非線形システムにおける跳躍現象の位相解析[†]

——マルチ・バイブレータ——

知 沢 清 之*

The Topological Analysis of Jump Phenomena in Nonlinear Systems

——Multi-Vibrator——

Kiyoyuki TCHIZAWA*

The purpose of this thesis is to deal with jump phenomena in nonlinear systems from a topological point of view. As a typical example of such a nonlinear system we take up an electric circuit system called multi vibrator.

In the beginning, we explain ordinary phase plane analysis of the above system in order to compare with topological analysis and then describe jump phenomena on a phase plane. Secondly, we represent multi vibrator system as an oriented graph with 6 nodes and 9 branches. The currents and the voltages in the branches of the system can be specified on 9-dimensional vector space respectively. Consequently we consider the system as two manifolds in R^{18} . So we construct two differentiable manifolds which are 9-dimensional Kirchhoff space K^9 and 9-dimensional branch characteristics space A^9 where K^9 is a linear subspace determined by the Kirchhoff laws and A^9 is a space specified by resistor branches and capacitor branches. Then the dynamical system is described on the configuration space $\Sigma^9 = K^9 \cap A^9$ which inverse function theorem guarantees. Moreover we derive the equation of the state on which two manifolds K^9 and A^9 are non-transversal systematically. As a result of this derivation we can see constructively that the transversality condition does not hold on the jump points of multi vibrator. It is also shown, however, that there is a state on which jump phenomena do not occur though the transversality is destroyed. This fact gives us a conjecture that Morse Index will classify the

jump points. The above approach will be applied to not only electric circuit systems but also other types of nonlinear systems.

Keyword: nonlinear system, manifold, irregularity, jump phenomenon, electric-electronic-circuit

1. はじめに

非線形の微分方程式, $\dot{x} = f(x)$, ($x \in R^n$, $f: R^n \rightarrow R^n$) で表現される対象を, 一般に非線形システムと呼ぶことにする. この対象は様々で, 経済, 生態, ゲーム, 電気回路など多岐にわたっている. ある非線形システムのクラスでは, 跳躍現象が起ることが古くから知られている. 本論文で紹介する, 位相解析による新手法と比較するために, はじめに従来の状態変数法によって跳躍現象をもつ, 2次元の電気系システムの位相面解析¹⁾を行う. この方法によると, 跳躍の出発点の軌跡が状態空間上の曲線として表現される. 跳躍後の到達点の軌跡は, たとえばコンデンサのエネルギー保存という自然な条件から求められ, 同じように曲線で表現される. 跳躍現象とは, この位相面上での軌道 (解曲線) の跳躍そのもののことである.

一方, 近年, 多様体の概念を電気回路に持ち込むことによって, 多様体上に定義された微分方程式として, システムを定式化する方法が開発されている²⁾. この方法は, キルヒホッフ則によって構成される線形部分空間 K と, 回路のグラフ上の枝特性空間 A の共通部分, すなわち配置空間 Σ 上でシステムを記述する. この方法で, 時間を固定することによって, 多様体 A を静的構造にみなすと, 跳躍現象は多様体 A の接空間の勾配ベクトルと, 多様体 K の接空間の勾配ベクトルが1次独立 (横断性条件が成立) でない場所で起る. 跳躍後の到達点は, 多様体 Σ を定義してい

[†] 第3回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 56.1)

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received March 13, 1981)

(Revised November 30, 1981)

Fig. 1 Multi vibrator system

る座標近傍系を構成する関数と、跳躍前後の自然な、エネルギー保存の条件によって、 Σ 上に表わされる。すなわち、跳躍現象が起る場合には、 Σ 上で多様体 A と多様体 K を分離する支持超平面が存在するのである。このように、多様体の概念を用いることによって、跳躍現象だけでなく、多様体 K と多様体 A の交叉の仕方に特異な状態が生じる場合を、定性的にかつ定量的に、統一的に捉えることができる。たとえばモース指標などを使って、特異状態を分類できる。本論文では典型的な発振器、マルチ・バイブレータを例として取り扱い、跳躍点の性質を明確に示し、新手法の仕組と有用性を明らかにする。 R (抵抗), L (インダクタ), C (コンデンサ) の 3 要素を、簡単かつ明瞭に扱える利点から、真空管を使用しているこの発振器のシステムを例に取ったが、電位誘導形のトランジスタ回路である、MOSFET とまったく同じ構造に表現可能なことがわかっているので、この方面の応用にも役立つと考えられる。

2. 電気回路のグラフ表現

イ・エム・カプチンスキーによって、マルチ・バイ

Fig. 2 Graph of multi vibrator

Fig. 3 Characteristic curve of vacuum tube A B

ブレータは以下の条件のもとに解析されている。真空管の特性曲線は、Fig. 3 で与えられる原点对称な関数 f とみなすことにする。すなわち、

$$I_1 = f(V_8)$$

$$I_2 = f(V_7)$$

である。このとき、

<条件 1> 二つの 3 極管

の特性曲線の傾斜は一定、

<条件 2> 陽極抵抗は格子抵抗に比べて非常に小さい、

<条件 3> 格子電流は流れない、

が、自然な前提である。この条件下で、電気回路をグラフ (Fig. 2) に変形することができる。

グラフと条件 2 から明らかなように、

$$I_1 \doteq I_4 = f(V_8)$$

$$I_2 \doteq I_5 = f(V_7)$$

である。グラフ上の枝表現において、真空管は可変抵抗として扱っている。しかしながら、実際には、条件 1 によって、Fig. 3 の破線で示される f の線形近似を用いる。

3. 位相面による表現

格子電位 V_7, V_8 を状態変数として位相面解析を行う。Fig. 1 で、電圧に関してシステムを表現すると次式

$$E = R_a I_1 + (1/C) \int I_3 dt + V_7$$

$$E = R_a I_2 + (1/C) \int I_6 dt + V_8$$

が成り立つことがわかる。このとき、

$$df(V_8)/dV_8 = S(V_8)$$

$$df(V_7)/dV_7 = S(V_7)$$

さらに、

$$K(V_8) = R_a S(V_8)$$

$$K(V_7) = R_a S(V_7)$$

$$\tau = CR_c$$

と置いて、上式の両辺を時間で微分して整理すると、

$$\tau \dot{V}_8 = \frac{K(V_7)V_7 - V_8}{1 - K(V_7)K(V_8)} \triangleq P(V_8, V_7)$$

$$\tau \dot{V}_7 = \frac{K(V_8)V_8 - V_7}{1 - K(V_7)K(V_8)} \triangleq Q(V_8, V_7)$$

を得る。このとき、 $K(V_i)$ ($i=7, 8$) はカスケードの増幅率、 τ は格子閉回路の時定数である。関数 P, Q の分子は、特に曲線

$$\Gamma_1; V_7 = K(V_8)V_8$$

$$\Gamma_2; V_8 = K(V_7)V_7$$

上で0となる (Fig. 4). Γ_1 は位相平面 $(V_8, V_7) \in R^2$ 上で軌道の傾斜が0, Γ_2 は傾斜が ∞ となる曲線を表わしている. $K(0) = K_0 \neq 1$ のとき, 原点は平衡点である. Γ_1 と Γ_2 の原点での微係数を $\Gamma_{10}', \Gamma_{20}'$ として, $\Gamma_{10}' > \Gamma_{20}'$ とすると, $K_0^2 > 1$ となり, Γ_1 と Γ_2 は原点以外で2ないし3個の交点をもつことがわかる. 関数 P, Q の分母は, 特に曲線

$$\Gamma; K(V_7)K(V_8) = 1$$

上で0になる. すなわち, 跳躍可能点になる. 真空管の特性曲線 f が, 原点を対称とする S 字曲線であるから, たとえば関数 K を, ガウス曲線

$$K(V_i) = K_0 \exp(-(V_i/\sigma)^2), i=7, 8$$

σ : 増幅率が最大増幅率の $1/e$ になるときの制御格子電圧 (定数)

で近似すると, Γ は

$$V_7^2 + V_8^2 = 2\sigma^2 \ln K_0$$

となり, 原点を中心とする円となる. 曲線 K が与えられたことによって, システムの解曲線は決定する. 曲線 Γ_1 と曲線 Γ_2 の交点は, 曲線 Γ 上に存在することがわかる. さらに曲線 Γ 上で, 2章で与えたコンデンサのエネルギー保存の条件2を考慮すると,

$$(1/C) \int I_3 dt = E - V_7 - R_a f(V_8)$$

$$(1/C) \int I_6 dt = E - V_8 - R_a f(V_7)$$

が跳躍時に一定に保たれるから, 跳躍後の到達点 (V_8', V_7') は跳躍の出発点, (V_8, V_7) と

$$V_7 + R_a f(V_8) = V_7' + R_a f(V_8')$$

$$V_8 + R_a f(V_7) = V_8' + R_a f(V_7')$$

なる関係をもつことがわかる. 関数 f の線形近似によって, 上式から誘導される写像

$$H: (V_8, V_7) \rightarrow (V_8', V_7')$$

が同相であることが, 容易に確かめられる. この写像によって, Γ_1 と Γ_2 の点を除いた Γ 上で, 跳躍時

Fig. 4 Amplification factor curve of cascade and curve of Γ

の状態遷移がわかり, 跳躍後の到達点の軌跡 (曲線 $\hat{\Gamma}$) が求められる. 原点が鞍点であることと, $V_7 = V_8$ と Γ の交点 $(N_1$ と $N_2)$ で跳躍が起きないことから, 最終的に Fig. 5 を得ることができる. ただし Fig. 5 は $K_0 > 1$ のときで, Γ_1 と Γ_2 の交点が3個の場合である. エネルギー保存条件が与える, 跳躍前と跳躍後の状態を関係付けている同相写像 H は, 弧 $\hat{N}_1 E$ を曲線 $N_1 F$ に移す. 曲線 Γ の点を時計回りに一周すると, それに対応して移る曲線 $\hat{\Gamma}$ の点は, 反時計回りに一周する. エヌ・ア・ジェレツォフ¹⁾ による, 真空管の特性曲線 f を区分的線形近似した場合の詳しい解析によって, 軌道の点は A から B に跳躍し, B から C に連続的に動き, 再び跳躍し……, このようにして, やかて唯一の断続的な周期軌道, $D-E-F-G$ に収束する.

4. 多様体による表現

4.1 多様体の構造と横断性の定義

2章で構成した回路のグラフ (Fig. 2) から, システムをキルヒホッフ空間 K と, 枝特性空間 A の二つの可微分多様体に表現する. 空間 K は基本カット・セット行列と, 基本ループ行列を用いて構成される, 線形部分空間である. 空間 A は時間をパラメータにして表現されるものであるが, 時間を任意に固定した空間であるとみなす. S. Smale⁷⁾ は空間 A を静的構造と動的構造に分けて議論しているが, 本論文では, 動的要因である微分演算子 D が, 時間に対応して決定するスカラー値であるから, 動的構造も時間を固定することによって, その時間で静的構造であるとみなして, 跳躍現象の位相的特徴を, 簡単な線形方程式を解くことによって与える.

Fig. 5 Phase plane analysis of multi vibrator

グラフの各枝の電流, 電圧を成分とするベクトルを

$$\mathbf{I}=(I_1, \dots, I_9), \quad \mathbf{V}=(V_1, \dots, V_9)$$

とするとき, グラフの第 i 結合点 ($i=1, \dots, 5$) における電流の収支の関係と, 第 $(i-5)$ 閉路 ($i=6, 7, 8, 9$) の電位の関係を

$$f_i(\mathbf{I}; \mathbf{V})=0, \quad i=1, \dots, 9$$

とする. このときキルヒホッフ空間 K は,

$$K=\{(\mathbf{I}; \mathbf{V}) | f_i(\mathbf{I}; \mathbf{V})=0, \quad i=1, \dots, 9\}$$

と表現される. f_i は線形写像であるから, 空間 K は 9 次元線形部分空間として,

$$K^9=\{(\mathbf{I}; \mathbf{V}) | N_K \cdot (\mathbf{I}; \mathbf{V})^t = \mathbf{0}\}$$

$$N_K=[\nabla f_1^t, \dots, \nabla f_9^t]^t$$

と表わすことができる. 一般に線形写像 $h: \mathbf{x} \rightarrow M\mathbf{x}$, ($\mathbf{x} \in R_n$, M は $(m \times n)$ 行列) で, 集合 $h^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} | M\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ を $\text{Ker } M$ で表わす. これに従えば, $K^9 = \text{Ker } N_K$. ただし, 写像 N_K は (9×18) 行列であって, 与えられたグラフの基本カット・セット行列 $A(5 \times 9)$ と, 基本ループ $B(4 \times 9)$ 行列を用いて,

$$N_K = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$$

と表現できる. ここで ∇f_i は f_i の勾配ベクトル, t は行列 (またはベクトル) の転置を表わす. したがって

$$K^9 = \left\{ (\mathbf{I}; \mathbf{V}) \left| \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}^t = \mathbf{0} \right. \right\}$$

である. ところで, キルヒホッフ空間 K は行列 A と行列 B で, $\text{Ker } A \times \text{Ker } B$ と表現される空間であるが, K^9 は確かにこの空間を表わしている. n を結合点の個数, b を枝の本数, l を閉路の個数とすると,

$$\text{Ker } A = \{ \mathbf{I} | A \cdot \mathbf{I}^t = \mathbf{0} \}$$

$$\text{Ker } B = \{ \mathbf{V} | B \cdot \mathbf{V}^t = \mathbf{0} \}$$

であるから $\text{Ker } A$ の次元は, 行列 A が $((n-1) \times b)$ 行列であることから, $(b-(n-1))$ 次元, $\text{Ker } B$ の次元は, 行列 B が $(l \times b)$ 行列であることから, $(b-l)$ 次元である. したがって, $\text{Ker } A \times \text{Ker } B$ の次元は,

$$(b-(n-1)) + (b-l) = 2b - (l+n-1)$$

である. **Fig. 2** が単純グラフであることから,

$$l = b - n + 1$$

の関係が成立するので, 結局上の空間は b 次元線形部分空間であることがわかる. $\text{Ker } N_K$ の次元は, 行列 N_K が $((n-1+l) \times 2b)$ 行列であることと, 同様に単純グラフの性質から,

$$2b - (n-1+l) = b$$

次元であり, $\text{Ker } A \times \text{Ker } B$ の次元と一致する. したがって, $\text{Ker } N_K$ はキルヒホッフ則を表現している多様体であることがわかる.

つぎにグラフの第 j 枝 ($j=1, \dots, 9$) の枝特性関数を,

$$g_j(\mathbf{I}; \mathbf{V})=0, \quad j=1, \dots, 9$$

とする. このとき枝特性空間 A は,

$$A = \left\{ (\mathbf{I}; \mathbf{V}) \left| \begin{array}{l} g_j(\mathbf{I}; \mathbf{V})=0, \quad j=1, \dots, 8 \\ g_9(\mathbf{I}; \mathbf{V})=E, \quad E \text{ は起電力} \end{array} \right. \right\}$$

と表現される. 空間 A は時間を固定して, 微分演算子 D を陽表示する形式で, 9 次元アフィン空間として

$$A^9 = \left\{ (\mathbf{I}; \mathbf{V}) | N_A \cdot (\mathbf{I}; \mathbf{V})^t = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E \end{pmatrix} \right\},$$

$$N_A = [\nabla g_1^t, \dots, \nabla g_9^t]^t$$

と表わすことができる. ただし, N_A は (9×18) 行列であって, ∇g_i は g_i の勾配ベクトルである. 電流 $\mathbf{I}$ と電圧 $\mathbf{V}$ を, 抵抗の枝の電流と電圧として, それぞれ $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{V}_R$, キャパシタの枝の電流と電圧をそれぞれ $\mathbf{I}_C$, $\mathbf{V}_C$ とし, 枝の番号を適当に付け変えることにより,

$$\mathbf{I}=(\mathbf{I}_R | \mathbf{I}_C | \mathbf{I}_9), \quad \mathbf{V}=(\mathbf{V}_R | \mathbf{V}_C | E)$$

と表わすことができる. さらに,

$$\mathbf{I}_R=(I_{R_i}), \quad \mathbf{V}_R=(V_{R_i}), \quad i=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\mathbf{I}_C=(I_{C_i}), \quad \mathbf{V}_C=(V_{C_i}), \quad i=1, 2$$

とすると,

$$\sum_{n=1}^6 R_{mn} I_{R_n} = V_{R_m}, \quad m=1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\sum_{n=1}^2 C_{mn} \dot{V}_{C_n} = I_{C_m}, \quad m=1, 2$$

である. 行列 N_A は, 微分演算子 D_m と行列 $[R_{mn}]$, $[C_{mn}]$ を用いて,

$$N_A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} (-R_{mn}) & & & I & & & & \\ & I & & & & & (-D_m C_{mn}) & \\ & & & & 0 & & & 1 \end{array} \right]$$

(ただし, I は単位行列)

と表わすことができる. このとき明らかに,

$$A^9 = \left\{ (\mathbf{I}; \mathbf{V}) | N_A \cdot (\mathbf{I}; \mathbf{V})^t = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ E \end{pmatrix} \right\}$$

である. 枝特性 g_i がすべて可微分であるから, 座標近傍系を構成する写像 N_A は可微分, また同相である. さらに, 2 章で述べた条件 1 と, D_m があるスカラー量に対応することから, A^9 は可微分多様体であり, かつアフィン空間であるとみなすことができる.

つぎに横断性の定義について述べる. k 次元多様体 $K^k \subset R^n$ と λ 次元多様体, $A^\lambda \subset R^n$ が横断性をもつ (横断的に交る) とは, $\forall x \in \Sigma = K^k \cap A^\lambda$ での K^k の接空間と, A^λ の接空間をそれぞれ, $T_x(K^k)$, $T_x(A^\lambda)$ とするとき, $\forall v \in R^n$ に対して $v = v_1 + v_2$ となる. $v_1 \in T_x(K^k)$, $v_2 \in T_x(A^\lambda)$ が存在することをいう. ところで, K^9, A^9 の定義からすでに, $x \in \Sigma$ で

$$T_x(K^9) = \text{Ker } N_K = K^9$$

$$T_x(A^9) = \text{Ker } N_A$$

である。ここで、 K^9 と $\text{Ker } N_A$ の勾配ベクトル、 n_{K^9} と n_{A^9} を定義する。 n_{K^9} は ∇f_i ($i=1, \dots, 9$) の 1 次結合、また同様に n_{A^9} は ∇g_i ($i=1, \dots, 9$) の 1 次結合、すなわち

$$n_{K^9} = \sum_{i=1}^9 \alpha_i \nabla f_i, \quad \alpha_i; \text{ 任意の定数}$$

$$n_{A^9} = \sum_{i=1}^9 \beta_i \nabla g_i, \quad \beta_i; \text{ 任意の定数}$$

であるとする。横断性の定義から明らかに、 n_{K^9} と n_{A^9} が R^{2n} で 1 次独立であることと、空間 K と空間 A が横断性をもつ (横断性条件が成り立つ) ことは同値であるから、これを用いて横断性を判定することにする。なお、 k 次元多様体 K^k と λ 次元多様体 A^λ が横断性をもつとき、 Σ は $(k+\lambda-n)$ 次元の多様体を構成することが、逆関数定理を用いて証明されている⁹⁾。

4.2 横断性と跳躍現象

1 章で述べたように、キルヒホッフ空間 K と枝特性空間 A が横断性をもたない場合、すなわち空間 K の接空間の勾配ベクトル n_{K^9} と、空間 A の接空間の勾配ベクトル n_{A^9} が 1 次従属の場合の関係式を導くために、行列 N_K と行列 N_A の具体的な形を Fig. 2 から作成する。前節で述べたように、キルヒホッフ空間 K とその接空間 K^9 は、

$$K = \{(\mathbf{I}; \mathbf{V}) \mid f_i(\mathbf{I}; \mathbf{V}) = 0, \quad i=1, \dots, 9\}$$

$$K_9 = \{(\mathbf{I}; \mathbf{V}) \mid N_K \cdot (\mathbf{I}; \mathbf{V})^t = 0\}$$

ただし、

$$N_K = [\nabla f_1^t, \dots, \nabla f_9^t]$$

である。行列 N_K は、各結合点における電流の収支の関係と、各閉路における電位の関係から求められる (独立なものだけ取り出す)。すなわち、第 1 結合点で

$$f_1(I_1, I_2, I_9) = I_1 + I_2 - I_9 = 0$$

$$\nabla f_1 = \left(1, 1, \dots, -1, \dots\right)$$

同様にして、

$$f_2(I_1, I_3, I_4) = -I_1 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\nabla f_2 = \left(-1, 0, 1, 1, \dots\right)$$

$$f_3(I_2, I_5, I_6) = -I_2 + I_5 + I_6 = 0$$

$$\nabla f_3 = \left(0, -1, \dots, 1, 1, \dots\right)$$

$$f_4(I_3, I_7) = -I_3 + I_7 = 0$$

$$\nabla f_4 = \left(\dots, -1, \dots, 1, \dots\right)$$

$$f_5(I_6, I_8) = -I_6 + I_8 = 0$$

$$\nabla f_5 = \left(\dots, -1, 0, 1, \dots\right)$$

また各閉路で、

$$f_6(V_3, V_4, V_7) = V_3 - V_4 + V_7 = 0$$

$$\nabla f_6 = \left(\dots, 1, -1, \dots, 1, \dots\right)$$

$$f_7(V_1, V_2, V_4, V_5) = V_1 - V_2 + V_4 - V_5 = 0$$

$$\nabla f_7 = \left(\dots, 1, -1, 0, 1, -1, \dots\right)$$

$$f_8(V_5, V_6, V_8) = V_5 - V_6 - V_8 = 0$$

$$\nabla f_8 = \left(\dots, 1, -1, 0, -1, \dots\right)$$

$$f_9(V_2, V_6, V_8, V_9) = V_2 + V_6 + V_8 - V_9 = 0$$

$$\nabla f_9 = \left(\dots, 1, \dots, 1, 0, 1, -1, \dots\right)$$

である。したがって、基本カット・セット行列 A と基本ループ行列 B は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & -1 \\ -1 & & 1 & 1 & & & & \\ & -1 & & 1 & 1 & & & \\ & & -1 & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} & 1 & -1 & & 1 & & & \\ 1 & -1 & & 1 & -1 & & & \\ & & & 1 & -1 & & -1 & \\ & 1 & & & 1 & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

であることがわかる。

一方、枝特性空間 A とそのアフィン空間 A^9 は

$$A = \left\{(\mathbf{I}; \mathbf{V}) \mid \begin{array}{l} g_j(\mathbf{I}; \mathbf{V}) = 0, \quad j=1, \dots, 8 \\ g_9(\mathbf{I}; \mathbf{V}) = E, \quad E \text{ は起電力} \end{array} \right\}$$

$$A^9 = \left\{(\mathbf{I}; \mathbf{V}) \mid N_A \cdot (\mathbf{I}; \mathbf{V})^t = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} \right\}$$

ただし、

$$N_A = [\nabla g_1^t, \dots, \nabla g_9^t]^t$$

である。行列 N_A は、各枝の特性から求められる。すなわち、第 1 枝で

$$g_1(I_1, V_1) = V_1 - R_a I_1 = 0$$

$$\nabla g_1 = \left(-R_a, \dots, 1, \dots\right)$$

同様に以下が求まる。

$$g_2(I_2, V_2) = V_2 - R_a I_2 = 0$$

$$\nabla g_2 = \left(0, -R_a, \dots, 1, \dots\right)$$

$$g_3(I_3, V_3) = I_3 - C \dot{V}_3 = 0$$

$$\nabla g_3 = \left(\dots, 1, \dots, -C D_1, \dots\right)$$

$$g_4(I_4, V_8) = I_4 - S(V_8) V_8 = 0$$

$$\nabla g_4 = \left(\dots, 1, \dots, -S(V_8), 0\right)$$

$$g_5(I_5, V_5) = I_5 - S(V_7) V_7 = 0$$

$$\nabla g_5 = \left(\dots, 1, \dots, -S(V_7), \dots\right)$$

$$g_6(I_6, V_6) = I_6 - C \dot{V}_6 = 0$$

$$\nabla g_6 = \left(\dots, 1, \dots, -C D_2, \dots\right)$$

$$*4 = CD_8$$

である

ここで、 N_K, N_A を行ベクトルからなる行列とみて、それぞれの第 i 行を α_i, β_i 倍 ($i=1, \dots, 9$) して、 nK^0, nA^0 を求める。空間 K と空間 A が横断性をもたないときに、 $nK^0 = nA^0$ で、両ベクトルは 1 次従属であり、つぎにこの場合の関係を導くことにする。 nK^0 と nA^0 を以下に示す。

$$\begin{aligned} nK^0 = & (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_5, \alpha_4, \\ & \alpha_5, -\alpha_1, \alpha_7, \alpha_9 - \alpha_7, \alpha_6, \alpha_7 - \alpha_6, \alpha_8 - \alpha_7, \\ & \alpha_9 - \alpha_8, \alpha_6, \alpha_9 - \alpha_8, -\alpha_9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nA^0 = & (-R_a\beta_1, -R_a\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, -R_c\beta_7, \\ & -R_c\beta_8, 0, \beta_1, \beta_2, 0, 0, 0, \beta_3*1 - \beta_5S(V_7) \\ & + \beta_6*3 + \beta_7, \beta_3*2 - \beta_4S(V_8) + \beta_6*4 + \beta_8, \beta_9) \end{aligned}$$

$nK^0 = nA^0$ の関係式から連立方程式、

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0$$

$$\beta_2 = \alpha_9 - \alpha_7 = \alpha_9 - \alpha_8 = 0$$

$$\alpha_2 = R_a\beta_1$$

$$\alpha_3 = R_a\beta_2$$

$$\alpha_2 - \alpha_4 = \beta_3$$

$$\alpha_3 - \alpha_5 = \beta_6$$

$$\alpha_4 = -R_c\beta_7$$

$$\alpha_5 = -R_c\beta_8$$

$$\alpha_6 = \beta_3*1 - \beta_5S(V_7) + \beta_6*3 + \beta_7$$

$$\alpha_9 - \alpha_8 = \beta_3*2 - \beta_4S(V_8) + \beta_6*4 + \beta_8$$

が得られる。これを変形すると、

$$\beta_3 = R_c\beta_7$$

$$\beta_6 = R_c\beta_8$$

$$\beta_3*1 + \beta_6*3 + \beta_7 = 0$$

$$\beta_3*2 + \beta_6*4 + \beta_8 = 0$$

さらに変形して、 $*1, *2, *3, *4$ を代入すると

$$\beta_7(1 + \tau D_7) + \beta_8 \tau K(V_7) D_7 = 0$$

$$\beta_8(1 + \tau D_8) + \beta_7 \tau K(V_8) D_8 = 0$$

β_7, β_8 を消去すれば、

$$(K(V_7)K(V_8) - 1)D_7D_8 - \frac{1}{\tau}(D_7 + D_8) - \frac{1}{\tau^2} = 0$$

となる。ここで微分演算子 D_k ($k=7, 8$) と、3 章のシステム表現 (微分方程式) における跳躍現象の関係を、考察することにする。 D_k のとりうる値は、

(i) ゼロを除く有限値、

(ii) ゼロ、

(iii) 無限大、

である。したがって 9 通りの場合をつくして、状態空間上の場合に対応させれば、すべての関係が明らかにされたことになる。以下にこれを示す。

(1) $D_7: (i), D_8: (i)$ の場合、

曲線 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ を除く全領域と、 $V_7 = V_8$ と Γ の交点。実際このとき、

(イ) 曲線 Γ 上でない場合、

$$\tau D_7 V_7 = \frac{K(V_8)V_8 - V_7}{1 - K(V_7)K(V_8)}$$

$$\tau D_8 V_8 = \frac{K(V_7)V_7 - V_8}{1 - K(V_9)K(V_8)}$$

なる関係から D_7, D_8 を求めて、これを上式 (横断性をもたない場合の関係式) に代入すれば、等号を満たす。したがって横断性をもたない。

(ロ) 曲線 Γ 上の場合、

$V_7 = V_8$ のときに、 $D_7 = D_8 = -1/\tau$ となる。

一般に、曲線 Γ 上で $D_k < \infty$ ($k=7, 8$) のとき、 $D_{k'} = -1/\tau$ ($k'=8, 7$) となる (k, k' ; 同順)。

(2) $D_7: (i), D_8: (ii)$ の場合、

曲線 Γ, Γ_1 との交点を除く曲線 Γ_2 。

この曲線上では (1) と同様にして上式が満たされていることがわかり、横断性をもたない。

(3) $D_7: (i), D_8: (iii)$ の場合、

曲線 Γ_1 に沿って曲線 Γ に到る軌道をもつ、曲線 Γ の点、上式を D_7D_8 で両辺を割って、 D_7 を代入することにより、等号が満たされることがわかり、横断性をもたない。

(4) $D_7: (ii), D_8: (i)$ の場合、

曲線 Γ, Γ_2 との交点を除く曲線 Γ_1 。(2) と同様に上式は満たされ、横断性を満たさない。

(5) $D_7: (ii), D_8: (ii)$ の場合、

横断性を満たす点として原点 (平衡点)。さらに

(1), (2), (3), (4), (7), (9): NON TRANSVERSE
(5): TRANSVERSE

Fig. 6 State of D_k ($k=7, 8$) and transversality

曲線 Γ 上の点で、曲線 Γ_1, Γ_2 の両方に沿って曲線に到る軌道をもつ点、または $V_7=V_8$ との交点。(1)の(ロ)を考慮すれば、後者は存在しない。前者はその性質を満たす軌道が存在しない。

- (6) D_7 : (ii), D_8 : (iii)の場合,
(3)と同様であるが、(1)の(ロ)から $D_7=-1/\tau \neq 0$ となり、この点は存在しない。
- (7) D_7 : (iii), D_8 : (i)の場合,
(3)と対称で同様。曲線 Γ_2 に沿って曲線 Γ に到る軌道をもつ、曲線 Γ の点。
- (8) D_7 : (iii), D_8 : (ii)の場合,
(6)と対称で同様。
- (9) D_7 : (iii), D_8 : (iii)の場合,
曲線 Γ_1, Γ_2 を除く曲線 Γ 上の点。横断性はない。

以上の結果、 (V_8, V_7) 状態空間上の原点を除くすべての点で横断性をもたないことがわかった。このとき、跳躍現象は D_k ($k=7, 8$) の少なくとも一方が発散する場合、((3), (7), (9)の場合)のみに起きていることが、明らかにされた (Fig. 6)。

5. おわりに

以上でマルチ・バイブレータの多様体の概念を用いた新手法の解析を終る。 $n_{K^*}=n_A$ 、すなわち空間 K と空間 A が横断性をもたないときに、微分演算子の少なくとも一方が発散すれば、跳躍現象が生じることがわかった。したがって、横断性条件が成り立たない場合に、多様体 Σ 上にモース関数を構成することによ

り、そのヘッセ行列の指標 (モース指標) を考察すれば、それは跳躍現象 (あるいは跳躍点) を分類するであろうと考えられる。詳細は後の課題としているが、つぎにマルチ・バイブレータとは別種類の跳躍点の軌跡をもつ、ブロッキング・オシレータの位相解析を行う予定である。さらに一般的に言えば、電気-電子回路システムにとどまらず、経済現象や最適制御問題もシステムをグラフ構造に変換することによって、この解析に持ち込むことが可能である。状態変数法では裏に隠されていた関係を、全て陽に記述できるので、新たな観点が与えられると考えられる。

最後に、日頃ご指導いただいている慶応義塾大学管理工学科 関根智明 西野寿一両助教授、ならびに発振器の詳細な性質についてご教示いただいた同大学電気工学科 鈴木登紀男教授に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) N. M. Калцинский (関根智明訳): 電子回路と振動論, 第7章, 東京図書 (1959)
- 2) M. Iri: Network Flow, Transportation and Scheduling, Academic Press (1969)
- 3) V. Guillemin and A. Pollack: Differential Topology, Prentice-Hall (1974)
- 4) R. Rohrer: Circuit Theory, McGraw-Hill (1970)
- 5) S. Ichiraku: On the Transversality Conditions in Electrical Circuits, Yokohama Math. J., **25**-1, 85/89 (1977)
- 6) T. Matsumoto: On the Dynamics of Electrical Networks, J. Diff. Equations, **21**-1, 179/196 (1976)
- 7) S. Smale: On the Mathematical Foundations of Electrical Circuit Theory, J. Diff. Geometry, **7**-1 & 2, 193/210 (1972)