいは5の場合についても同様に近似系ともとの分布系の極の移動の状況を描き、それぞれ Fig. 5 および Fig. 6 に示した。ただし $N=4$ の場合の観測点としては、 $l_1=1.0, l_2=0.4, l_3=0.0, l_4=-0.4$ を選び、 $N=5$ の場合の観測点としては、 $l_1=1.0, l_2=0.6, l_3=0.2, l_4=-0.2, l_5=-0.6$ を選んだ。このように観測点を選べば、(18)式の観測行列 C は正則となる。

Fig. 3, Fig. 5, Fig. 6 において A, B で示した近似系の配置極はいずれも $\otimes$ で示した開ループ近似系の極の右側にある。この A, B とそれに対応するも

Fig. 5 Pole loci of distributed system for the various pole assignments in the approximated system ($N=4$)

Fig. 6 Pole loci of distributed system for the various pole assignments in the approximated system ($N=5$)

との分布系の極 a, b を比較する。Fig. 3 で示した $N=3$ の場合にはもとの分布系の極のうち実極だけが近似系で配置した極の近くにあり、ほかの共役極はあまり近くにない。Fig. 5 で示した $N=4$ の場合には虚部の小さいほうの共役極が、Fig. 6 で示した $N=5$ 場合には実極と虚部の小さいほうの共役極の合計 3 個の極が、それぞれ近似系で配置した極に近いところにある。そして近似系の極のうち虚部が最も大きい一組の共役極とそれに対応するもとの分布系の極の位置の差は大きい。すなわち近似系の極のうち虚部の最も大きい共役極はあまりもとの分布系の極の配置と対応していない。そしてほかの $N-2$ 個の近似系の極だけがよくもとの分布系の極の配置と対応していることがわかる。

また近似系の配置極を $\otimes$ で示した開ループ近似系の極よりも左に配置した場合を見ると、近似系の極は

Fig. 7 Pole loci of distributed system for the various pole assignments with complex conjugate poles fixed in the approximated system ($N=3$)

Fig. 8 Pole loci of distributed system for the various pole assignments with other complex conjugate poles fixed in the approximated system ($N=5$)

$C, D, \dots, F$ とつぎつぎに複素平面上を左に移動させて配置しているにもかかわらず、同じ制御則を適用したもとの分布系の極は複素平面上を右側に移動している。そして F で示した近似系の極は複素平面上で最も左側に配置してあるが、それに対応するもとの分布系の極 f の中には不安定側にあるものがある。また近似次数が高くなるほど Fig. 5, Fig. 6 でみられるように、もとの分布系の極が虚軸を通過する周波数は高くなっている。

5.2 一組の共役極を固定して移動する場合

Fig. 7 および Fig. 8 はそれぞれ近似次数が 3 および 5 の場合について開ループ近似系の極のうち虚部が最も大きい一組の共役極は固定し、ほかの極をもとの開ループの極の形を保ったまま $A, B, \dots, F$ とつぎ

Table 1 Closed loop poles of approximated system and distributed system ($N=3$)

Closed loop poles of approximated system	A	-0.9666	B	-4.966	C	-8.966	D	-12.96
Closed loop poles of distributed system	a	-0.9666	b	-5.675	c	-5.172 $\pm 4.154 j$	d	-4.802 ± 4.347

Table 2 Closed loop poles of approximated system and distributed system ($N=5$)

Closed loop poles of approximated system	A	-2.644	B	-6.644	C	-10.64	D	-14.64
		-2.055 $\pm 3.485 j$		-6.055 $\pm 3.485 j$		-10.05 $\pm 3.485 j$		-14.05 $\pm 3.485 j$
Closed loop poles of distributed system	a	-2.640	b	-6.476	c	-9.178 $\pm 3.164 j$	d	-12.48 $\pm 7.809 j$
		-2.225 $\pm 3.419 j$		-5.589 $\pm 3.981 j$		-5.291 $\pm 8.750 j$		-5.815 $\pm 9.263 j$

つぎに移動して配置した場合の近似系の極と、同じ制御則を適用したもとの分布系の極の移動の状況を示したものである。前節と同様小文字 $a, b, \dots, f$ は大文字 $A, B, \dots, F$ にそれぞれ対応する。また観測点も前節と同じ位置に選んだ。

Fig. 7 および Fig. 8 において A, B で示した近似系の極は $\otimes$ で示した開ループ近似系の極の右側に配置してあり、 C, D, E, F で示した近似系の極は左側に配置している。Fig. 7 および Fig. 8 をみれば b と c の間でもとの分布系の極の移動に不連続がある。これは前節と同様 B と C の間に開ループ近似系の極があり、そのような位置に近似系の極を配置した場合には、もとの分布系は有界な極をもたない。その結果もとの分布系の極に不連続が生じているのである。

また開ループ近似系の極の右側に近似系の極を配置した場合には、近似系で配置した極の近くにもとの分布系の極が配置できている。これを数値で示すと **Table 1**, **Table 2** のようになる。Table 1 をみれば、 $N=3$ の場合に A, a はの組から B, b の組において近似系の極ともとの分布系の極が近くにある。Table 2 をみれば、 $N=5$ の場合にも A, a の組から B, b の組において近似系の極ともとの分布系の極が近くにある。

つぎに開ループ近似系の左側に近似系の極を配置した場合を考える。Fig. 6, Fig. 7, Table 1, Table 2 をみればわかるように、近似系の極 C, D, E, F と

との分布系の極 c, d, e, f は近くはない。ただ Fig. 7 と Fig. 8 をそれぞれ Fig. 3 および Fig. 6 と比較すれば、全ての極を移動して極配置した場合には不安定が生じているが、虚部の最も大きい共役極を固定した場合には不安定が生じていないことがわかる。

以上の例から、虚部の最も大きい共役極は固定し、近似次数より 2 個だけ少ない残りの極を、開ループ近似系の極の右側に配置した場合に、大体満足できる極配置ができることがわかった。

さらに Fig. 2 をみれば、近似次数の増加と共に開ループ近似系の極の個数が増し、同時に極の全体が複素平面上を左側に移動している。つまり近似次数を高くすると、Fig. 3, Fig. 5, Fig. 6 などにおける開ループ近似系の極 $\otimes$ の位置が左に移動するので、精度よく配置できる極の個数がふえると同時に、安定に極配置できる領域が広がるといえる。

6. おわりに

本論文では、多くの工業プロセスを記述するある一階偏微分方程式系を MWR で近似して極配置する問題を検討し、一つの極配置則を見出した。検討の結果わかったことは以下のようなことである。

- 1) 考察した系を入出力関係だけに着目して入力に遅れをもつむだ時間系として等価に記述した系は絶対可制御ではなく、したがって A. Manitius などの方法を用いて任意に有限極配置することはできない。
- 2) MWR で近似した系の極を全て同時に移動した場合には、近似系の極を十分安定な位置に配置したにもかかわらずもとの分布系が不安定になる場合がある。
- 3) 開ループ近似極のうち虚部の最も大きい一組の共役極を固定し、残りの極を開ループ近似系の極の右側に配置した場合により極配置ができる。
- 4) 近似系の開ループ極の左側に極を配置した場合にはよい極配置はできない。
- 5) 近似次数を増せば精度よく配置できる極の個数がふえ、同時にすでに示した開ループ近似極の位置が左に移動するので安定に極配置できる領域が広がる。

本研究に関して計算やデータ整理に御協力いただいた大阪大学大学院 山根秀公君に心から感謝いたします。

参考文献

- 1) 増淵, 伊藤: 単管加熱プロセスの多点フィードバック, 日本機械学会論文集, **40**-329, 176/180 (1974)
- 2) L. A. Gould and M. A. Murray-Lasso: On the Modal Control of Distributed Systems with Distributed

- Feedback, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-11-4**, 729/737 (1966)
- 3) B. Porter and A. Bradshaw: Modal Control of a Class of Distributed-Parameter Systems, Int. J. Control, **15-4**, 673/681 (1972)
 - 4) A. Bradshaw and B. Porter: Modal Control of a Class of Distributed-Parameter Systems; Multieigenvalue Assignment, Int. J. Control, **16-2**, 277/285 (1972)
 - 5) S. G. Tzafestas: Eigenvalue Control in Distributed-Parameter Systems Using Boundary Inputs, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-4**, 455/456 (1974)
 - 6) S. G. Tzafestas: Eigenvalue Control in Distributed-Parameter Systems with Parameter Variations, Proc. of the IEEE, **64-9**, 1444/1446 (1976)
 - 7) A. Manitius and A. W. Olbrot: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-24-4**, 541/553 (1979)
 - 8) O. Sebakhy and M. M. Bayoumi: Controllability of Linear Time-Varying Systems with Delay in Control, Int. J. Control, **17-1**, 127/135 (1973)
 - 9) 示村, 山中: むだ時間を含むシステムの諸問題, 計測と制御, **19-11**, 1051/1056 (1980)
 - 10) 嘉納: 重みつき残差法による分布系熱交換器の近似, 計測自動制御学会論文集, **12-6**, 632/636 (1976)
 - 11) 藤川: 重みつき残差法によるむだ時間系の集中定数系近似, **15-5**, 609/615 (1979)
 - 12) W. M. Wonham: On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Systems, IEEE, **AC-12**, 660/665 (1967)
 - 13) 加藤, 嘉納: 重みつき残差法における試行関数の効果, 第18回 SICE 学術講演会予稿集, 57/58 (1979)
 - 14) J. Furusho and H. Kanoh: A Low-Order Model of a Superheater under Large and Fast Load Changes, Proc. 8th IFAC World Congress, (Kyoto), 96. 1 (1981)
 - 15) T. Dupont: Galerkin Methods for First Order Hyperbolics: An example, SIAM J. Numer. Anal. **10-5**, 890/899 (1973)
 - 16) G. W. Hedstrom: The Galerkin Method Based on Hermite Cubics, SIAM J. Numer. Anal. **16-3**, 385/393 (1979)