境界上に不規則パラメータをもつ確率分布定数 システムの状態推定[†]

砂原善文*・相原伸一*・小島史男*・福和直人**

A. Method of State Estimation for Stochastic Distributed Parameter Systems with Uncertainties on the Boundary

Yoshifumi SUNAHARA*, Shin-ichi AIHARA*, Fumio KOJIMA* and Naoto FUKUWA**

The purpose of this paper is to solve the filtering problem for distributed parameter systems where system uncertainties exist on the system boundary. The mathematical model of the system is firstly described by a stochastic integral equation with values in Hilbert spaces.

Secondly, the nonlinear filter dynamics is derived with the aid of martingale representation technique. In order to realize the filter dynamics, an approximated version by invoking Gaussian assumptions is discussed.

Finally, for the purpose of supporting the theoretical development established here, digital simulation experiments are demonstrated.

Keyword: stochastic distributed parameter system, stochastic integral equation, state estimation, martingale representation theorem, Gaussian approximation

1. 緒言および問題設定

一般に実在システムの境界における特性のモデル化は、システムの複雑な構造や、また境界におけるシステムの物理的特性のランダムな変化などのため非常に難しい問題である^{1), 2)}。1例を化学反応炉内の温度分布にとって、システムおよび境界の数学モデルをつくってみよう。まずシステム内部の温度分布はつぎの熱拡散方程式で与えられる。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) = f(t, x),$$

[†] 第7回制御理論シンポジウムで発表 (昭 53・5)

* 京都工芸繊維大学工学部 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

** 松下電器産業(株) 門真市大字門真 1006

* Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

* Matsushita Denki Sangyo, Ltd., Osaka

** (Received August 8, 1981)

** (Revised December 10, 1981)

$$((t, x) \in T \times G) \quad (1.1a)$$

ただし t は時間, x は位置を表わす変数であり, さらに $T =]0, t_f[$, $G =]0, 1[$ である。上式において状態量は温度を表わし, 係数 $a(t, x)$ は熱拡散係数を表わす。さらに初期条件は

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in G) \quad (1.1b)$$

とする。つぎに $x=0$ および $x=1$ における境界条件のモデル化を考える。原子炉や化学反応炉における炉壁においては, 内部の温度が上昇しすぎないように冷却水が流れている。このような冷却システムはニュートンの冷却法則によって

$$-a(t, 0) \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + k_0(t)(u(t, 0) - g_0(t)) = 0$$

$$a(t, 1) \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} + k_1(t)(u(t, 1) - g_1(t)) = 0$$

$$(t \in T) \quad (1.1c)$$

のように表現されることが知られている。ここでシステムの分布入力 f と境界入力 $g = \{g_0, g_1\}$ はそれぞれシステム内部での発熱項, および冷却系における冷却水の温度に相当する。境界条件に含まれるパラメータ $\{k_0, k_1\}$ は熱伝達係数と呼ばれており, 冷却系における流体の成分やその流れの性質, またシステムの構造などに依存して決定されるが, たとえば冷却水中で沸騰が起って気泡が生じているような場合, 熱伝達係数 $k_i(t)$ ($i=0, 1$) はランダムな変化を伴うとみなしてよい。本論文においては熱伝達係数が時間に依存して変化する確定的な成分, すなわちトレンドと, そのまわりでの不規則変動の和とで

$$k_i(t) = \bar{b}_i^d(t) + b_i^s(t)w_i(t) \quad (i=0, 1) \quad (1.2)$$

のように表わされるものとする。ただし, $\bar{b}_i^d(t)$ および $b_i^s(t)$ は時間に依存した確定的係数, $w(t) = \{w_0(t), w_1(t)\}$ は相互独立な標準ブラウン運動過程であり, “ $\cdot$ ” はその形式的時間微分を表わす。(1.2) 式を (1.1c)

式を用いると境界条件は次式となる。

$$\begin{aligned} -a(t, 0) \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + \{b_0^d(t) + b_0^s(t) w_0(t)\} (u(t, 0) \\ - g_0(t)) = 0 \\ a(t, 1) \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} + \{b_1^d(t) + b_1^s(t) w_1(t)\} (u(t, 1) \\ - g_1(t)) = 0 \end{aligned} \quad (1.1c')$$

本論文においては、(1.1a), (1.1b), (1.1c') 式で与えられる確率分布定数システムの状態推定について考察する。筆者らはすでにシステムが、その内部領域に不規則パラメータを含む場合の分布定数システムに関する状態推定、最適制御問題についての研究を報告したが^{3)~6)}、本論文で取り扱おうとするシステムのように境界に不規則要因が存在する場合は、この境界条件を巧くシステム特性を表わす偏微分方程式の中に取り込むことを考えねばならない。次章においてこの方法を述べるに先立ち、以下に主な記号を定義しておく。

$(Q, \mathcal{F}, P)$; 基礎確率空間

$L^2(X)$; X 上で 2 乗可積分な関数の全体

$L^\infty(X)$; X 上で本質的に有界な関数の全体

$C(X)$; X 上で連続な関数の全体

$\mathcal{L}(X; Y)$; X から Y への線形連続写像

$L^2(X; Y)$, $L^\infty(X; Y)$, $C(X; Y)$; X 上で定義され

Y 上で値をとるおのおの t につきのような関数の全体

$$L^2(X; Y) = \{\phi | \int_X \|\phi(s)\|^2_Y ds < \infty\}$$

$$L^\infty(X; Y) = \{\phi | \operatorname{esssup}_{s \in X} \|\phi(s)\|_Y < \infty\}$$

$$C(X; Y) = \{\phi | \sup_{s \in X} \|\phi(s)\|_Y < \infty\}$$

ただし $\|\cdot\|_Y$ は Y に関するノルムを表わす。

V, H, V^*, Γ ; 特に $V = H^1(G)$, $H = L^2(G)$, $\Gamma = L^2(\partial G)$ を表わす。ただし ∂G は G の境界であり本論文では $\partial G = \{0, 1\}$ である。また $H^1(G)$ は指数 1 のソボレフ空間⁷⁾であり V^* は $H^1(G)$ の双対空間を表わす。ヒルベルト空間 H, Γ での内積は、

$$(\phi, \psi) = \int_0^1 \phi(x) \psi(x) dx$$

$$(\phi, \psi)_\Gamma = \phi(1)\psi(1) + \phi(0)\psi(0)$$

で与える。

$\phi \otimes \psi$; $\phi \in X$ と $\psi \in Y$ との外積を表わす。具体的には $\phi \otimes \psi = \phi(\cdot, \cdot)_Y ((\cdot, \cdot)_Y$ は Y 上での内積) で定義される Y から X への核型作用素 (nuclear operator) である。特に $X = H, Y = \Gamma$ のときは $\phi \odot \psi$ と書いて区別する。

2. システムの数学モデル

本章では、まず (1.1) 式を変分形式⁷⁾に書き改めること

を考える。(1.1a) 式に、 V に属する任意の関数 $\phi(x)$ を乗じ、さらに $]0, t[\times G$ 上で積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(t, x) \phi(x) dx - \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(a(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \right) \\ \cdot \phi(x) dx ds \\ = \int_0^1 u_0(x) \phi(x) dx + \int_0^t \int_0^1 f(s, x) \phi(x) dx ds \\ (t \in T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1) 式の第 2 項について、 x に関して部分積分を行い、(1.1c') 式の関係を用いることによって、(2.1) 式はつぎの確率積分方程式で記述できる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(t, x) \phi(x) dx + \int_0^t \int_0^1 a(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} dx ds \\ + \int_0^t [b_1^d(s)(u(s, 1) - g_1(s))\phi(1) \\ + b_0^s(s)(u(s, 0) - g_0(s))\phi(0)] ds \\ + \int_0^t b_1^s(s)(u(s, 1) - g_1(s))\phi(1) dw_1(s) \\ + \int_0^t b_0^d(s)(u(s, 0) - g_0(s))\phi(0) dw_0(s) \\ = \int_0^1 u_0(x) \phi(x) dx + \int_0^t \int_0^1 f(s, x) \phi(x) dx ds \\ (t \in T) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ただし境界条件中のブラウン運動の時間微分を含む項は上式左辺第 4, 5 項のような確率積分に置き換えた(注 1)。つぎに (2.2) 式の解の存在と一意性について考えよう。そのためにまず関数空間上での作用素 $A(t), B_d(t)$ をつぎのように定義する。 V に属する任意の ϕ, ψ に関し、

$$\langle A(t)\phi, \psi \rangle \triangleq \int_0^1 a(t, x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} dx \quad (t \in \bar{T}) \quad (2.3)$$

と定義する。このとき

$$(C-2.1) \quad a \in L^\infty(T \times G)$$

であれば、(2.3) 式の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $V \times V^*$ 上の双 1 次形式⁷⁾である。このとき作用素 $A(t)$ は $L^\infty(T; \mathcal{L}(V; V^*))$ に属する線形作用素である。また作用素 $B_d(t)$ を、 Γ 上での内積を用いて、

$$(B_d(t)\phi, \psi)_\Gamma \triangleq b_1^d(t)\phi(1)\psi(1) + b_0^d(t)\phi(0)\psi(0) \\ (\phi, \psi \in V) \quad (2.4)$$

のように定義する。さらに係数 $b_i^d(t)$ ($i=0, 1$) につ

(注 1) 本論文においては正規性白色雑音から確率積分に置き換えるとき Wong & Zakai の修正項⁸⁾については考慮しない。修正項を考慮したシステムモデルにおいては解の存在および一意性を保証する際、システムのもつパラメータ間の係数条件に新たな問題が生じてくる。これについては別の機会に譲る。

いて

$$(C-2.2) \quad b_i(t) \in L^\infty(T) \quad (i=0, 1)$$

を仮定すれば $B_d(t)$ は, $L^\infty(T; \mathcal{L}(\Gamma; \Gamma))$ の要素である. つぎに (2.2) 式に含まれる確率積分を関数空間上で定義することにしよう. $w(t) = \{w_0(t), w_1(t)\}$ に関する Γ で値をもつ確率積分を

$$I_B(t; \phi) \triangleq \int_0^t [B_s(s)\phi(s)]dw(s) \\ (\phi \in L^2(T \times \Omega; V)) \quad (2.5)$$

とする. (2.5) 式の Γ 上での内積は

$$(I_B(t; \phi), \psi)_\Gamma = \int_0^t b_1^s(s)\phi(s, 1)\psi(1)dw_1(s) \\ + \int_0^t b_0^s(s)\phi(s, 0)\psi(0)dw_0(s) \quad (2.6)$$

の形をとる. この確率積分がつぎの性質を満足することは容易に確かめられる.

[補題 1]^{6), 10)} 係数 $b_i^s(t)$ ($i=0, 1$) が

$$(C-2.3) \quad b_i^s \in L^\infty(T) \quad (i=0, 1)$$

を満足するなら, 任意の $\phi \in L^2(T \times \Omega; V)$ に関して確率積分 (2.5) 式は $L^2(T \times \Omega; V) \cap L^2(\Omega; C(\bar{T}; H))$ の要素であり, つぎの性質を満足する.

$$(P-2.1) \quad E\{\|I_B(t; \phi)\|^2_\Gamma\} \\ = E\left\{\int_0^t \|B_s(s)\phi(s)\|^2_\Gamma ds\right\} \\ (P-2.2) \quad E\{([I_B(t; \phi_1) \odot I_B(t; \phi_2)]\phi_1, \phi_2)_\Gamma\} \\ = E\left\{\int_0^t ([B_s(s)\phi_1(s) \odot B_s(s)\phi_2(s)] \right. \\ \left. \times \phi_1, \phi_2)_\Gamma ds\right\}$$

ただし作用素 $B_s(t)$, $B_s(t)\phi_1(t) \odot B_s(t)\phi_2(t)$ はそれぞれつぎのように与えられる作用素である.

$$(B_s(t)\phi_1, \phi_2)_\Gamma = b_1^s(t)\phi_1(1)\phi_2(1) + b_0^s(t)\phi_1(0)\phi_2(0) \quad (2.7)$$

$$([B_s(t)\phi_1(t) \odot B_s(t)\phi_2(t)]\phi_1, \phi_2)_\Gamma \\ = [(b_1^s(t))^2\phi_1(t, 1)\phi_2(t, 1)]\phi_1(1)\phi_2(1) \\ + [(b_0^s(t))^2\phi_1(t, 0)\phi_2(t, 0)]\phi_1(0)\phi_2(0) \quad (2.8)$$

以上の準備のもとに (2.2) 式を変分形式で表わせばつぎようになる.

$$(u(t), \phi) + \int_0^t \langle A(s)u(s), \phi \rangle ds \\ + \int_0^t (B_d(s)(u(s) - g(s)), \phi)_\Gamma ds \\ + \int_0^t ([B_s(s)(u(s) - g(s))]dw(s), \phi)_\Gamma \\ = (u_0, \phi) + \int_0^t (f(s), \phi) ds \quad (2.9)$$

つぎの定理は (2.9) 式の解過程 $u(t)$ の存在および一意

性を保証するものである.

《定理 1》 条件 (C-2.1) ~ (C-2.3) につぎの条件を付加する.

$$(C-2.4) \quad a(t, x) > \alpha > 0 \quad ((t, x) \in \bar{T} \times \bar{G})$$

$$(C-2.5) \quad f \in L^2(T \times \Omega; H), g_i \in L^2(T \times \Omega) \\ (i=0, 1)$$

$$(C-2.6) \quad u_0 \in L^2(\Omega; H)$$

ただし $\bar{T} = [0, t_f]$, $\bar{G} = [0, 1]$ である. このとき (2.9) 式の解過程は $L^2(T \times \Omega; V) \cap L^2(\Omega; C(\bar{T}; H))$ において唯一連続解が存在する. (証明は付録参照)

3. 観測機構

システムの出力を $H(t)u(t)$ のように記述する. 作用素 $H(t)$ を任意の $\phi \in V$ に対し

$$H(t)\phi = \begin{cases} \int_{G_0} h_d(t, x)\phi(x)dx & (G_0 \subset G) \\ h_p(t)\phi(x_p) & (x_p \in G) \end{cases} \quad (3.1) \text{ (注 2)}$$

とする. (3.1) 式の定義において

$$(C-3.1) \quad h_d \in L^\infty(T \times G) \quad h_p \in L^\infty(T)$$

を仮定すると, 作用素 $H(t)$ は $L^\infty(T; \mathcal{L}(V; R^1))$ の要素である. このとき観測機構の数学モデルをつぎのスカラ方程式で記述する.

$$y(t) = \int_0^t H(s)u(s)ds + \int_0^t r(s)de(s) \quad (3.2)$$

ただし上式の右辺第 2 項は観測ノイズを意味する.

(3.2) 式において, (C-3.1) のほかに以下の条件を仮定する.

(C-3.2) $e(t)$ は $w(t)$ と独立な 1 次元標準ブラウン運動過程である.

$$(C-3.3) \quad 0 < \beta_1 < r(t) < \beta_2 \quad (t \in T)$$

《定理 2》 条件 (C-3.1) ~ (C-3.3) のもとで, 一意で連続な観測データが $L^2(\Omega; C(\bar{T}))$ において存在する (証明は容易であるので省略する).

4. 状態推定

本章では, (3.2) 式によって入手される観測データに基づいて, (2.9) 式で記述されるシステムの解 $u(t)$ の最小分散推定を求める問題を考える. 定理 1 から $E\{\|u(t)\|^2\} < \infty$ ($t \in \bar{T}$) であるので, $u(t)$ の最小分散推定は $\mathcal{Y}_t = \sigma\{y(s); 0 \leq s \leq t\}$ に関する $u(t)$ の条件付期待値

$$\hat{u}(t) = E\{u(t) | \mathcal{Y}_t\} \quad (4.1)$$

となる. そこで以下ではまず $\hat{u}(t)$ に関する確率積分

(注 2) (3.1) 式の積分は分布観測機構を意味し, 下の式は点観測, 特に $x_p = 0, 1$ にとった場合は境界観測機構を意味する.

方程式をマルチンゲールの表現定理^{9),10)}を用いて求めよう。本章においては条件(C-2.1)~(C-2.6), (C-3.1)~(C-3.3)のほかに, さらに分布入力 $f(t)$, 境界入力 $g(t)$ はいずれも $\mathcal{Q}_t$ -可測な関数であると仮定する。

【補題2】 つぎの確率過程を定義する。

$$\begin{aligned} (m(t), \phi) \triangleq & (\hat{u}(t), \phi) + \int_0^t \langle A(s)\hat{u}(s), \phi \rangle ds \\ & + \int_0^t \langle B_d(s)(\hat{u}(s) - g(s)), \phi \rangle \Gamma ds - \int_0^t \langle f(s), \phi \rangle ds \end{aligned} \quad (4.2)$$

このとき $\{m(t), \mathcal{Q}_t\}_{t \in T}$ は H で値をとる L^2 -マルチンゲール⁹⁾ である。

【補題3】 確率過程 $l(t)$ を次式で与える。

$$l(t) \triangleq \int_0^t r^{-1}(s) dy(s) - \int_0^t r^{-1}(s) H(s) \hat{u}(s) ds \quad (4.3)$$

このとき $\{l(t), \mathcal{Q}_t\}_{t \in T}$ は標準スカラーウィナー過程であり, $\mathcal{Q}_t$ と $\sigma\{l(s_2) - l(s_1); t < s_1 < s_2 < t_f\}$ は独立である。

上記二つの補題は文献 9), 10) と同様の手法を用いれば容易に証明することができるので, 証明の記述は省略する。補題 2, 3 を用いて, $\hat{u}(t)$ に関する確率積分方程式が以下の定理として得られる。

《定理3》 汙波過程 $\hat{u}(t) = E\{u(t) | \mathcal{Q}_t\}$ は, つぎの確率積分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} (\hat{u}(t), \phi) + \int_0^t \langle A(s)\hat{u}(s), \phi \rangle ds \\ + \int_0^t \langle B_d(s)(\hat{u}(s) - g(s)), \phi \rangle \Gamma ds \\ = (\bar{u}_0, \phi) + \int_0^t \langle f(s), \phi \rangle ds \\ + \int_0^t \langle [r^{-1}(s)H(s)P(s)\phi] dl(s), \phi \rangle ds \quad (\phi \in V) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ただし $\bar{u}_0, P(t)$ はおのおの次式で定義される。

$$\bar{u}_0 \triangleq E\{u_0\} \quad (4.5)$$

$$P(t) \triangleq E\{(u(t) - \hat{u}(t)) \otimes (u(t) - \hat{u}(t)) | \mathcal{Q}_t\} \quad (4.6)$$

(証明) マルチンゲールの表現定理^{9),10)}を用いることにより, L^2 -マルチンゲール $m(t)$ は

$$(m(t), \phi) = (E\{m(0)\}, \phi) + \int_0^t \langle \Psi(s)\phi \rangle dl(s) \quad (4.7)$$

によって表現できる。 $\Psi(t)$ は H から R^1 への核型作用素である。(4.2)式より $E\{m(0)\} = \bar{u}_0$ に注意すれば, (4.4)式を示すためには

$$\Psi(t) = r^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (4.8)$$

であることを確かめるだけで充分である。簡単のため

$$\alpha\phi(t; u, g, f) = \langle A(t)u(t), \phi \rangle$$

$$+ \langle B_d(t)(u(t) - g(t)), \phi \rangle \Gamma - \langle f(t), \phi \rangle \quad (4.9)$$

と置く。さらに $t \in T$ で確率1で一様有界かつ $\mathcal{Q}_t$ -可測な任意の確率過程 $\lambda(t)$ を導入し, その $l(t)$ に関する確率積分を

$$z(t) \triangleq \int_0^t \lambda(s) dl(s) \quad (4.10)$$

と置く。このとき補題3および(4.7), (4.10)式から

$$E\{(m(t), \phi)z(t)\} = E\left\{\int_0^t \lambda(s) [\Psi(s)\phi] ds\right\} \quad (4.11)$$

となる。一方 $z(t)$ -過程は L^2 -マルチンゲールであるから,

$$\begin{aligned} E\{(m(t), \phi)z(t)\} \\ = E\left\{[\langle u(t), \phi \rangle + \int_0^t \alpha_\phi(s; u, g, f) ds] z(t)\right\} \\ - E\left\{\int_0^t \alpha_\phi(s; u, g, f) (z(t) - z(s)) ds\right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。(4.3)式の定義より

$$\begin{aligned} z(t) = \int_0^t \lambda(s) de(s) \\ + \int_0^t \lambda(s) r^{-1}(s) H(s) (u(s) - \hat{u}(s)) ds \end{aligned} \quad (4.13)$$

と変形できる。そこでこの関係をまず(4.12)式の右辺第1項に代入して, 少々複雑な計算を施すことにより

$$\begin{aligned} E\left\{[\langle u(t), \phi \rangle + \int_0^t \alpha_\phi(s; u, g, f) ds] z(t)\right\} \\ = E\left\{\int_0^t \lambda(s) r^{-1}(s) H(s) (u(s) - \hat{u}(s)) \langle u(s), \phi \rangle ds\right\} \\ + E\left\{\int_0^t \alpha_\phi(s; u, g, f) \right. \\ \left. \times \left[\int_s^t \lambda(\tau) r^{-1}(\tau) H(\tau) (u(\tau) - \hat{u}(\tau)) d\tau\right] ds\right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

を得る。つぎに(4.12)式の右辺第2項は(4.13)式から

$$\begin{aligned} E\left\{\int_0^t \alpha_\phi(s; u, g, f) (z(t) - z(s)) ds\right\} \\ = E\left\{\int_0^t \alpha_\phi(s; u, g, f) \right. \\ \left. \times \left[\int_s^t \lambda(\tau) r^{-1}(\tau) H(\tau) (u(\tau) - \hat{u}(\tau)) d\tau\right] ds\right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。(4.14)式および(4.15)式の関係を(4.12)式に代入すると, 結局次式を得る。

$$\begin{aligned} E\{(m(t), \phi)z(t)\} \\ = E\left\{\int_0^t \lambda(s) r^{-1}(s) H(s) (u(s) - \hat{u}(s)) \langle u(s), \phi \rangle ds\right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$\lambda(s)r^{-1}(s)H(s)$ および ψ は $\mathcal{Q}_t$ -可測であることに注意すれば (4.16) 式の右辺は

$$E \left\{ \int_0^t \lambda(s)r^{-1}(s)H(s)E \{ (u(s)-\hat{u}(s)) \otimes u(s) | \mathcal{Q}_s \} \psi ds \right\} \\ E \{ (m(t), \psi)z(t) \} \\ = E \left\{ \int_0^t \lambda(s)[r^{-1}(s)H(s)P(s)]\psi ds \right\} \quad (4.17)$$

を得る。(4.11)式と(4.17)式を比較することにより、任意の $\lambda(t)$ に対してほとんどいたるところの t について確率1で(4.8)式の関係が示せる。(4.2)式と(4.8)式の関係(4.7)式に代入すれば直ちに(4.4)式が導出される。(証明終り)

つぎに誤差共分散作用素 $P(t)$ および2乗モーメント作用素 $Q(t) \triangleq E \{ u(t) \otimes u(t) | \mathcal{Q}_t \}$ も同様に求めることができる。その結果を以下にまとめる。

〔系1〕 任意の作用素 $\Phi \in L^\infty(T; \mathcal{L}(*; H))$ に関して

$$\overline{P(t)\Phi(t)} \triangleq E \{ u(t) - \hat{u}(t) | (\Phi(t)(u(t) - \hat{u}(t)), \cdot) | \mathcal{Q}_t \} \\ \overline{Q(t)\Phi(t)} \triangleq E \{ u(t) | (\Phi(t)u(t), \cdot) | \mathcal{Q}_t \}$$

を導入する。ただし $*$ は任意のヒルベルト空間である。このとき $P(t)$ と $Q(t)$ はつぎの確率積分方程式を満足する。

$$(P(t)\psi_1, \psi_2) + \int_0^t \{ \langle A(s)P(s)\psi_1, \psi_2 \rangle \\ + \overline{(P(s)A(s)\psi_1, \psi_2)} \} ds \\ + \int_0^t \{ (B_d(s)P(s)\psi_1, \psi_2)r + \overline{(P(s)B_d(s)\psi_1, \psi_2)} \} ds \\ + \int_0^t \overline{(P(s)H(s)(r(s))^{-2}H(s)P(s)\psi_1, \psi_2)} ds \\ = (P(0)\psi_1, \psi_2) + \int_0^t (B_s(s)\overline{Q(s)B_s(s)\psi_1, \psi_2})r ds \\ - \int_0^t \{ ([B_s(s)g(s) \odot B_s(s)\hat{u}(s)]\psi_1, \psi_2)r \\ + ([B_s(s)\hat{u}(s) \odot B_s(s)g(s)]\psi_1, \psi_2)r \\ - ([B_s(s)g(s) \odot B_s(s)g(s)]\psi_1, \psi_2)r \} ds \\ + \int_0^t H(s)E \{ (u(s) - \hat{u}(s))(u(s) - \hat{u}(s)) \\ \times (u(s) - \hat{u}(s), \psi_1), \psi_2 | \mathcal{Q}_s \} r^{-1}(s)dl(s) \} \quad (4.18) \\ (Q(t)\psi_1, \psi_2) + \int_0^t \{ \langle A(s)Q(s)\psi_1, \psi_2 \rangle \\ + \overline{(Q(s)A(s)\psi_1, \psi_2)} \} ds \\ + \int_0^t \{ (B_d(s)Q(s)\psi_1, \psi_2)r + \overline{(Q(s)B_d(s)\psi_1, \psi_2)} \\ - (B_s(s)\overline{Q(s)B_s(s)\psi_1, \psi_2})r \} ds \\ = (Q(0)\psi_1, \psi_2) + \int_0^t \{ ([f(s) \otimes \hat{u}(s)]\psi_1, \psi_2) \\$$

$$+ ([\hat{u}(s) \otimes f(s)]\psi_1, \psi_2) \} ds \\ + \int_0^t \{ ([B_d(s)g(s) \otimes \hat{u}(s)]\psi_1, \psi_2)r \\ + ([\hat{u}(s) \odot B_d(s)g(s)]\psi_1, \psi_2) \} ds \\ - \int_0^t \{ ([B_s(s)g(s) \odot B_s(s)\hat{u}(s)]\psi_1, \psi_2)r \\ + ([B_s(s)\hat{u}(s) \odot B_s(s)g(s)]\psi_1, \psi_2)r \\ - ([B_s(s)g(s) \odot B_s(s)g(s)]\psi_1, \psi_2)r \} ds \\ + \int_0^t H(s)E \{ (u(s) - \hat{u}(s))(u(s) - \hat{u}(s), \psi_1), \psi_2 \\ | \mathcal{Q}_s \} r^{-1}(s)dl(s) \} \quad (4.19)$$

〔系1〕の結果からわかるように誤差共分散作用素 $P(t)$ の動特性には $l(t)$ -過程に関する高次モーメントの確率積分項が現れるので(4.4)式を解くことはできない。ところでわれわれが考えているのは最小分散推定であるので2次までの確率モーメントでの最適な推定を考えているにほかならない。したがって(4.18), (4.19)式で発生してくる3次モーメント以上の動特性を順次求めていってもほとんど意味をもたない。つまりこの濾波器を実現するためには(4.18), (4.19)式の3次モーメントをなんらかの形で無視する以外ほかに方法がない。このような理由で本論文ではその近似手段として、集中定数システムで用いられているガウス近似を導入しよう。いま $\{u(t) - \hat{u}(t)\}_{t \in T}$ の分布がガウス型であれば

$$E \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (u(t) - \hat{u}(t), \varphi_i)^3 \right\} = 0 \quad (4.20)$$

である¹¹⁾。ただし $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ は V からつくられる H 上の正規直交基底とする。このとき、(4.20)の関係より、(4.18)式の最後の確率積分は零となる。また(4.19)式の最後の確率積分は

$$\int_0^t \{ ([\overline{P(s)H(s)r^{-1}(s)}dl(s) \otimes \hat{u}(s)]\psi_1, \psi_2) \\ + ([\hat{u}(s) \otimes \overline{P(s)H(s)r^{-1}(s)}dl(s)]\psi_1, \psi_2) \}$$

に置き換わる。この近似により $\{\hat{u}(t), P(t), Q(t)\}$ を連立させて推定値が計算可能となる。具体的な計算法については次章の数値実験において明らかにする。

5. 数値実験

数値実験におけるシステムのパラメータ、熱伝導率 $a(t, x)$ および熱伝達率 $k_0(t), k_1(t)$ はいずれも以下のように与える。

$$a(t, x) = a(>0) \quad k_i(t) = b^a + b^* \dot{w}_i(t) \quad (i=0, 1)$$

ただし a, b^a, b^* はいずれも定数である。また反応炉内における発熱項および冷却水の温度に相当する入力 f, g はそれぞれつぎのような確定関数、確定値で与える。

$$f(t, x) = f(x) = (1 + 5 \sin \pi x) \times 10^{-2}$$

$$g_0(t) = g_1(t) = \bar{g}$$

このとき数値実験におけるシステムは

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x) \quad ((t, x) \in T \times G) \quad (5.1a)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in G) \quad (5.1b)$$

$$-a \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} + (b^d + b^s \dot{u}_0(t))(u(t, 0) - \bar{g}) = 0 \quad (t \in T) \quad (5.1c)$$

$$a \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} + (b^d + b^s \dot{u}_1(t))(u(t, 1) - \bar{g}) = 0$$

となる。観測データはセンサーを $[x_1, x_2]$ においてスキャンさせることにより取得されるとする。このとき観測機構は

$$y(t) = h \int_0^t \left[\int_{x_1}^{x_2} u(s, x) dx \right] ds + re(t) \quad (5.2)$$

で与えられる。 h および r はいずれも定数である。前章の結果に基づいて、ガウス近似により準最適フィルターの形を関数空間表示ではなくもとの偏微分方程式での表現で求めてみる。 $\hat{u}(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ は V に属する任意の ϕ, ϕ_1, ϕ_2 に対し

$$(\hat{u}(t), \phi) = \int_0^1 \hat{u}(t, x) \phi(x) dx \quad (5.3)$$

$$(P(t) \phi_1, \phi_2) = \int_0^1 p(t, x, z) \phi_1(x) \phi_2(z) dx dz \quad (5.4)$$

$$(Q(t) \phi_1, \phi_2) = \int_0^1 q(t, x, z) \phi_1(x) \phi_2(z) dx dz \quad (5.5)$$

で表わされることから、(4.4)式および(4.18), (4.19)式をガウス近似により置き換えた式に上式を代入し、その被積分項 $\hat{u}(t, x)$, $p(t, x, z)$, $q(t, x, z)$ の満たすべき式を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) - a \int_0^t \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} ds &= \bar{u}_0(x) + t f(x) \\ &+ \frac{h}{r^2} \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} p(s, x, z) dz \left[dy(s) \right. \\ &\left. - \left[h \int_{x_1}^{x_2} \hat{u}(s, \xi) d\xi \right] ds \right] \quad ((t, x) \in T \times G) \end{aligned} \quad (5.6a)$$

$$-a \frac{\partial \hat{u}(t, 0)}{\partial x} + b^d (\hat{u}(t, 0) - \bar{g}) = 0 \quad (t \in T) \quad (5.6b)$$

$$a \frac{\partial \hat{u}(t, 1)}{\partial x} + b^d (\hat{u}(t, 1) - \bar{g}) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x, z)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 p(t, x, z)}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 p(t, x, z)}{\partial z^2} \\ + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} p(t, x, \eta) p(t, \xi, z) d\eta d\xi = 0 \end{aligned}$$

$$((t, x, z) \in T \times G_x \times G_z) \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} p(0, x, z) &= q(0, x, z) - \bar{u}_0(x) \bar{u}_0(z) \\ ((x, z) \in G_x \times G_z) \end{aligned} \quad (5.7b)$$

$$\begin{aligned} p(t, x, z) &= p(t, z, x) \\ ((t, x, z) \in \bar{T} \times \bar{G}_x \times \bar{G}_z) \end{aligned} \quad (5.7c)$$

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial p(t, 0, z)}{\partial x} + b^d p(t, 0, z) \\ = \frac{(b^d)^2}{2} \delta(z) \{q(t, 0, z) - 2\bar{g} \hat{u}(t, z) + \bar{g}^2\} \\ ((t, z) \in T \times G_z \cup \{0\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial p(t, 1, z)}{\partial x} + b^d p(t, 1, z) \\ = \frac{(b^d)^2}{2} \delta(z-1) \{q(t, 1, z) - 2\bar{g} \hat{u}(t, z) + \bar{g}^2\} \\ ((t, z) \in T \times G_z \cup \{1\}) \end{aligned} \quad (5.7d)$$

$$\begin{aligned} q(t, x, z) - a \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 q(s, x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(s, x, z)}{\partial z^2} \right\} ds \\ = q(0, x, z) + \int_0^t \{f(x) \hat{u}(s, z) + \hat{u}(s, x) f(z)\} ds \\ + \frac{h}{r} \int_0^t \left[\int_{x_1}^{x_2} p(s, x, \xi) d\xi \right] \hat{u}(s, z) \\ + \hat{u}(s, x) \left[\int_{x_1}^{x_2} p(s, z, \xi) d\xi \right] dl(s) \\ ((t, x, z) \in T \times G_x \times G_z) \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\begin{aligned} q(t, x, z) &= q(t, z, x) \\ ((t, x, z) \in \bar{T} \times \bar{G}_x \times \bar{G}_z) \end{aligned} \quad (5.8b)$$

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial q(t, 0, z)}{\partial x} + b^d q(t, 0, z) \\ = b^d \bar{g} \hat{u}(t, z) + \frac{(b^d)^2}{2} \delta(z) \{q(t, 0, z) \\ - 2\bar{g} \hat{u}(t, z) + \bar{g}^2\} \quad ((t, z) \in T \times G_z \cup \{0\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial q(t, 1, z)}{\partial x} + b^d q(t, 1, z) \\ = b^d \bar{g} \hat{u}(t, z) + \frac{(b^d)^2}{2} \delta(z-1) \{q(t, 1, z) \\ - 2\bar{g} \hat{u}(t, z) + \bar{g}^2\} \\ ((t, z) \in T \times G_z \cup \{1\}) \end{aligned} \quad (5.8c)$$

(5.7d) および (5.8c) 式中の $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である(注3)。

数値実験においてはシステムのパラメータ値は $a = 0.5$, $b^d = 5.0 \times 10^2$, $b^s = 2.0$ と設定した。また初期値および境界入力はいずれも $u_0(x) = 0.3 + 0.5 \sin \pi x$,

(注3) ガウス近似により p, q に関する近似方程式 (5.7), (5.8) 式の解の有界性は保証されている。したがって数値計算においては (5.7d), (5.8c) 式におけるデルタ関数は $z=0, 1$ (あるいは $x=0, 1$) において十分大きな分布をもった関数により近似してシミュレーションを行った。

Fig. 1 A sample run of the system state $u(t, x)$ in Example

Fig. 2 A sample run of the estimated process $\hat{u}(t, x)$ in Example

Fig. 3 The $u(t, x)$ and $\hat{u}(t, x)$ runs at the spatial points $x=0.2$ and $x=0.5$ in Example

$\bar{q}=0.2$ で与えた。観測機構のパラメータは $h=6.0 \times 10^2$, $r=1.5$ と置き、また観測領域は $x_1=0.7$, $x_2=0.8$ のように定めた。さらに $u_0(x)=0$, $p(0, x, z)=(0.2+0.8 \sin \pi x)(0.2+0.8 \sin \pi z)$ と設定し、計算機によって推定方程式を解いた。その計算手順は、まず (5.1) 式を解いて逐次 (5.2) 式から観測データを取得し、これを用いて (5.6) ~ (5.8) 式を連立させて解けばよい。計算機で解くにあたっては、上記の式をいづれも差分形に変換し、陰公式を用いて実現した。その差分の区間幅は $\Delta t=10^{-5}$, $\Delta x=10^{-1}$ とした。Fig. 1 はシステムの真値の見本過程を示している。Fig. 2 はこれに対する近似ル波過程である。また Fig. 3 においては $x=0.2, 0.5$ における真値と推定値の見本過程を示した。

7. 結 言

本論文では境界上に不規則パラメータをもつ確率分布定数システムに関する状態推定について考察した。境界条件に表われる不規則性をダイナミクスに陽に表現するため、その数学モデルはヒルベルト空間上で値をとる確率積分方程式で記述した。システムに不規則パラメータを含むためフィルタ方程式は非線形問題となるので、本論文ではガウス近似を用いて近似ル波機構を導出した。この仮定の妥当性はいまだ検証されていないが、数値実験においては満足すべき結果が得られた。なお研究の一部は文部省科学研究費一般研究 (C) No. 56550289 の補助を受けたものである。

参 考 文 献

- 1) M.M.R. Williams: Random Processes in Nuclear Reactors, Pergamon Press, London (1974)
- 2) J.C. Samuels: Heat Conduction in Solids with Random External Temperatures and/or Internal Heat Generation, Int. J. Heat Mass Transfer, **9** 301/314 (1966)
- 3) 砂原, 相原, 小島: マルコフ連鎖形変動パラメータをもつ分布定数系の準最適制御, 計測自動制御学会論文集, **13-3**, 249/254 (1977)
- 4) 砂原, 相原, 小島: 不規則係数をもつ確率分布定数系の状態推定, 計測自動制御学会論文集, **13-4**, 336/343 (1977)
- 5) 砂原, 相原, 小島, 池田: 確率分布定数システムの境界観測による準最適境界制御, 計測自動制御学会論文集, **14-6**, 659/666 (1978)
- 6) 砂原, 相原, 小島: 境界観測に基づく確率分布定数系の状態推定, 計測自動制御学会論文集, **15-1**, 33/40 (1979)
- 7) J.L. Lions: Optimal Control of Systems Governed by Differential Equations, Springer-Verlag, New York (1972)
- 8) E. Wong and M. Zakai: On the Convergence of Ordinary Integral to Stochastic Integrals, Ann. Math. Stat., **36-5**, 1560/1564 (1965)
- 9) R.S. Liptser and A.N. Shiriyayev: Statistics of Random Processes I: General Theory, Springer-Verlag, New York (1977)
- 10) J-Y. Ouyard: Représentation de martingales vectorielles de carré intégrable à valeurs dans des espaces de Hilbert réels séparables, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. **33**, 195/208 (1975)
- 11) R.F. Curtain and A.J. Pritchard: Infinite Dimensional Linear System Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York (1978)

《付 録》: 定理 1 の証明

一意性は容易に示せるので、ここでは Galerkin の方法⁷⁾を用いて解の存在性の証明を行う。そのため V の要素から H の正規直交基底 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ を選ぶ。その中の任意の k 個によって張られる V, H, V^* の有限次

元部分空間を V_k, H_k, V_k^* で表わす. このとき明らかに $V_k = H_k = V_k^*$ ($= \text{span } [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k]$) である. いま A^k を H における V_k への直交射影としてつぎのように与える.

$$A^k \psi = \sum_{i=1}^k \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i \quad (\psi \in H) \quad (\text{A. 1})$$

さらにに A^k 関連して $\tilde{A}^k, A_b^k, A_0^k, A_1^k$ を

$$\tilde{A}^k \psi = \sum_{i=1}^k \langle \psi, \varphi_i \rangle \varphi_i \quad A_b^k \psi = \sum_{n=0}^1 A_n^k \psi$$

$$A_0^k \psi = \sum_{i=1}^k \langle \psi(0) \varphi_i(0) \rangle \varphi_i(x) \quad (\text{A. 2})$$

$$A_1^k \psi = \sum_{i=1}^k \langle \psi(1) \varphi_i(1) \rangle \varphi_i(x)$$

で定義する. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $V \times V^*$ 上の双 1 次型式である. (A. 1), (A. 2) を用いてつぎの有限近似を導入する.

$$\begin{aligned} u_k(t) &= A^k u(t) & u_0^k &= A^k u_0 & f^k(t) &= A^k f(t) \\ A^k(t) \psi &= \tilde{A}^k A(t) \psi & B_a^k(t) \psi &= A_b^k B_a(t) \psi \\ B_n^k(t) \psi &= A_n^k B_n(t) \psi & (n=0, 1) \end{aligned}$$

これらの有限近似に基づいて, (2.9) 式を以下のように近似する.

$$\begin{aligned} u_k(t) &+ \int_0^t A^k(s) u_k(s) ds + \int_0^t B_a^k(s) u_k(s) ds \\ &+ \sum_{n=0}^1 \int_0^t B_n^k(s) u_k(s) dw_n(s) \\ &= u_0^k + \int_0^t f^k(s) ds + \int_0^t B_a^k(s) g(s) ds \\ &+ \sum_{n=0}^1 \int_0^t B_n^k(s) g_n(s) dw_n(s) \quad (\text{A. 3}) \end{aligned}$$

(A. 3) 式は有限次元空間で値をとる伊藤の確率積分方程式とみなせるから, $\|u_k(t)\|^2$ -過程 ($\|\cdot\|$ は H 上のノルムを表わす) は伊藤の公式により次式を満足することがわかる.

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\|^2 &+ 2 \int_0^t \langle A(s) u_k(s), u_k(s) \rangle ds \\ &+ 2 \int_0^t \langle B_a(s) u_k(s), u_k(s) \rangle r ds \\ &- \sum_{n=0}^1 \int_0^t \|B_n^k(s) u_k(s)\|^2 ds \\ &+ 2 \sum_{n=0}^1 \int_0^t \langle B_n^k(s) u_k(s) dw_n(s), u_k(s) \rangle \\ &= \|u_0^k\|^2 + 2 \int_0^t \langle f(s), u_k(s) \rangle ds \\ &+ 2 \int_0^t \langle B_a(s) g(s), u_k(s) \rangle r ds \\ &- 2 \sum_{n=0}^1 \int_0^t \langle B_n^k(s) g_n(s), B_n^k(s) u_k(s) \rangle ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{n=0}^1 \int_0^t \|B_n^k(s) g_n(s)\|^2 ds \\ &+ 2 \sum_{n=0}^1 \int_0^t \langle B_n^k(s) g_n(s) dw_n(s), u_k(s) \rangle \quad (\text{A. 4}) \end{aligned}$$

条件 (C-2.1) および (C-2.4) より次式が成立する.

$$\langle A(t) \psi, \psi \rangle \geq \alpha \|\psi\|^2 - \lambda \|\psi\|^2 \quad (\text{A. 5})$$

また (C-2.2), (C-2.3) より,

$$\langle B_a(t) \psi, \psi \rangle r \leq \beta_1 \|\psi\|^2 r \quad (\beta_1 > 0) \quad (\text{A. 6})$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^1 \|B_n^k(t) \psi\|^2 &= \sum_{i=1}^k \{ |b_0^s(t) \psi(0) \varphi_i(0)|^2 \\ &+ |b_1^s(t) \psi(1) \varphi_i(1)|^2 \} \leq \beta_2 \|\psi\|^2 r \quad (\beta_2 > 0) \quad (\text{A. 7}) \end{aligned}$$

が成立することも容易に確かめらる. ただし $\|\psi\|^2 r = \langle \psi, \psi \rangle r$ である. また任意 ε の正数に対しつぎの不等式が成立することが知られている.

$$\|\psi\|^2 r \leq \varepsilon \|\psi\|^2 r + K(\varepsilon) \|\psi\|^2 \quad (K(\varepsilon) > 0) \quad (\text{A. 8})$$

(A. 5) ~ (A. 8) の評価式を (A. 4) 式に適用し $\alpha' = 2\alpha - \varepsilon > 0$ となるような ε を選び $K' = K(\alpha', \beta_1, \beta_2, \lambda)$ と置き両辺に期待値演算を実行すると, つぎの不等式が成立する.

$$\begin{aligned} E \{ \|u_k(t)\|^2 \} &+ \alpha' E \left\{ \int_0^t \|u_k(s)\|^2 r ds \right\} \\ &\leq C_0 + K' E \left\{ \int_0^t \|u_k(s)\|^2 ds \right\} \quad (\text{A. 9}) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} C_0 &= E \{ \|u_0\|^2 \} + E \left\{ \int_0^{t_f} \|u_k(s)\|^2 r dt \right\} \\ &+ (\beta_1 + 2\beta_2) E \left\{ \int_0^{t_f} \|g(t)\|^2 r dt \right\} \end{aligned}$$

である. 明らかに (C-2.5), (C-2.6) より C_0 は有界であるので, (A. 10) 式に Gronwall の不等式を用いて

$$E \{ \|u_k(t)\|^2 \} < M_1 \quad E \left\{ \int_0^{t_f} \|u_k(t)\|^2 r dt \right\} < M_2 \quad (\text{A. 10})$$

が示せる. また上式の関係とマルチンゲール不等式を用いることにより,

$$E \{ \sup_{t \in T} \|u_k(t)\|^2 \} < M_3 \quad (\text{A. 11})$$

も成立する. (A. 10), (A. 11) 式における定数 $M_i (i=1, 2, 3)$ が k の選び方に依存しないことに注意すれば, u_k の任意の部分列 $u_{k'}$ において

$$\begin{aligned} u_{k'}(t) &\longrightarrow u(t) \quad (\text{in } L^2(\Omega; C(\bar{T}; H))) \\ u_{k'} &\longrightarrow u \quad (\text{in } L^2(T \times \Omega; V) \text{ weakly}) \end{aligned}$$

となるような $\{u_{k'}\}$ が存在する. (証明終り) $\square$