多入力多出力系の適応観測器の構成[†]

金 井 喜美雄*・出 川 喬 庸*・内 門 茂*

A Design of an Adaptive Observer for a Multi-Input Multi-Output System

Kimio KANAI*, Tadayasu DEGAWA* and Shigeru UCHIKADO*

In recent years, an adaptive observer which estimates the parameters and the states of an unknown plant has been actively examined. But most of studies are contributed only to a single-input single-output system. The extension of this procedure to the multivariable case seems to be more difficult because the canonical form for such systems has much more complicated structure.

This paper deals with the problem of designing an adaptive observer for a multi-input multi-output linear time invariant discrete system where only the inputs and outputs can be measured. In order to estimate unknown parameters of a plant, a scalar output representation is defined and the resultant multi-inputs single-output system is considered. For the estimation of output equation, two different algorithms are obtained by using a recursive least square estimation method.

The first approach makes use of estimated states for parameter estimations. In the second approach, the output equation is transformed into the linear combination of unknown parameters and known signals, and the signal is used for parameter estimation, and the iteration number of convergence is also determined. At the end of this paper, the results of digital simulation for a third-order system using two approaches are presented.

Keywords: adaptive observer, multi-input multi-output, linear discrete system, recursive least square estimation

1. ま え が き

入出力信号のみを用いて未知プラントのパラメータ

[†] 第3回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭56・1)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defence Academy, Yokosuka

(Received February 13, 1981)

(Revised October 21, 1981)

と状態変数を同時に推定する適応観測器についてはよく研究されているが、その大部分は単入力単出力系に関するものである。筆者らは単入力単出力系について、新形式の内部記述正準形を用いてオブザーバの構成が比較的簡単で収束のよい設計方式を提案し、種々の数値計算を実行して良好な結果を得ている¹⁾。多入力単出力系の場合には単入力単出力系の手法をそのまま適用することができる。しかしながら、多変数系の正準形の構造が非常に複雑になるなどの理由によって、単入力単出力系について導かれた手法をそのまま多変数系へ拡張することは一般には困難である。

本研究では多入力多出力をもつ線形固定係数離散値系をとりあげるが、出力の線形結合としてスカラー出力を定義することによって多入力単出力系としての定式化を求め、プラントの未知パラメータと状態変数を推定する方式を検討する。出力方程式に関する未知パラメータの推定については、繰返し最小2乗法に基づいたアルゴリズムを2通りの手法で導く。

第1の方式は未知パラメータを推定するために推定状態量を用いるアルゴリズムとなっている。第2の方式は出力方程式を変換して出力を未知パラメータと既知信号の線形結合で表わし、未知パラメータを推定するために既知信号だけを用いるものであり、その収束回数を決定する。3次系のプラントをとりあげて2通りのアプローチによるシミュレーションを実行し、本手法の有効性を検討する。

2. 問題の記述

つぎの差分方程式で記述される m 入力 r 出力線形固定係数離散値系を考える。

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= A^0 x_k^0 + \beta^0 u_k \\ y_k &= H^0 x_k^0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)式において、係数マトリクス A^0, β^0, H^0 は未知であり、状態量 x_k^0 は測定不可能であるとする。さらに、この系は完全可制御・可観測であり次数 n は既知、

マトリクス A^0 は cyclic であると仮定する。

(1) 式で記述されるプラントのスカラー出力をつぎのように定義する。

$$y_k^0 = c^T y_k = c^T H^0 x_k^0 \quad (2)$$

ここで、 c は設計者が選択すべきパラメータ・ベクトルであり、 $\{c^T H^0, A^0\}$ が完全可観測となるように選ぶものとする。もし、 A^0 が cyclic で $\{H^0, A^0\}$ が完全可観測ならば、ほとんどすべてのベクトル c に対して $\{c^T H^0, A^0\}$ が完全可観測であることが示されている⁴⁾。もし、 A^0 が cyclic であると仮定できないならば、つぎのような状態方程式を考える。

$$x_{k+1}^0 = A^2 x_k^0 + \beta^0 u_k^0 \quad (3)$$

ここで、

$$A^2 \triangleq A^0 + \beta^0 k^0 H^0 \quad u_k^0 \triangleq u_k - k^0 y_k$$

$\{A^0, \beta^0\}$ が完全可制御であるならば、ほとんどすべての出力フィードバック・ゲイン k^0 に対して A^2 が cyclic となり、ほとんどすべての k^0 と c に対して $\{c^T H^0, A^2\}$ が完全可観測であることが示されている⁴⁾。

系(1), (2)の入出力関係はつぎのように表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + \beta u_k \\ y_k^0 &= c^T \bar{H} x_k = [1 \ 0 \cdots 0] x_k \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$y_k = \bar{H} x_k \quad (5)$$

ここで、

$$x_k \in R^n, y_k^0 \in R^1$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} -\alpha & \begin{matrix} \mathbf{I}_{(n-1)} \\ 0 \cdots 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha^T &\triangleq [\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_n] \\ \beta &\triangleq [\beta_1 : \beta_2 : \cdots : \beta_m] \\ \beta_i^T &\triangleq [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \cdots \beta_{ni}] \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, m$$

構造が簡単な適応観測器を設計するために設計パラメータ λ_i を導入して(4), (5)式を書き換えるとつぎのようになる¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= A \bar{x}_k - \alpha y_k^0 + \beta u_k \\ y_k^0 &= c^T \bar{H} \bar{x}_k = p^T \bar{x}_k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$y_k = \bar{H} \bar{x}_k \quad (7)$$

ここで、

$$\alpha^T \triangleq [\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_n]$$

$$\beta \triangleq [\beta_1 : \beta_2 : \cdots : \beta_m]$$

$$\beta_i^T \triangleq [\beta_{1i} \ \beta_{2i} \cdots \beta_{ni}] \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$A \triangleq \text{diag}(-\lambda_i)$$

$$|\lambda_i| < 1 \quad i=1, 2, \dots, n \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{for } i \neq j$$

$$p^T \triangleq [1, 1 \cdots 1]$$

λ_i は設計者が選択すべきパラメータであり、 (a, B, H) は $n(m+r+1)$ 個の同定すべき未知パラメータである。さらに、(4), (5)式と(6), (7)式の関係は正

則な変換マトリクス $T(\lambda)$ を用いてつぎのように表示される¹⁾。

$$x_k = T(\lambda) \bar{x}_k \quad (8)$$

$$\alpha = T(\lambda) a + D(\lambda) \quad \beta = T(\lambda) B \quad H = \bar{H} T(\lambda) \quad (9)$$

ここで、

$$T(\lambda) \triangleq [c(A/\lambda_1) : c(A/\lambda_2) : \cdots : c(A/\lambda_n)]$$

$$c^T(A) \triangleq [1 : D^T(\lambda)]$$

上式で、 $c(A)$ は対角マトリクス A の特性多項式の係数から作られるベクトルであり、 $c(A/\lambda_i)$ はこの多項式から因数 $(z + \lambda_i)$ を除いて作られるベクトルである。

したがって、適応観測器の設計問題は情報として得られる入力 u_k と出力 y_k のみを用いて未知パラメータ (a, B, H) を同定し、内部状態量 $\bar{x}_k$ を推定する適応方式を導くことである。

3. 適応観測器の構成

(6)式の入出力関係は状態変数フィルタ信号を用いるとつぎのように表わすことができる¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} Z_{k+1} &= A Z_k + p y_k^0 \quad Z_0^T = [0 \cdots 0] \\ W_{k+1} &= A W_k + p u_k^T \quad W_0 = [0] \\ \theta_{k+1} &= A \theta_k \quad \theta_0^T = [1 \cdots 1] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\bar{x}_k = -a \otimes Z_k + B \otimes W_k + \bar{x}_0 \otimes \theta_k \quad (11)$$

$$y_k^0 = \eta_k^T q = p^T \bar{x}_k \quad (12)$$

ここで、

$$Z_k \in R^n, W_k \in R^{n \times m}, \theta_k \in R^n$$

$$W_k \triangleq [w_{1k} : w_{2k} : \cdots : w_{mk}]$$

$$w_{ik}^T \triangleq [w_{1ik} \ w_{2ik} \cdots w_{nik}] \quad i=1, \dots, m$$

$$\eta_k^T \triangleq [Z_k^T, w_{1k}^T \cdots w_{mk}^T, \theta_k^T]$$

$$q^T \triangleq [-a^T, b_1^T \cdots b_m^T \ \bar{x}_0^T]$$

記号 $\otimes$ は二つのマトリクスまたはベクトルの対応する要素と要素の乗算をし、それによってできた各行の加え合せたものを意味する。すなわち、 $A \triangleq [a_{ij}] \in R^{n \times m}$, $B \triangleq [b_{ij}] \in R^{n \times m}$, $C \triangleq [c_i] \in R^{n \times 1}$, $c = A \otimes B$ と定義するならば、 $c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ となる。

適応観測器の構造は(10)式と(11), (12), (7)式に対応してつぎのように設定する。

$$\hat{x}_k = -\hat{a}_k \otimes z_k + \hat{B}_k \otimes W_k + \hat{x}_{0k} \otimes \theta_k \quad (13)$$

$$\hat{y}_k^0 = \eta_k^T \hat{q}_k = p^T \hat{x}_k \quad (14)$$

$$\hat{y}_k = \hat{H}_k \hat{x}_k \quad (15)$$

ここで、

$$\hat{H}_k^T \triangleq [\hat{h}_{1k} : \hat{h}_{2k} : \cdots : \hat{h}_{nk}]$$

$$\hat{h}_{ik}^T \triangleq [\hat{h}_{1ik} \ \hat{h}_{2ik} \cdots \hat{h}_{nik}] \quad i=1, 2, \dots, r$$

アプローチ I : パラメータ q, H を別々に推定する方式

未知パラメータ g, H の推定アルゴリズムを導くためにそれぞれつぎのような評価関数を設定する。

$$J_k(\hat{g}) = J_0(\hat{g}) + \sum_{i=1}^k (y_i^0 - \eta_i^T \hat{g})^2 \quad (16)$$

ここで、

$$J_0(\hat{g}) \triangleq (\hat{g} - \hat{g}_0)^T Q_0^{-1} (\hat{g} - \hat{g}_0)$$

$$Q_0^{-1} \triangleq \varepsilon I \quad \varepsilon \text{ は小さな正の定数}$$

$$J_{k+1}(\hat{h}_i) = \sigma J_k(\hat{h}_i) + (y_{i,k+1} - \hat{x}_{k+1}^T \hat{h}_i)^2 \quad i=1, 2, \dots, r \quad (17)$$

ここで、

$$J_k(\hat{h}_i) \triangleq (\hat{h}_i - \hat{h}_{i0})^T R_0^{-1} (\hat{h}_i - \hat{h}_{i0}) \quad 0 < \sigma \leq 1$$

重みの係数 σ は過去のデータの影響を小さくし、最新のデータによる推定を強調して収束を早めるための重みであり、(16)式と異なって(17)式に重みをつけるのは $\hat{h}_i$ のほかに推定状態量 $\hat{x}_k$ が含まれているからである。

(16), (17)式において、評価関数を最小にする条件 $\partial J_k(\hat{g})/\partial \hat{g} = 0, \partial J_k(\hat{h}_i)/\partial \hat{h}_i = 0$ をそれぞれ計算し、繰返しアルゴリズムを導くために Matrix inversion lemma を適用すると以下のようなパラメータ調整式が得られる(注1)。

$$\hat{g}_{k+1} = \hat{g}_k + K_{k+1}(y_{k+1}^0 - \eta_{k+1}^T \hat{g}_k) \quad (18)$$

$$K_{k+1} = Q_k \eta_{k+1} / (1 + \eta_{k+1}^T Q_k \eta_{k+1}) \quad (19)$$

$$Q_{k+1} = Q_k - Q_k \eta_{k+1} \eta_{k+1}^T Q_k / (1 + \eta_{k+1}^T Q_k \eta_{k+1}) \quad (20)$$

$$\hat{H}_{k+1}^T = \hat{H}_k^T + G_{k+1}(y_{k+1}^T - \hat{x}_{k+1}^T \hat{H}_k^T) \quad (21)$$

$$G_{k+1} = R_k \hat{x}_{k+1} / (\sigma + \hat{x}_{k+1}^T R_k \hat{x}_{k+1}) \quad (22)$$

$$R_{k+1} = \frac{1}{\sigma} [R_k - R_k \hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T R_k / (\sigma + \hat{x}_{k+1}^T R_k \hat{x}_{k+1})] \quad (23)$$

(18)~(20)式を用いるとプラントの入出力が sufficiently rich の条件を満足しかつ有界ならば、 $k \rightarrow \infty$ のとき推定パラメータ $\hat{g}_k$ が真値 g に収束し、(11), (13)式より推定状態量 $\hat{x}_k$ が真の状態量 $\bar{x}_k$ に収束することが示される。このとき同様に、(21)~(23)式を用いると $k \rightarrow \infty$ のとき推定パラメータ $\hat{H}_k$ が真値に収束することが示されるが、これは $\hat{x}_k$ の $\bar{x}_k$ への収束に依存しているので、収束は $\hat{g}_k$ よりも遅れる。

アプローチⅡ：パラメータ g, H を同時に推定する方法

前述の方式では $\hat{g}_k$ と $\hat{x}_k$ が収束しない限りは $\hat{H}_k$ の収束が保証できないことになっており、この不具合を改良するために未知パラメータ g, H の同定を同時に実行できる方式を検討する。

$$\bar{x}_k = D \eta_k \quad (24)$$

ここで、

$$D \in R^{n \times n(m+2)}$$

$$D \triangleq \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & b_{11} & 0 \\ & -a_2 & & b_{21} \\ 0 & & \ddots & 0 \\ & & & -a_n & & b_{n1} \\ & b_{1m} & 0 & \bar{x}_{01} & 0 \\ & & b_{2m} & & \bar{x}_{01} \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & & & b_{nm} & 0 & \bar{x}_{0n} \end{bmatrix}$$

いま、(11)式をつぎのように書き換える。

さらに、(24)式を(7)式に代入する。

$$y_k = L \eta_k \quad (25)$$

ここで、

$$L \triangleq H D \in R^{r \times n(m+2)}$$

したがって、適応観測器の構造としては(15)式の代りに(25)式に対応して次式を設定することができる。

$$\hat{y}_k = \hat{L}_k \eta_k \quad (26)$$

また、未知パラメータ L の推定アルゴリズムを導くためにつぎのような評価関数をとりあげる。

$$J_k(\hat{l}_i) = J_0(\hat{l}_i) + \sum_{i=1}^k (y_{it} - \eta_{it}^T \hat{l}_i)^2 \quad i=1, 2, \dots, r \quad (27)$$

ここで、

$$J_0(\hat{l}_i) \triangleq (\hat{l}_i - l_{i0})^T Q_0^{-1} (\hat{l}_i - l_{i0}) \quad Q_0^{-1} \triangleq \varepsilon I$$

$$\hat{L}_k^T \triangleq [\hat{l}_{1k} : \hat{l}_{2k} : \dots : \hat{l}_{rk}] \quad \varepsilon \text{ は小さな正の定数}$$

(27)式において、評価関数を最小にする条件 $\partial J_k(\hat{l}_i)/\partial \hat{l}_i = 0$ を計算するとパラメータ調整の関係式は次式および(19), (20)式で与えられる。

$$\hat{L}_{k+1}^T = \hat{L}_k^T + K_{k+1}(y_{k+1}^T - \eta_{k+1}^T \hat{L}_k^T) \quad (28)$$

前と同様に、プラントの入出力信号が有界ならば、 $k \rightarrow \infty$ のとき $\hat{L}_k \rightarrow L$ に収束することは容易に示される。

つぎに g の推定アルゴリズムを考える。(2), (12)式と(25)式よりつぎの関係を得る。

$$g^T = c^T L \quad (29)$$

ここで、もし、 $\hat{g}_0^T = c^T \hat{L}_0$ なる関係式を満足するように $\hat{g}_k$ の初期値が選ばれるならば、 $\hat{g}_k$ は次式の関係から求められる。

$$\hat{g}_k = \hat{L}_k^T c \quad (30)$$

H の推定値 $\hat{H}_k$ は(25)式の定義を用いると次式のようなになる。

$$\hat{H}_k = \hat{L}_k \hat{D}_k^T (\hat{D}_k \hat{D}_k^T)^{-1} \quad (31)$$

ここで、

(注1) 式の導出は付録参照のこと

$$\hat{D}_k \triangleq \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1k} & 0 & \hat{b}_{11k} & 0 & \hat{b}_{1mk} & 0 & \hat{x}_{01k} & 0 \\ & -\hat{a}_{2k} & & \hat{b}_{21k} & \dots & \hat{b}_{2mk} & & \hat{x}_{02k} \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \dots & 0 & \ddots & \ddots \\ & & -\hat{a}_{nk} & \hat{b}_{n1k} & \dots & \hat{b}_{nmk} & 0 & \hat{x}_{0nk} \end{bmatrix}$$

(31)式において $\hat{D}_k \hat{D}_k^T$ を計算するとつぎのようになる。

$$\hat{D}_k \hat{D}_k^T = \begin{bmatrix} \hat{a}_{1k}^2 + \sum_{i=1}^m \hat{b}_{1ik}^2 + \hat{x}_{01k}^2 & & & 0 \\ & \hat{a}_{2k}^2 + \sum_{i=1}^m \hat{b}_{2ik}^2 + \hat{x}_{02k}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{a}_{nk}^2 + \sum_{i=1}^m \hat{b}_{nik}^2 + \hat{x}_{0nk}^2 \end{bmatrix} = \text{diag}(f_t) \quad t=1, 2, \dots, n \quad (32)$$

ここで、

$$f_t = \hat{a}_{tk}^2 + \sum_{i=1}^m \hat{b}_{tik}^2 + \hat{x}_{0tk}^2$$

(32)式から $(\hat{D}_k \hat{D}_k^T)^{-1}$ は簡単に求められる。

$$(\hat{D}_k \hat{D}_k^T)^{-1} = \text{diag}(1/f_t) \quad t=1, 2, \dots, n \quad (33)$$

したがって、(31)式を計算するのに逆行列演算が含まれないことがわかる。系(6)の可制御マトリクス U_c は

$$U_c = [B : (A - ap^T)B : (A - ap^T)^2 B : \dots : (A - ap^T)^{n-1} B] \quad (34)$$

となるので、系が可制御である限り $a_t, b_{t1}, b_{t2}, \dots, b_{tm}$, $\hat{x}_{0t}$ が同時に零になることはない。なぜならばもし $a_t, b_{t1}, b_{t2}, \dots, b_{tm}$ が同時に零になるならば、 U_c のある行の要素のすべてが零になり、仮定に反するからである。しかしながら、推定の過渡期においては、 $\hat{a}_{tk}, \hat{b}_{t1k}, \hat{b}_{t2k}, \dots, \hat{b}_{tmk}, \hat{x}_{0t}$ は同時に零になることが起りうる。このとき、 $f_t = 0$ となり、 $1/f_t$ は存在しないことになるが、このような場合は、その $1/f_t$ 項のみを有限なある十分大きな数に置き換えて計算を続行することにする。

$L = HD$ の関係より (31)式で与えられる $\hat{H}_k$ が H に収束することは、 $\hat{L}_k$ および $\hat{D}_k$ がそれぞれ L と D に収束することからも明らかであり、しかも、アプローチ I と違って $\hat{L}_k$ と $\hat{D}_k$ が収束すると同時に $\hat{H}_k$ が H に収束することになる。

4. 観測器の有限収束条件

(27)式において、 $\partial J_k(\hat{l}_i)/\partial \hat{l}_i = 0$ を求めると最小 2 乗推定は次式で与えられる。

$$\hat{L}_k^T = Q_k(\varepsilon \hat{L}_0 + N_k^T Y_k) \quad (35)$$

ここで、

$$Q_k \triangleq (\varepsilon I + N_k^T N_k)^{-1} \quad (36)$$

$$N_k^T \triangleq [\eta_1 : \eta_2 : \dots : \eta_k]$$

$$Y_k^T \triangleq [y_1 : y_2 : \dots : y_k]$$

いま、(24)式と(35)式を変形するとつぎのようになる。

$$Y_k^T = L[\eta_1 : \eta_2 : \dots : \eta_k] = L N_k^T \quad (37)$$

$$Q_k = (I + \varepsilon [N_k^T N_k]^{-1})^{-1} (N_k^T N_k)^{-1} \quad (38)$$

ただし、 $(N_k^T N_k)^{-1}$ は N_k のランクが $n(m+2)$ にならなければ定義できないものである。

(36)式から明らかなように $\varepsilon \neq 0$ の場合には Q_k は $k=0$ のときから計算できる。一方、入力 y_k が sufficiently rich ならば、 $k \geq n(m+2)$ では N_k のランクが $n(m+2)$ となるから一般に $(N_k^T N_k)^{-1}$ は $k \geq n(m+2)$ で定義される。

(37)、(38)式を(35)式に代入すると

$$\hat{L}_k^T = (I + \varepsilon [N_k^T N_k]^{-1})^{-1} (N_k^T N_k)^{-1} \cdot (\varepsilon \hat{L}_0^T + N_k^T N_k L^T) \quad (39)$$

となる。ここで、 $\varepsilon = 0$ とすると $\hat{L}_k^T = L^T$ となり、 $k = n(m+2)$ のとき、推定パラメータ $\hat{L}_k$ が L に収束する。しかし、 $\varepsilon = 0$ のとき、(38)式は $k \geq n(m+2)$ の場合にしか適用できない。 $\varepsilon \rightarrow 0$, $k \geq n(m+2)$ のとき、 $Q_k \rightarrow (N_k^T N_k)^{-1}$, $\hat{L}_k \rightarrow L$ となることに注目して、 ε を十分小さく選定すると $k=0$ から計算を始めることができ、 $(N_k^T N_k)$ の逆行列が存在するという条件も必要なく、ほぼ $n(m+2)$ 回で推定パラメータが真値に収束することになる。なお、 $m=1$ のとき $k=3n$ で収束することになり単入力系の結果と一致する¹⁾。

5. 3次系の例題

本研究の有効性を検討するために、次式の線形固定係数離散値系をとりあげる。

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + \beta u_k \\ y_k &= \bar{H} x_k \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ここで、

$$x_k^T \triangleq [x_{1k} \ x_{2k} \ x_{3k}] \quad u_k^T \triangleq [u_{1k} \ u_{2k}]$$

(a)

(c)

Fig. 1 Estimation of α and β

(b)

(a)

$$y_k^T \triangleq [y_{1k} \ y_{2k}]$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ 0.49 & 0 & 1 \\ 0.245 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \triangleq \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 \\ -0.857 & 2.455 \\ -2.096 & -0.282 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} \triangleq \begin{bmatrix} 0.959 & -0.197 & -0.763 \\ 0.041 & 0.197 & 0.763 \end{bmatrix}$$

シミュレーションにおいては、(39)式のマトリクス

$(A, \beta, \bar{H})$ は未知、状態量 x_k は測定不可能、系の次数は既知であるとする。さらに、この系が完全制御・可観測、マトリクス A は cyclic であることは既知であるとする。

系(39)式のスカラー出力をつぎのように定義する。

$$y_k^0 = c^T \bar{H} x_k = [1 \ 0 \ 0] x_k \quad (40)$$

(b)

(c)

Fig. 2 Estimation x_K , x_{3K} and x_0

ここで、 $c^T \triangleq [1 \ 1]$ であり、 $\{c^T \bar{H}, A\}$ は完全可観測になっている。

また、入力と設計パラメータはつぎのように選定する。

$$u_{1k} = \sin 0.5k + \sin k + \sin 2k$$

Fig. 3 Estimation of $\bar{H}$ (Approach I) Fig. 4 Estimation of $\bar{H}$ (Approach II)

$$u_{2k} = \sin 0.3k + 0.5 \sin 0.6k + 0.25 \sin 0.8k$$

$$\lambda_1 = 0.5 \quad \lambda_2 = 0.6 \quad \lambda_3 = -0.7 \quad \sigma = 0.3$$

このとき、(39)、(40)式の入出力関係はつぎのように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= A\bar{x}_k - ay_k^0 + Bu_k \\ y_k^0 &= c^T H \bar{x}_k = p^T \bar{x}_k \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$y_k = H \bar{x}_k \quad (42)$$

ここで,

$$\bar{x}_k^T \triangleq [\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}, \bar{x}_{3k}]$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & +0.7 \end{bmatrix}$$

$$a^T \triangleq [2 \quad -1.1 \quad 0]$$

$$B \triangleq \begin{bmatrix} 22.70 & -9.55 \\ -22.29 & 11.38 \\ -1.21 & -1.03 \end{bmatrix}$$

$$n^T \triangleq [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$H \triangleq \begin{bmatrix} 1.26 & 1.19 & 0.95 \\ -0.26 & -0.19 & 0.05 \end{bmatrix}$$

(39), (40)式と(41), (42)式の関係は正則な変換マトリクス $T(\lambda)$ を用いてつぎのように表わすことができる.

$$x_k = T(\lambda)\bar{x}_k \quad (43)$$

$$\alpha = T(\lambda)a + D(\lambda) \quad \beta \triangleq T(\lambda)B \quad (44)$$

$$H = \bar{H}T(\lambda) \quad (45)$$

ここで,

$$T(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.2 & -1.1 \\ -0.42 & -0.35 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} -2.08 & -4.17 & -8.33 \\ 2.80 & 4.62 & 7.69 \\ 0.31 & -0.45 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$D^T(\lambda) \triangleq [-0.4 \quad -0.47 \quad 0.21]$$

したがって本シミュレーションでは(39), (40)式を未知プラントとし, 入力 u_k と出力 y_k のみを用いて(41), (42)式における未知パラメータ (a, B, H) を同定し, 未知状態量 $\bar{x}_k$ を推定し(43), (44), (45)式の関係から(39), (40)式における未知パラメータ ($A, B, \bar{H}$) と未知状態量 x_k を推定する.

3章におけるアプローチ I およびアプローチ II を用いた $\alpha, \beta_1, x_{2k}, x_0, x_{3k}, \bar{H}$ の推定状況をそれぞれ Fig. 1~3 と Fig. 1, 2, 4 に示す. Fig. 1, 2, 4 よりアプローチ II では推定パラメータと推定状態量の両方ともほとんど 12 回の繰返しで収束している. 一方, Fig. 1~3 よりアプローチ I では, $\bar{H}$ の推定の過渡期において, オーバーシュートが大きくなり, 収束回数もふえていることがわかる. これは, $\bar{H}$ の推定にの定状態量 $\hat{x}_k$ を用いているためである.

6. あとがき

多入力多出力線形固定係数離散値系の適応観測器設計問題をとりあげ, 出力の線形結合としてスカラー出力を定義することによって多入力単出力系としての定式化を求め, プラントの未知パラメータと状態変数を

推定する方式を検討し, 出力方程式に関する未知パラメータの推定については, 繰返し最小 2 乗法に基づいたアルゴリズムを 2 通りの手法で導き収束特性を比較検討した. アプローチ I では出力方程式の未知パラメータの収束特性が良好とはいえず, 特に過渡特性が不良である. アプローチ II では途中の応答特性はかなり改善され, さらに, ε を十分小さく選べば, 理論結果による収束回数, $n(m+2)$ 回で有限収束することがシミュレーションで実証され, 良好な収束特性をもつことがわかった. さらに, 本方式によって構成される観測器の構造はかなり簡単になるという利点をもっているが, より一般的な適応観測器の構成についての研究が今後の課題である.

参 考 文 献

- 1) 金井, 出川: 収束特性改善を考慮した離散時間適応観測器の設計, 計測自動制御学会論文集, **15-5**, 572/577 (1979)
- 2) E. J. Davison and S. H. Wang: Properties of Linear Time Invariant Multivariable Systems Subject to Arbitrary Output and State Feedback, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-1**, 24/32 (1973)
- 3) R. L. Carroll and D. P. Lindorff: An Adaptive Observer for Single-Input Single-Output Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-18-5**, 428/435 (1973)
- 4) G. Lüders and K. S. Narendra: Stable Adaptive Schemes for State Estimation and Identification of Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-19-6**, 841/847 (1974)

《付 録》

パラメータ調整式(21)~(23)の導出:

(17)式から, $\partial J_k(\hat{h}_i)/\partial \hat{h}_i$ を計算すると

$$\begin{aligned} \partial J_k(\hat{h}_i)/\partial \hat{h}_i &= 2 \hat{x}_k(\hat{x}_k^T \hat{h}_i - y_{ik}) + \sigma J_{k-1}(\hat{h}_i)/\partial \hat{h}_i \\ &= 2 \hat{x}_k(\hat{x}_k^T \hat{h}_i - y_{ik}) + 2 \sigma \hat{x}_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^T \hat{h}_i - y_{i,k-1}) + \sigma^2 J_{k-2}(\hat{h}_i)/\partial \hat{h}_i \\ &= 2 \sum_{t=1}^k \sigma^{k-i} \hat{x}_i(\hat{x}_i^T \hat{h}_i - y_{it}) \\ &\quad + 2 \sigma^k R_0(\hat{h}_i - \hat{h}_{i0}) \end{aligned} \quad (A-1)$$

となるので $\partial J_k(\hat{h}_i)/\partial \hat{h}_i = 0$ の条件から k における $\hat{h}_i$ はつぎのように求められる.

$$\hat{h}_{ik} = R_k \left(\sum_{t=1}^k \sigma^{k-i} \hat{h}_i y_{it} + \sigma^k R_0^{-1} \hat{h}_{i0} \right) \quad (A-2)$$

ここで,

$$R_k = \left(\sum_{i=1}^k \sigma^{k-i} \hat{x}_i \hat{x}_i^T + \sigma^k R_0^{-1} \right)^{-1} \quad (A-3)$$

したがって, (A-3)式の R_k の定義からつぎの関係を導くことができる.

$$R_{k+1}^{-1} = \sigma R_k^{-1} + \hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T \quad (A-4)$$

(A-2)式の定義から $\hat{h}_{i,k+1}$ を求めると

$$\begin{aligned}\hat{h}_{ik+1} &= R_{k+1} \left(\sum_{\ell=1}^{k+1} \sigma^{k+1-\ell} \hat{h}_{i\ell} y_{i\ell} + \sigma^{k+1} R_0^{-1} \hat{h}_{i0} \right) \\ &= R_{k+1} \left\{ \sigma \left(\sum_{\ell=1}^k \sigma^{k-\ell} \hat{x}_{i\ell} y_{i\ell} + \sigma^k R_0^{-1} \hat{h}_{i0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{x}_{k+1} y_{ik+1} \right\} \quad (\text{A-5})\end{aligned}$$

上式に (A-2) 式から求められる $(\sum_{\ell=1}^k \sigma^{k-\ell} \hat{x}_{i\ell} y_{i\ell} + \sigma^k R_0^{-1} \hat{h}_{i0}) = R_0^{-1} \hat{h}_{ik}$ の関係を代入するとつぎのようになる。

$$\hat{h}_{ik+1} = R_{k+1} (\sigma R_k^{-1} \hat{h}_{ik} + \hat{x}_{k+1} y_{ik+1}) \quad (\text{A-6})$$

Matrix inversion lemma は次式で与えられる。

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (\text{A-7})$$

B, C がベクトルのとき $I=1$ である。

(A-7) 式を (A-4) 式に適用するため $A = \sigma R_k^{-1}$, $B = \hat{x}_{k+1}$, $C = \hat{x}_{k+1}^T$ と置くと (A-4) 式の R_{k+1} はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}R_{k+1} &= (\sigma R_k^{-1} + \hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T)^{-1} \\ &= \frac{1}{\sigma} R_k - \frac{1}{\sigma} R_k \hat{x}_{k+1} \left(1 + R_k \hat{x}_{k+1} \frac{1}{\sigma} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& R_k \hat{x}_{k+1} \Big)^{-1} \hat{x}_{k+1}^T \frac{1}{\sigma} R_k \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(I - R_k \frac{\hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T}{\sigma + \hat{x}_{k+1}^T R_k \hat{x}_{k+1}} \right) R_k \quad (\text{A-8})\end{aligned}$$

(A-8) 式を (A-6) 式を代入すると

$$\begin{aligned}\hat{h}_{ik+1} &= \frac{1}{\sigma} \left(I - R_k \frac{\hat{x}_{k+1} \hat{x}_{k+1}^T}{\sigma + \hat{x}_{k+1}^T R_k \hat{x}_{k+1}} \right) \cdot \\ &\quad Q_k (\sigma R_k^{-1} \hat{h}_{ik} + \hat{x}_{k+1} y_{ik+1}) \\ &= \hat{h}_{ik} + \frac{R_k \hat{x}_{k+1}}{\sigma + \hat{x}_{k+1}^T R_k \hat{x}_{k+1}} (y_{ik+1} - \hat{x}_{k+1}^T \hat{h}_{ik})\end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

ここで,

$$G_{k+1} = R_k \hat{x}_{k+1} / (\sigma + \hat{x}_{k+1}^T R_k \hat{x}_{k+1}) \quad (\text{A-10})$$

と置くと,

$$\hat{h}_{ik+1} = \hat{h}_{ik} + G_{k+1} (y_{ik+1} - \hat{x}_{k+1}^T \hat{h}_{ik}) \quad (\text{A-11})$$

となる。(A-9) 式をマトリクス形式で書くと (21) 式が得られ, (A-10), (A-8) 式が (22), (23) 式に対応する。