未知入力を含む線形多変数離散時間系の 可観測性とデッドビート観測器†

原 辰 次*

Observability and Dead-Beat Observers for Discrete-Time Linear Multivariable Systems with Unknown Inputs

Shinji HARA*

New concepts for an unknown input unobservable subspaces and an unknown input observability for discrete-time linear multivariable systems are introduced. These new concepts, namely (r, s) unobservable subspace and $(r, s; K)$ observability, are extensions of conventional one. Algorithms for obtaining the (r, s) unobservable subspace are presented using both matrix and vector-space (geometrical) operations. Necessary and sufficient conditions for $(r, s; K)$ observability are also derived and the relation between this and the canonical form is clarified. It is also shown that there exists a dead-beat K-observer, of which the output coincides with the partial state of the system $Kx(i)$ after some time, if and only if the system is $(r, s; K)$ observable for some integers r and s . An algorithm for constructing this observer is developed in a simple matrix form.

Keyword: discrete-time linear system, observability, dead-beat observer, input-output structure

1. はじめに

未知入力を含む線形多変数系に対する可観測性の研究は、分散制御系への応用という点も含めて実用的な見地から重要であるばかりでなく、システムの入出力構造を明らかにするという点で理論的にも重要である。また、その応用として未知入力観測器に関する研究も大切である。

本論文では、離散時間系を対象に須田¹⁾, Molinari²⁾によって導入された未知入力可観測性・可再生性の概念を拡張した新しい概念、 (r, s) 不可観測部分空間、 $(r, s; K)$ 可観測性、を導入する。これらの概念を用

いて、未知入力を含む線形多変数系に対する可観測性について統一的に述べるとともに、従来の未知入力観測器を包含したデッドビート観測器の存在条件、設計法について考察する。

2章では (r, s) 不可観測部分空間を定義し、それを求めるアルゴリズムについて検討する。3章では $(r, s; K)$ 可観測性を定義し、その必要十分条件について議論する。4章では $(r, s; K)$ 可観測性の座標変換による不変性を利用して正準形との関係を明らかにする。5章では従来の観測器を拡張した新しい形の観測器を導入し、 $(r, s; K)$ 可観測性とデッドビート観測器の存在条件との関係について検討するとともにその設計法についても述べる。

なお本論文では、行列 A の Image (像) を $\text{Im}[A]$, Kernel (核) を $\text{Ker}[A]$ で表わし、像 $A\mathcal{V}$, 逆像 $A^{-1}\mathcal{W}$ をつぎのように定義する。

$$A\mathcal{V} = \{x \mid \text{ある } v \in \mathcal{V} \text{ に対して } x = Av\}$$

$$A^{-1}\mathcal{W} = \{y \mid Ay \in \mathcal{W}\}$$

2. 未知入力不可観測部分空間

未知入力を含む線形離散時間系 $\Sigma_r(A, B, C, D)$:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \end{cases} \quad (1. a)$$

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1. b)$$

ただし、 $x(k) \in \mathbf{R}^n$ は状態、 $u(k) \in \mathbf{R}^m$ は未知入力、 $y(k) \in \mathbf{R}^p$ は出力で、一般性を失うことなく、 $\text{rank}[B^T, D^T] = m$, $\text{rank}[C, D] = p$ とする。

を考え、不可観測部分空間をつぎのように定義する。

【定義 1】 $\Sigma_r(A, B, C, D)$ に対して、

$$\mathcal{L}_{r,s} = \left\{ \xi \left| \begin{array}{l} x(s) = \xi, y_{r+s} = 0 \text{ を満たす} \\ x(0), u_{r+s} \text{ が存在する.} \end{array} \right. \right\}$$

を (r, s) 不可観測部分空間と呼ぶ。ただし、 $u_i, y_i (i = 1, 2, \dots)$ は、それぞれ

$$u_i = [u(0)^T, u(1)^T, \dots, u(i-1)^T]^T \quad (2. a)$$

$$y_i = [y(0)^T, y(1)^T, \dots, y(i-1)^T]^T \quad (2. b)$$

† 第 6 回システムシンポジウムで発表 (昭 55・7)

* 長岡技術科学大学 長岡市上富岡町字長峰 1603-1

* Technological University of Nagaoka, Nagaoka
(Received July 8, 1981)

(Revised November 16, 1981)

で表わされる未知入力列および出力列である。

$(0, s)$ および $(r, 0)$ 不可観測部分空間はそれぞれ Molinari²⁾ の導入した unknown input unconstructible subspace および unknown input unobservable subspace と等しく、それらの拡張となっている。定義よりつぎの関係が成り立つことは明らかである。

$$\mathcal{L}_{0,0} = \mathbf{R}^n, \mathcal{L}_{r-1,s} \supset \mathcal{L}_{r,s}, \mathcal{L}_{r,s-1} \supset \mathcal{L}_{r,s} \quad (3)$$

(r, s) 不可観測部分空間の求め方を行列演算による方法 (定理 1) と幾何学的方法 (定理 2) の二つの方法で与える。なお、これらの結果は Molinari²⁾ の結果と定義 1 から容易に導かれるので証明は省略する。

《定理 1》

$$\mathcal{L}_{r,s} = \text{Ker}[M_r] \cap \text{Im}[N_s] \quad (4)$$

ただし、 M_r, N_s はつぎのアルゴリズムで得られる行列である^{2), 3)}。

[アルゴリズム]

(Step 0) $i=0, M_0=0, N_0=I_n$ と置く。

(Step 1)

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} M_i B & M_i A \\ D & C \end{bmatrix}, \tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} C N_i & D \\ A N_i & B \end{bmatrix} \quad (5)$$

と置き、

$$E_i \Gamma_i \begin{bmatrix} \tilde{V}_i \\ \tilde{W}_i \end{bmatrix}, \tilde{\Gamma}_i \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} \tilde{V}_i & 0 \\ \tilde{W}_i & N_{i+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \quad (6)$$

ただし、 $E_i, \tilde{E}_i$ は正則行列で、 V_i は行フルランク、 $\tilde{V}_i$ は列フルランクをもつ。

を満たすような $E_i, \tilde{E}_i$ を定める。

(Step 2) $i=i+1$ と置き、Step 1 に戻る。

《定理 2》

$$\mathcal{L}_{r,s} = \mathcal{C}\mathcal{V}_r \cap \mathcal{W}_s \quad (7)$$

ただし、

$$\mathcal{C}\mathcal{V}_0 = \mathbf{R}^n, \mathcal{C}\mathcal{V}_{i+1} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{C}\mathcal{V}_i + \text{Im} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

$$\mathcal{W}_0 = \mathbf{R}^n, \mathcal{W}_{i+1} = [A, B] \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{W}_i \\ \mathbf{R}^m \end{bmatrix} \cap \text{Ker}[C, D] \right\} \quad (9)$$

また、定理 2 よりつぎの系が得られる。

[系 1]

$$\mathcal{L}_{n+i,n+j} = \mathcal{L}_{n,n} (i=0, 1, \dots; j=0, 1, \dots) \quad (10)$$

3. 未知入力可観測性

可観測性についても従来の可観測性および可再生性の定義を拡張し、つぎのように定義する。

【定義 2】 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ において、いかなる初

期値 $x(0)$ および未知入力列 u_{r+s} に対しても、出力列 y_{r+s} のみから $Kx(s)$ が一意に決定できるとき、 Σ_p は $(r, s; K)$ 可観測と呼ぶ。ここで、 K は $q \times n$ 行列。

定義 2 より、 $(r, s; K)$ 可観測ならば、 $r' \geq r, s' \geq s, \text{Ker}[K'] \supset \text{Ker}[K]$ に対して $(r', s'; K')$ 可観測であることは明らかである。

本章では、 (r, s, K) 可観測であるための必要十分条件を与える。 $p \cdot i \times n$ 行列 $P_i, p \cdot i \times m \cdot i$ 行列 $Q_i, n \times m(i+j)$ 行列 $S_{i,j} (i=1, 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots)$ を

$$P_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, Q_i = \begin{bmatrix} D & & & \\ & CB & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ CA^{i-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

$$S_{0,j} = 0, S_{i,j} = [A^{i-1}B, \dots, AB, B, 0]$$

と定義すると、行列の階数条件からなる必要十分条件が得られる。

【補題 1】 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; K)$ 可観測であるための必要十分条件は、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} KA^s & KS_{s,r} \\ P_{r+s} & Q_{r+s} \end{bmatrix} = \text{rank} [P_{r+s}, Q_{r+s}] \quad (12)$$

が成立することである。

(証明) (1) 式より、

$$Kx(s) = KA^s x(0) + KS_{s,r} u_{r+s} \quad (13. a)$$

$$y_{r+s} = P_{r+s} x(0) + Q_{r+s} u_{r+s} \quad (13. b)$$

の関係があるので、文献 4) の系 1 を用いることにより証明される。

(証明終)

また、補題 1 と付録の補題 4 より、幾何学的条件が得られる。

《定理 3》 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; K)$ 可観測であるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} \text{Ker}[K] \supset \mathcal{L}_{r,s} &= \text{Ker}[M_r] \cap \text{Im}[N_s] \\ &= \mathcal{C}\mathcal{V}_r \cap \mathcal{W}_s \end{aligned} \quad (14)$$

が成立することである。

4. 正準形と未知入力可観測性との関係

本章では、正準形と可観測性との関係について述べ、特に $K=I_n$ のときにその関係が明白になることを示す。まず、可観測と Σ_p の座標変換との関係を表わす補題と系を与える。

【補題 2】 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; K)$ 可観測であることと、 $\Sigma_p(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ が $(r, s; KT^{-1})$ 可観測であることは等価である。ただし

$$\tilde{A} = T(A + BF + JC + JDF)T^{-1} \quad (15. a)$$

$$\tilde{B} = T(B + JD)G \quad (15. b)$$

$$\tilde{C} = H(C + DF)T^{-1} \quad (15. c)$$

$$\tilde{D} = HDG \quad (15. d)$$

で, T, G, H はそれぞれ $n \times n$, $m \times m$, $p \times p$ 正則行列, F, J はそれぞれ任意の $m \times n$, $n \times p$ 行列.

(証明) (11)式において, A, B, C, D をそれぞれ, $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ に置き換えた行列を $\tilde{P}_i, \tilde{Q}_i, \tilde{S}_{i,j}$ とし,

$$X_{s,r} = \begin{bmatrix} I_q : K(A+JC)^{s-1}J, \dots, KJ, & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \begin{matrix} H \\ HCT, \\ \vdots \\ HC(A+JC)^{r+s-2}J, \dots, HCJ, H \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$d \begin{bmatrix} X_{s,r}^{(11)}, X_{s,r}^{(12)} \\ X_{s,r}^{(21)}, X_{s,r}^{(22)} \end{bmatrix} \quad (16. a)$$

$$Y_{s,r} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ FT^{-1} & G \\ \vdots & \vdots \\ F(A+BF)^{r+s-1}T^{-1} & F(A+BF)^{r+s-2}BG, \dots, FBG, G \end{bmatrix}$$

$$d \begin{bmatrix} Y_{s,r}^{(11)}, Y_{s,r}^{(12)} \\ Y_{s,r}^{(21)}, Y_{s,r}^{(22)} \end{bmatrix} \quad (16. b)$$

とすると,

$$\begin{bmatrix} KT^{-1}\tilde{A}^s, KT^{-1}\tilde{S}_{s,r} \\ \tilde{P}_{r+s}, \tilde{Q}_{r+s} \end{bmatrix} = X_{s,r} \begin{bmatrix} KA^s, KS_{s,r} \\ P_{r+s}, Q_{r+s} \end{bmatrix} Y_{s,r} \quad (17)$$

が成立する. しかしに $X_{s,r}, Y_{s,r}$ は共に正則行列であり, $X_{s,r}^{(21)}$ が零行列であるので,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} KT^{-1}\tilde{A}^s, KT^{-1}\tilde{S}_{s,r} \\ \tilde{P}_{r+s}, \tilde{Q}_{r+s} \end{bmatrix} \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} KA^s, KS_{s,r} \\ P_{r+s}, Q_{r+s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18. a)$$

$$\text{rank} [\tilde{P}_{r+s}, \tilde{Q}_{r+s}] = \text{rank} [P_{r+s}, Q_{r+s}] \quad (18. b)$$

となり, 補題1より証明される. (証明終)

特に $K=I_n$ の場合にはつぎの関係が成立する.

[系2] $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; I_n)$ 可観測であることと, $\Sigma_p(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ が $(r, s; I_n)$ 可観測であることは等価である.

補題2と系2は $(r, s; K)$ 可観測性は, 入出力の座標変換 (G, H), 状態フィードバック (F), 出力の挿入 (J) に対して不変な性質であり, 特に $K=I_n$ の場合には状態の座標変換 (T) に対しても不変な性質であることを示している. したがって, 以下では (15) 式の変換で得られる正準形と可観測性との関係について考えることにする. (15) 式の変換で得られる正準形は,

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & \\ 0 & B_3 \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_1 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_2 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_3 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_4 \end{matrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_1 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_2 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_3 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} n_4 \end{matrix}, \quad D^* = \begin{bmatrix} I_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \alpha \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} p_1 \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} p_2 \end{matrix}$$

(19)

ただし, (A_1, B_1, C_1) は prime, (C_2, A_2) は可観測対, (A_3, B_3) は可制御対, $\alpha = \text{rank}[D]$

で与えられることが知られている^{3), 5)}.

この正準形を用いると可観測性の必要十分条件がつぎのように与えられる.

《定理4》 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; K)$ 可観測であるための必要十分条件は, (19) 式の正準形に変換

するための状態の座標変換行列を T^* とし,

$$KT^{*-1} = [K_1, K_2, K_3, K_4] \quad (20)$$

とするとき, $q \times n_i$ 行列 K_i が

$$\text{rank} \begin{bmatrix} K_1 \\ P_{1,r} \end{bmatrix} = \text{rank} [P_{1,r}] \quad (21. a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} K_2 A_2^s \\ P_{2,r+s} \end{bmatrix} = \text{rank} [P_{2,r+s}] \quad (21. b)$$

$$K_3 = 0 \quad (21. c)$$

$$K_4 A_4^s = 0 \quad (21. d)$$

を満たすことである. ここで,

$$P_{1,i} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{i-1} \end{bmatrix}, \quad P_{2,i} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{i-1} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (22)$$

(証明) $T^*x(k) = [x_1(k)^T, x_2(k)^T, x_3(k)^T, x_4(k)^T]^T$, $x_i(k) \in \mathbf{R}^{n_i} (i=1 \sim 4)$ とする. 出力に表われない x_4 , x_3 に関しては, $K_4 x_4(s) = K_4 A_4^s x(0) = 0$ が成立するときのみ一意に決定でき, $x_3(s)$ は B_3 によって任意に動かせるので $K_3 = 0$ のときのみ $K_3 x_3(s)$ を一意に決定することができる. また, $K_2 x_2(s) = K_2 A_2^s x(0)$ は未知入力行列の影響を受けないので, (21. b) 式が成立するとき一意に決定できる. さらに, (A_1, B_1, C_1) が prime であるので, $K_1 x_1(s)$ は出力列 $y_1(s), y_1(s+1), \dots, y_1(r+s-1)$ によって一意に決定できる. すなわち, (21. a) 式が成立する.

(証明終)

定理4により, つぎの系が容易に導かれる.

[系3] $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; K)$ 可観測であるような非負整数 r, s が存在するための必要十分条件は,

$$K_3 = 0, \quad K_4 A_4^{n_4} = 0 \quad (23)$$

が成立することである。

(証明) (21. a) 式および (21. b) 式の条件は、それぞれ $r \geq n_1$, $r+s \geq n_2$ に対して成立する。よって、(23) 式が成立するとき、 $s \geq n_4$ に対して (21) 式が成立する。逆に $K_4 A_4^{n_4} \neq 0$ ならば、ケーリー・ハミルトンの定理よりどんな s に対しても (21. d) 式は成立しない。(証明終)

これらの結果を用いると、 $K=I_n$ の場合には、つぎのような興味ある結果が得られる。

《定理 5》 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, s; I_n)$ 可観測であるような非負整数 r, s が存在するための必要十分条件は、

(i) $n_3=0$ (Σ_p は左可逆)

(ii) A_4 はベキ零行列 (Σ_p の不変零点は零のみ) が成立することである。さらに、この条件が成立するとき、 $(r, s; I_n)$ 可観測であるための必要十分条件は、

$$r \geq \delta, s \geq \mu, r+s \geq \nu \quad (24)$$

が成立することである。ここで、 δ は (C_1, A_1) の最大可観測指数 ((A_1, B_1) の最大可制御指数に等しい)、 ν は (A_2, C_2) の最大可観測指数、 μ は A_4 のベキ零指数である。

(証明) 定理 4 より、系 3 と同様にして導かれる。

(証明終)

定理 5 より、従来の可観測性および可再生性の条件はつぎのように与えられる。

[系 4] $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(r, 0; I_n)$ 可観測であるような非負整数 r が存在するための必要十分条件は、 Σ_p が、(i) 左可逆 (ii) 不変零点をもたない、ことである。

[系 5] $\Sigma_p(A, B, C, D)$ が $(0, s; I_n)$ 可観測 ($(1, s; I_n)$ 可観測) であるような非負整数 s が存在するための必要十分条件は、

(i) $n_1=0$, すなわち $\text{rank}[D]=m$ (25)

$$\left(\begin{array}{l} \text{(ii) } \text{rank} \begin{bmatrix} D & 0 \\ C B & D \end{bmatrix} - \text{rank}[D] = m \end{array} \right) \quad (26)$$

(iii) Σ_p の不変零点は零のみが成立することである。

5. デッドビート観測器

本章では可観測性とデッドビート観測器との関係について述べる。 $\Sigma_0(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \{\hat{D}_i\}_{i=1}^l)$:

$$\begin{cases} z(k+1) = \hat{A}z(k) + \hat{B}y(k) \end{cases} \quad (27. a)$$

$$\begin{cases} w(k) = \hat{C}z(k) + \hat{D}_1 y(k) + \dots \\ \quad + \hat{D}_l y(k+l-1) \end{cases} \quad (27. b)$$

ただし、 $z(k) \in \mathbf{R}^n$, $w(k) \in \mathbf{R}^q$ で $(\hat{C}, \hat{A})$ は可観測対なるシステムを考え、デッドビート観測器をつぎのよ

うに定義する。

【定義 3】 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ と $\Sigma_0(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \{\hat{D}_i\}_{i=1}^l)$ において、任意の初期値 $x(0), z(0)$, 任意の未知入力 $u(0), u(1), \dots$ に対して、

$$w(i) = Kx(i) \quad (i=j, j+1, \dots) \quad (28)$$

を満たす非負整数 j が存在するとき、 Σ_0 は Σ_p のデッドビート K 観測器と呼ぶ。

この定義は従来の定義、 $l=1$ の場合の拡張となっている。ダイナミック・カバレッジを用いて未知入力に対する観測器を一般的に取り扱った Emre らのそれ⁶⁾とは少し形が異っている。ここでは、 $(r, s; K)$ 可観測性との関係を明らかにするという観点から、デッドビート K 観測器が存在するための必要十分条件を求めるとともにその設計法を与える。

まず準備として、十分条件を与える。

[補題 3]

$$UA - \hat{A}U = \hat{B}C \quad (29. a)$$

$$UB = \hat{B}D \quad (29. b)$$

$$\hat{C}U + \hat{D}_1 P_i = K \quad (29. c)$$

$$\hat{D}_i Q_i = 0 \quad (29. d)$$

$$\hat{A}: \text{ベキ零行列} \quad (29. e)$$

を満たす $n \times n$ 行列 U が存在するならば、 $\Sigma_0(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \{\hat{D}_i\}_{i=1}^l)$ は $\Sigma_p(A, B, C, D)$ のデッドビート K 観測器である。ただし、 $\hat{D}_i = [\hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_i]$ である。

(証明) 未知入力を含まない場合と同様にして示すことができるので省略する。(証明終)

この補題を用いると必要十分条件がつぎのように与えられる。

《定理 6》 $\Sigma_p(A, B, C, D)$ に対して、デッドビート K 観測器が存在するための必要十分条件は、 Σ_p がある非負の整数に対して $(r, s; K)$ 可観測となることである。

(証明) 必要性は定義 2 および 3 より明らかである。十分性は後に示す設計法が実行可能であることと観測器の条件を満たしていることを示すことにより行う。Step 2 において、 (C_2, A_2) が可観測対であるので $A_2 - L_2 C_2$ がベキ零行列となるような L_2 は存在し、 (A_1, B_1, C_1) が prime であるので (33) 式を満たすような $X_i (i=1, \dots, r)$ は存在する。よって、(32) 式は正準形に対して (29) 式の条件を満足している。さらに、Step 3 の実行により (34) 式が Σ_p に対して (29) 式の条件を満たしていることは $U = U^* T$ と置くことにより導かれる。

(証明終)

[デッドビート K 観測器の設計法]

(Step 1) $(r, s; K)$ 可観測システム $\Sigma_p(A, B, C, D)$

を(19)式で与えられる正準形に変換し、さらに

$$A_4 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_4 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \tilde{n}_4 \\ \tilde{n}_4 \end{matrix} \quad (\tilde{A}_4: \text{ベキ零行列}) \quad (30)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} \tilde{K}_4 & 0 \\ \tilde{n}_4 & \tilde{n}_4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

とする。

(Step 2) $\hat{n} = n_2 + \tilde{n}_4$ とし、

$$\begin{aligned} \hat{A}^* &= \begin{bmatrix} A_2 - L_2 C_2 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{C}^* &= \begin{bmatrix} K_2 & \tilde{K}_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_i^* = \begin{bmatrix} 0 & X_i & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (32) \end{aligned}$$

$$U^* = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{n}_4} \end{bmatrix}$$

と置く。ただし、 $A_2 - L_2 C_2$ はベキ零行列、 $X_i (i=1, \dots, r)$ は次式を満たす $q \times p_1 (= q \times m_1)$ 行列。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{r-1} & C_1 A_1^{r-2} B_1 & \dots & C_1 B_1 \end{bmatrix} \\ &= [K_1, 0, \dots, 0] \quad (33) \end{aligned}$$

(Step 3)

$$\hat{A} = \hat{A}^* \quad (34. a)$$

$$\hat{B} = \hat{B}^* H - U^* T J \quad (34. b)$$

$$\hat{C} = \hat{C}^* \quad (34. c)$$

$$\hat{D} = \hat{D}^* X_{0,r}^{(22)-1} \quad (34. d)$$

と変換する。

定理 5 と定理 6 を用いると、連続時間系に対する未知入力状態観測器が存在するための必要十分条件は、(i) Σ_p が左可逆、(ii) Σ_p の不変零点はすべて複素開左半平面に存在、となることが容易にわかる。特に微分器だけで構成される場合は系 4 の条件、(i) Σ_p が左可逆、(ii) 不変零点をもたない、となる。一方、積分器だけで構成される場合は、系 5 の 2 番目の条件を変形した条件、(i) (26) 式が成立、(ii) Σ_p の不変零点はすべて複素開左半平面に存在 (固有値が任意に設定できるためには、(ii)' 不変零点をもたない)、となり、従来の結果⁷⁻¹¹⁾の拡張となっていることがわかる。

6. あとがき

本論文では、未分入力を含む線形離散時間系に対して、従来の可観測性・可再生性の概念を拡張した新しい未知入力可観測性の概念、 (r, s) 不可観測部分空間と $(r, s; K)$ 可観測性、を導入し、それらの関係について議論した。まず、 (r, s) 不可観測部分空間を求めるアルゴリズムを与え、 $(r, s; K)$ 可観測の必要十分

条件を導いた。さらに、 $(r, s; K)$ 可観測性と正準形との関係を明らかにするとともに、この性質がデッドビート K 観測器が存在するための必要十分条件であることを導き、その設計法を示した。これらの結果は、同様な構造をもつ分散制御系への応用が可能である。

終りに、日頃御指導いただく長岡技大 池谷光栄教授、東京工大 古田勝久助教授に感謝いたします。

参考文献

- 1) 須田：線形システムの入出力構造，計測自動制御学会論文集，**11-4**，390/397(1975)
- 2) B.P. Molinari: A Strong Controllability in Linear Multivariable Control, IEEE Trans., **AC-21-5**, 761/764(1976)
- 3) B.P. Molinari: Structural Invariants of Linear Multivariable Systems, Int. J. of Control, **28-4**, 493/510(1978)
- 4) T. Yoshikawa and S.P. Bhattacharyya: Partial Uniqueness: Observability and Input Identifiability, IEEE Trans., **AC-20-5**, 713/714(1975)
- 5) N. Suda and E. Mutsuyoshi: Invariant Zeros and Input-output Structure of Linear, Time-invariant Systems, Int. J. of Control, **28-4**, 525/535(1978)
- 6) E. Emre and L.M. Silverman: K-Observers for Linear Systems with Unknown Inputs, IEEE Trans., **AC-25-4**, 779/782(1980)
- 7) G. Basile and G. Marro: A New Characterization of Some Structural Properties of Linear Systems: Unknown-input Observability, Invertibility and Functional Controllability, Int. J. of Control, **17-5**, 931/943(1973)
- 8) S.H. Wang and E.J. Davison: Observing Partial States for Systems with Unmeasurable Disturbances, IEEE Trans., **AC-23-3**, 481/483(1978)
- 9) S.P. Bhattacharyya: Observer Design for Linear Systems with Unknown Inputs, IEEE Trans., **AC-23-3**, 483/484(1978)
- 10) P. Kudva, N. Viswanadham and A. Ramakrishna: Observers for Linear Systems with Unknown Inputs, IEEE Trans., **AC-25-1**, 113/115(1980)
- 11) 須田：多変数系の無限零点とその応用，第 9 回制御理論シンポジウム資料，255/258(1980)

《付 録》

[補題 4] $n \times m$ 行列 V ， $p \times m$ 行列 W に対して、 $q \times n$ 行列 K が、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} KV \\ W \end{bmatrix} = \text{rank} [W] \quad (A.1)$$

を満たすための必要十分条件は、

$$\text{Ker} [K] \supset V \text{Ker} [W] \quad (A.2)$$

を成立することである。

(証明) (A.1) 式が成立するとき、 $\text{Im} [W^T] \supset \text{Im} [(KV)^T]$ ，すなわち $\text{Ker} [W] \subset \text{Ker} [KV]$ となり、(A.2) 式が導かれる。逆も同様である。(証明終)