帯関数モデル形一対比較法のための 数値処理法とその解領域[†]

小林 彬*・坂本 泰彦*

A New Solving Method for Paired Comparison Method Based on Band Function Model and It's Solution Domain

Akira KOBAYASHI* and Yasuhiko SAKAMOTO*

This paper proposes a new method of constructing interval scales from numerical data obtained by paired comparisons. This method is based on band function model.

Band function model has been suggested by Kobayashi and Shibata to construct a reasonable interval scale. However, Kobayashi-Shibata's iterative algorithm gives only one scale of various scales which should be given as solutions, and the accuracy is affected by the choice of initial value.

First, the authors explain that information contained in paired comparisons data can be transformed reasonably into simultaneous homogeneous linear inequalities.

Next, effective algorithm is introduced to solve the inequalities to obtain interval scales. The solution domain is given as a set of inner points of a polyhedral convex cone, and expressed with a set of edge vectors. As the extent of the solution domain indicates the fuzziness, further discussion on precision has become able to be done.

This method is compared with Kobayashi-Shibata's method, and the solution of the latter method is shown to be located a step inside of the boundary of this method's solution domain.

Finally, the proposed method is applied to the experimental data obtained from subjective comparisons of weights. The obtained interval scale shows good agreement with the real weighing scale.

Keyword: band function model, paired comparisons, linear inequalities, solution domain, sensory evaluation

1. ま え が き

近年、計測工学の中で、官能検査の占める重要性が指摘されている^{1),2)}。この分野で用いられる各種測定法の中で、一対比較法は高精度の間隔尺度構成法として認識され、よく用いられている³⁾。一対比較データの数値処理法としては、比較判断の構造としてどのようなモデルを仮定するかにより、さまざまな方法が考えられるが中でも Scheffé の方法、Thurstone の方法はよく用いられているようである。これらの方法は、手計算で解が求まる簡便さが大きな利点であるが、比較判断の基本的性格として直線性を仮定している。このため、より実態に則した一般的なモデルに基づく数値処理法が望まれる。特に、近年計算機の発達により、計算量に対する制約が大幅に緩められていることを考えると、この分野について工学的に再考することは有意義であろう。

一方、小林・芝田によって提案された帯関数モデル⁴⁾は、従来のほとんどのモデルを包括的に含むもので、広い適用範囲をもつと考えられる。そこにおいては、ある適当な評価関数が定められ、最急降下法により逐次的に評価関数が零になるような間隔尺度値が1組求められているが、評価関数を零にする解はユニークではなく、ある広がり（解領域）をもつことが示唆されている⁴⁾。本論文は、帯関数モデルに基づき、その解領域を余さず求める方法に関するものである。

この方法は、モデルの柔軟さから、

- (i) 比較判断に非直線性があってもよい
- (ii) 必ずしもすべての比較対の判断結果を必要としない

という長所をもつほか

- (iii) 判断結果に入っているあいまいさやバラツキの程度を不感帯幅の大きさとして知ることがで

[†] 第17回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭53・8)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo
(Received September 4, 1981)

きる

- (iv) 解を領域で与えるため、あいまいさの議論が詳しくできる可能性を有する

という特長を備えている。

以下では、帯関数モデルの概略と解領域を求める数値解法アルゴリズムを説明し、さらに重さの一对比較データに適用した例を示しながら本アルゴリズムの性質を考察し、その効用について述べる。

2. 帯関数モデルと連立同次線形不等式

2.1 帯関数モデル⁴⁾

N 個の対象を考え、その可能な対に関して一对比較判断を行うものとする。この場合、各対象 X_i に対応して仮想的に考えた心理的尺度を m_i とし、 X_i に対する X_j の比較判断の結果を数値的に φ_{ij} で表す。このとき、 φ_{ij} と m_i, m_j との間にはつぎの関係があるものとする。

$$f_d(m_j - m_i) \leq \varphi_{ij} \leq f_u(m_j - m_i) \quad (1)$$

$$i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$$

ここで $f_d(d)$, $f_u(d)$ は共に d に関するある単調増加関数である。

(1)式において $f_d(d)$ と $f_u(d)$ とに狭まれる領域は比較判断に含まれるあいまいさやバラツキの範囲を表現し、また $f_d(d)$ と $f_u(d)$ が単調増加関数であることによって比較判断の平均的性格は $m_j - m_i$ と単調増加関係にあることが表現される。

われわれの目標は最終的に適切な m_i を決定することにあるが、われわれが最初手にするデータは φ_{ij} だけであり、 $f_d(d)$ や $f_u(d)$ についても単調増加性以外なんの前提も仮定していない。 φ_{ij} と $f_d(d)$, $f_u(d)$ の単調増加性のみから出発して、適切な m_i を求める方法を与えることが本論文の目的である。

2.2 不等式の導出

(1) 帯関数の幅が零の場合

まず説明をわかりやすくするために、(1)式において $f_d(d)$ と $f_u(d)$ の差が小さくなり、零になった極限を考える。この場合、(1)式はつぎのように書ける。

$$\varphi_{ij} = f(m_j - m_i); i, j \in \{1, \dots, N\} \quad (2)$$

$f(d)$: d に関する単調増加関数

(2)式に従って m_i, m_j から $\{\varphi_{ij}\}$ が決定される際、 $f(d)$ として異なる関数形を想定すれば、 φ_{ij} そのものの数値は変わるが、単調増加関数であるので φ_{ij} の大小関係は保存される。逆に、与えられた φ_{ij} からわれわれが得ることのできる m_i に関する情報は、単調増加性以外 $f(d)$ は未知であるがゆえにつぎのような不等式のみである。

$$\begin{aligned} \varphi_{qr} < \varphi_{st} &\iff f(m_r - m_q) < f(m_t - m_s) \\ &\iff m_q - m_r < m_t - m_s \\ &\iff -m_q + m_r + m_s - m_t < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

φ_{ij} のすべての対について (3) 式のような不等式を得れば、われわれは帯関数モデルの仮定のもとに、 φ_{ij} から得られるすべての情報を m_i に関する連立不等式に変換したことになる。すなわち、つぎのような連立同次線形不等式が一对比較判断から得られる最大限の情報である。

$$\begin{cases} -m_{q_1} + m_{r_1} + m_{s_1} - m_{t_1} < 0 \\ -m_{q_2} + m_{r_2} + m_{s_2} - m_{t_2} < 0 \\ \vdots \\ -m_{q_K} + m_{r_K} + m_{s_K} - m_{t_K} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

K : 大小関係の成立する φ_{ij} の対の数

結局、心理的尺度 m_i は (4) 式を満たすものとして与えられるが、間隔尺度では原点と単位の取り方に任意性があるので、一般性を失うことなくつぎの条件を付け加える。

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i^2 = 1 \quad (6)$$

以上により、問題は (4)~(6) 式の連立式を解くことに帰着される。

(2) 帯関数に幅がある場合

つぎに、判断にバラツキやあいまいさがある場合に対応して帯関数が幅をもつ場合を考える。便宜上、帯関数の φ_{ij} 軸方向の幅 $w(d)$ を次式で表わすことにする。

$$w(d) = f_u(d) - f_d(d) \quad (7)$$

このとき、ある φ_{qr} に注目し、ほかの φ_{ij} との大小関係から m_i に関する不等式をどのように導けばよいか考察する (Fig. 1 参照)。Fig. 1 において、実際 φ_{qr} が $f_d(m_r - m_q)$ から $f_u(m_r - m_q)$ の間のどの位置に布置するかは不明であるため、 φ_{qr} との差が $\varepsilon(m_r - m_q)$ より小さい φ_{st} , φ_{uv} に関して次式の関係が成立している場合がありうる。

Fig. 1 Band function model for paired comparisons

$$\begin{cases} 0 < \varphi_{s'i'} - \varphi_{qr} < \varepsilon(m_r - m_q) \\ m_r - m_q > m_{s'i'} - m_{s'} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} 0 < \varphi_{s'i} - \varphi_{qr} < \varepsilon(m_r - m_q) \\ m_r - m_q < m_{s'i} - m_{s'} \end{cases} \quad (9)$$

(8), (9)式からわかるように, 上述の状況において φ_{ij} 間の大小関係から m_i に関する不等式の不等号の向きは一意的に決まらないので, このままでは(3)式をいきなり適用することはできない. 一方, φ_{qr} との差が $w(m_r - m_q)$ よりも大きい φ_{uv} については, (3)式に準じたつぎの不等式が成立する(注1).

$$\varphi_{qr} + w(m_r - m_q) < \varphi_{uv} \implies m_r - m_q < m_v - m_u \quad (10)$$

ところで, われわれには $f_d(d)$, $f_u(d)$ の関数形は未知であるから $w(d)$ も未知である. そこで, $w(d)$ の代りに非負の実定数 ε を導入し, (10)式の代りにつぎの(11)式に基づいて m_i に関する不等式をたてる.

$$\varphi_{qr} + \varepsilon < \varphi_{uv} \implies m_r - m_q < m_v - m_u \quad (11)$$

このとき, もし ε の値が小さすぎれば(8)式に対応するケースが生じ, 不等号の向きが互いに逆転した不等式が得られるため, ほかの不等式と連立させた解は空集合になるであろう. ε を大きくしていけば, そのような不等式は順次取り除かれ, やがて, 不等号が逆転した不等式はすべて取り除かれる. そして, ε が $\varepsilon_{\max}$ 以上になれば, 連立不等式は m_i の真値を内点に含む解領域を与える. ただし $\varepsilon_{\max}$ は

$$\varepsilon_{\max} = \max_d w(d) \quad (12)$$

である.

そこで, ε の値を漸増させては(11)式に従って m_i に関する連立不等式を導出し, その連立不等式が解をもつような最小の ε の値 ε^* を用いて m_i を求めるアルゴリズムが考えられる. (ε^* と $\varepsilon_{\max}$ との関係については, 5章で適用例を示しながら説明する.)

結局, この場合にも問題はつぎの連立式を解くことに帰着される.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N m_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N m_i^2 = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} -m_{qk} + m_{rk} + m_{sk} - m_{tk} < 0; k \in \{1, \dots, K\} \end{cases} \quad (13)$$

(注1) φ_{qr} より小さい φ_{wx} については, (10)式の代りに次式を用いる.

$$\varphi_{qr} - w(m_r - m_q) > \varphi_{wx} \implies m_r - m_q > m_x - m_w$$

(注2) $\sum_{i=1}^N m_i = 0$ より未知数をつつ消去すれば, (15)式は $N-1$ 次元の同次線形連立不等式になる. 同次線形連立不等式の性質などについては文献5)による.

ただし, (13)式は

$$\varphi_{qkrh} + \varepsilon^* < \varphi_{shtk} \quad (14)$$

なる関係にある対象 $X_{qk}, X_{rk}, X_{sk}, X_{tk}$ の組すべてについて立てられた連立不等式であり, K はその連立不等式の個数である.

3. 解領域と解法のアルゴリズム(注2)

3.1 解領域

(13)式の連立不等式を, 行列を用いて表現すると次式となる.

$$Am = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{pmatrix} < 0 \quad (15)$$

$A: K \times N$ 行列, $a_k: N$ 次元横ベクトル

$m: N$ 次元縦ベクトル

A を係数行列, a_k を係数ベクトルと呼ぶこととする.

また, (5), (6)式を(16), (17)式に書き換える.

$$a_0 \cdot m = (1, 1, \dots, 1) \cdot m = 0 \quad (16)$$

$$m' \cdot m = 1 \quad (17)$$

(13), (16)式より次式が成立することは容易にわかる.

$$a_k \cdot a_0' = 0; k \in \{1, \dots, K\} \quad (18)$$

すなわち

$$\text{rank } A \leq N-1 \quad (19)$$

さらに, 連立不等式の物理的意味を考えて(20)式が成立しているものとする.

$$\text{rank } A = N-1 \quad (20)$$

さて, (15)式の中の一つの式

$$a_k \cdot m < 0 \quad (21)$$

の解は, N 次元ユークリッド空間内で原点をとおり a_k と直交する超平面によって定まる一つの開半空間である. (15)式の解はこれら K 個の共通部分である. さらに(16)式を連立させた解は((20)式の性質も考慮すると), 解が存在すれば, 原点を頂点とするある凸多面錐の内点全体になる.

この凸多面錐の各稜上に終点を取り, 原点を始点としたベクトルを稜ベクトルと呼び, $g_i; i \in \{1, \dots, r\}$ で表わす. また, $a_k; k \in \{1, \dots, K\}$ の中から, ほかの係数ベクトルの非負線形結合では表わせないものを抜き出し, 改めて $h_j; j \in \{1, \dots, s\}$ と表わす. すると, (15), (16)式の解領域は連立不等式に関する性質よりつぎのように表現できる⁵⁾.

$$\begin{aligned} & \{m | a_0 \cdot m = 0, Am < 0\} \\ & = \{m | a_0 \cdot m = 0, Hm < 0\} \\ & = \left\{ m | m = \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i, \lambda_i > 0 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

ただし

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_s \end{pmatrix}$$

ここで h_j が現れる理由はつぎのように説明できる。すなわち、一般に、連立不等式には冗長な不等式が含まれている。たとえば、

$$\begin{cases} a_1 \cdot m = -m_1 + m_2 + m_3 - m_4 < 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} a_2 \cdot m = -m_2 + m_4 + m_5 - m_6 < 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} a_3 \cdot m = -m_1 + m_3 + m_5 - m_6 < 0 \end{cases} \quad (25)$$

なる三つの不等式が与えられているとすると、(25)式は(23)、(24)式の各辺をそれぞれ加え合わせるにより導出されるから、(25)式はこの連立不等式から取り除いても差し支えない。(ただし(25)式と(24)式から(23)式を、あるいは(25)式と(23)式から(24)式を導出することはできず、取り除く不等式が一意に決まる点は、連立方程式と異なる点であり注意を要する。この点は、つぎの係数ベクトルの正線形結合性の所にも関連する)。このとき、 a_3 は a_1 と a_2 の正線形結合で表現できる。 A から H を抜き出すことは、(15)式のうち冗長な不等式を取り除いて解領域の決定に必要な十分な不等式を抜き出すことに相当する。そこで、 h_j を必要十分係数ベクトルと呼ぶ。また、一つの h_j は、解を定める凸多面錐の一つの辺 (face) を定めている。

なお、(17)式は解が原点から距離 1 の超球面上にあることを示している。そこで、稜ベクトルも長さ 1 に正規化する。

$$\|g_i\| = 1; i \in \{1, \dots, r\} \quad (26)$$

3.2 解法のアルゴリズム

本節では、前節で定義した表記法を用いて(15)、(16)式の連立式を解くアルゴリズムについて述べる。

まず、(16)式と、 A の n 行目までの不等式を連立させたときの解領域がつぎのように $\{^ng_i\}$ 、 $\{^nh_j\}$ によって与えられていたとする。

$$\begin{aligned} & \{m | a_0 \cdot m = 0, a_k \cdot m < 0; k \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{m | a_0 \cdot m = 0, ^nh_j \cdot m < 0; j \in \{1, \dots, s_n\}\} \\ &= \{m | m = \sum_{i=1}^n \lambda_i ^ng_i, \lambda_i > 0; i \in \{1, \dots, r_n\}\} \end{aligned} \quad (27)$$

このとき、 $n+1$ 行目の不等式 $a_{n+1} \cdot m < 0$ を付け加えて得られる解領域を規定する $\{^ng_i\}$ 、 $\{^nh_j\}$ は、以下の手順に従って与えられる。

- 1° $p_i = a_{n+1} \cdot ^ng_i; i \in \{1, \dots, r_n\}$ を求め、 ng_i を p_i が負、零、正になることで分類し、それぞれ $^ng_i^-$ 、 $^ng_i^0$ 、 $^ng_i^+$ と書き改める。

Fig. 2 Flowchart of proposed method

2°

(2A) $\{^ng_i^-\}$ が空集合の場合

それまでの解領域内部の任意の点 m に対し次式が成立することとなり、解は空集合となる。

$$\begin{aligned} a_{n+1} \cdot m &= a_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i ^ng_i \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \lambda_i (a_{n+1} \cdot ^ng_i) \geq 0 \quad (28) \\ \lambda_i &> 0; i \in \{1, \dots, r_n\} \end{aligned}$$

(結局、2章2項で述べたように ϵ が小さすぎたのだから、 ϵ を増加させて不等式をたてることからやり直す。)

(2B) $\{^ng_i^-\}$ が空でなく、 $\{^ng_i^+\}$ が空集合の場合
それまでの解領域は $a_{n+1} \cdot m < 0$ の定める開半空間の内部にあるので a_{n+1} は冗長な係数ベクトルである。結局、解領域は変更されず

$$\begin{aligned} ^{n+1}g_i &= ^ng_i; i \in \{1, \dots, r_n\}, r_{n+1} = r_n \\ ^{n+1}h_j &= ^nh_j; j \in \{1, \dots, s_n\}, s_{n+1} = s_n \end{aligned} \quad (29)$$

である。

- (2C) $\{^n\mathbf{g}_i^-\}$, $\{^n\mathbf{g}_i^+\}$ が共に空集合でない場合
それまでの解領域は $\mathbf{a}_{n+1}$ に直交する超平面
で2分される。どの $^n\mathbf{g}_i^-$ とも直交しない
 $^n\mathbf{h}_j$ は変更後の解領域を規定する凸多面錐の
いずれの辺をも定めるものとはなり得ないの
で取り除き、 $\{^{n+1}\mathbf{h}_j\}$ はつぎようになる。
 $\{^{n+1}\mathbf{h}_j\} = \mathbf{a}_{n+1} \cup \{\mathbf{h} | \mathbf{h} \in \{^n\mathbf{h}_j\},$
 $\exists ^n\mathbf{g}_i^- \text{ s.t. } \mathbf{h} \cdot ^n\mathbf{g}_i^- = 0\}$ (30)

この場合、 $\mathbf{a}_{n+1}$ によって新しく生成される
稜ベクトル $\mathbf{g}'_{p,q}$ は $\{^n\mathbf{g}_p^-\}$ と $\{^n\mathbf{g}_q^+\}$ から
1本ずつ取り出して作った対に関し、 $\{\mathbf{h} | \mathbf{h}$
 $\in \{^n\mathbf{h}_j\}, \exists ^n\mathbf{g}_i^- \text{ s.t. } \mathbf{h} \cdot ^n\mathbf{g}_i^- = 0\}$ の中の独立
な $N-3$ 本の係数ベクトルに同時に直交する
すべての対について (31), (32) 式で与えられ
る。

$$\mathbf{g}'_{p,q} = (\mathbf{a}_{n+1} \cdot ^n\mathbf{g}_q^+) ^n\mathbf{g}_p^- - (\mathbf{a}_{n+1} \cdot ^n\mathbf{g}_p^-) ^n\mathbf{g}_q^+ \quad (31)$$

$$\mathbf{g}'_{p,q} = \frac{\mathbf{g}'_{p,q}}{\|\mathbf{g}'_{p,q}\|} \quad (32)$$

結局、

$$\{^{n+1}\mathbf{g}_i\} = \{^n\mathbf{g}_i^-\} \cup \{^n\mathbf{g}_i^0\} \cup \{\mathbf{g}'_{p,q}\} \quad (33)$$

である。

以上において、最初に解の適当な初期領域が与えら
れれば、順次解領域が修正され、求める領域に収束し
ていくことになる。このためには、 A の中から互いに
独立な $N-1$ 本の行ベクトル (係数ベクトル) を適当
に抜き出して $^0\mathbf{h}_j$; $j \in \{1, \dots, N-1\}$ とし、これに
 $\mathbf{a}_0$ を付け加えてできる正方行列の逆行列の符号を変
えたものの列ベクトルのうち $\mathbf{a}_0$ と直交する $N-1$ 本
を $^0\mathbf{g}_i$; $i \in \{1, \dots, N-1\}$ とすればよい。

このアルゴリズムのフローチャートを Fig. 2 に示
す。

4. 最急降下法による逐次解法の解との関連

本章では、本論文と文献 4) における手法との関連
について述べる。

文献 4) では m_i を逐次修正していき、順位歪み
 S が零となるような m_i を解として与えた。その際、
不感帯 ε を導入し、十分な差をもたない φ_{ij} 間の大
小関係に関し断定的な順位づけを行うことを保留し
た。この点、順位歪み S に関する記述

$$\|\varphi_{ij} - \varphi_{kl}\| \leq \varepsilon$$

なる関係にある φ_{ij} と φ_{kl} についてはその差によ
って両者間の順位をつけることを保留し d_{ij} のほ

うから決まる β_{ij} に準じて α_{ij} を決める』⁴⁾

を本論文での数値解法に則して表現しなおすと

$$\|\varphi_{it} - \varphi_{qr}\| \leq \varepsilon$$

なる関係にある X_q, X_r, X_s, X_t については $m_i -$
 m_s と $m_r - m_q$ との間の不等号の向きを決定するこ
とを保留し

$$\varphi_{uv} - \varphi_{qr} > \varepsilon$$

なる関係にある X_q, X_r, X_u, X_v については

$$m_v - m_u > m_r - m_q$$

が成立しているものと見なす』

となり、(11) 式と同じ意味をもっていることがわか
る。

また、文献 4) の記述

『 ε の値を固定したまま m_i の修正を行い S が零に
収束するかどうか判断する。零に収束しないときは
適当な段階で m_i の修正を打ち切り、 ε を適当に増
加させ同様の操作を行い、 S が零に収束するまで操
作を続行する。』

は、本論文 2 章 2 項で ε の取り扱いについて述べた内
容に対応する。

結局、 φ_{ij} からの情報の取り出し方は同じではある
が、解の求め方において、文献 4) では評価関数 S を、
本論文では連立不等式を用いており、前者が $S=0$ を
満たす解の一つ求めたのに対し、本論文の手法は $S=$
 0 を満たす解を余すところなく解領域として与えるも
のになっている。また、文献 4) では m を逐次細かく
修正していくわけであり、いったん m が本論文でい
う解領域の内部に入ってしまうと $S=0$ となって修正
は打ち切られるから、その解は解領域の周辺部に位置
することになる。なお、解領域の代表値としては、領
域中央部の点が適当とも考えられるが、真の値と解領
域の位置的関係をもっと詳細に知る必要がある。この
点、解領域の代表値の取り方と精度の議論は今後の課
題であり、文献 4) の解の質についてもその段階で正
しい評価が可能となろう。

5. 応用例

本手法のもつ実用上の効用を検証するため、重さの
一対比較判断から得られたデータ⁶⁾ に提案したアルゴ
リズムを適用した。

Table 1 は被験者に一対の重りを与え、どちらが重
いか判断させる実験で一方が他方より重いと判断され
た合計回数である。10 個の重りは外見上の差をなく
してあり、直示天秤で測った質量が Table 1 の左欄
に示してある。被験者数はのべ 40 人である。表中、
対角線について対称の位置にある要素同士はその和が

Table 1 Frequency on subjective comparison of weights

mass g	i	frequency										
		j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
92.00	X_1	...	23	28	39	40	...	...	...	...	...	
93.00	X_2		...	23	38	40	40	...	...	...	...	
94.00	X_3			...	38	39	40	40	...	...	...	
99.00	X_4				...	27	34	36	39	40	...	
100.00	X_5					...	30	31	38	40	40	
102.00	X_6						...	26	32	36	39	
103.00	X_7							...	29	35	38	
105.00	X_8								...	26	37	
107.00	X_9									...	29	
109.00	X_{10}										...

Fig. 3 Band function on subjective comparison of weights

40 になる関係にあるため、左下半分の数値は省略してある。

このような結果を帯関数モデルに対応したデータとみなせば、横軸に実際の重さの差を取り **Fig. 3** のような幅と非直線性を有する一つの帯関数が得られる。

このデータに本アルゴリズムを適用した結果、稜ベクトルは 65 本求められた(注 3)。また、必要十分係数ベクトルは 19 本定められ、それを **Table 2** に示す。なお、 ε^* は 1 であった(注 4)。

解領域と真の質量との関係を見るために、真の質量に対応したベクトルを(5)、(6)式で正規化し、これと長さ 1 に正規化した必要十分係数ベクトルとの内積

(注 3) 本論文では紙数の都合で表は割愛した。入手を希望される読者には、連絡して頂ければ別途送付致します。

(注 4) 計算は東京工業大学総合情報処理センターの HITAC M-200 H で行い、演算時間は 1.8 秒であった。

Table 2 Necessary and sufficient coefficient vectors

j	h_j									
1	1	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0
2	0	0	1	-1	0	-1	0	0	1	0
3	-1	1	0	0	0	1	-1	0	0	0
4	-1	0	1	0	1	-1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1
6	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	0
7	0	0	0	1	-1	-1	1	0	0	0
8	0	-1	0	1	1	0	0	0	-1	0
9	0	0	0	0	1	0	-1	0	-1	1
10	0	1	0	0	-1	0	-1	0	0	1
11	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	1
12	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0
13	0	0	0	-1	1	0	1	-1	0	0
14	0	0	0	-1	0	1	0	1	0	-1
15	0	0	0	0	-1	0	2	0	-1	0
16	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0	0
17	0	0	0	1	0	-2	0	1	0	0
18	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
19	0	0	1	-2	0	0	1	0	0	0

Table 3 Inner products between necessary and sufficient coefficient vectors and scale vectors

j	Inner product				remark
	(A)	(B)	(C)	(D)	
1	0.0	-0.006	-0.010	-0.004	(A); real scale
2	0.0	-0.017	-0.036	-0.044	
3	0.0	-0.004#	-0.001#	-0.002	
4	0.0	-0.017	-0.026	-0.053	representative scale of the proposed method
5	0.0	-0.013	-0.004	-0.013	
6	0.0	-0.006	-0.009	-0.001#	
7	0.0	-0.014	-0.012	-0.005	(C), (D); Kobayashi-Shibata's method
8	-0.028	-0.022	-0.011	-0.021	
9	-0.028	-0.013	-0.010	-0.006	
10	-0.028	-0.031	-0.032	-0.005	#; least value
11	-0.028	-0.014	-0.019	-0.001#	
12	-0.028	-0.011	-0.003	-0.007	
13	-0.028	-0.020	-0.036	-0.054	
14	-0.028	-0.011	-0.003	-0.010	
15	-0.023	-0.009	-0.009	-0.002	
16	-0.023	-0.016	-0.022	-0.048	
17	0.0	-0.011	-0.002	-0.008	
18	0.0	-0.018	-0.036	-0.042	
19	-0.023	-0.012	-0.029	-0.034	

を求めた。結果を **Table 3(A)** に示す。真値は 9 本の必要十分係数ベクトルと直交しており、解領域を規定する凸多面錐の 9 つの辺に含まれている。ところで、解は凸多面錐の内点と定義したので、厳密には真値はその解領域に含まれていないことになる。その理由として、つぎのことが考えられる。

Fig. 3 つまり質量測定に基づく帯関数については

Fig. 4 Band function on subjective comparison of weights reconstructed with representative scale

その横軸 $2g$ において $\varepsilon_{\max}=4$ となっている。 $\varepsilon=4$ として不等式をたてるべきところ、

$$\varepsilon^*=1 \mp \varepsilon_{\max} \quad (34)$$

について解領域が定められたため、解領域が狭まってしまったのである。2章2項で述べたように、 ε^* は『連立不等式が解をもつ最小の ε 』であり、データの有限性、離散性によりときとして $\varepsilon_{\max}$ より小さい ε で解が存在してしまう。このことは後述する Table 4 (B) の正規化平均ベクトルの値を、試料の質量に関する平均値と分散に合せて読み換えた質量値に基づいて、帯関数を再構成した Fig. 4 を見るとよくわかる。すなわち、この応用例においては Fig. 3 のデータが全体的に微小に動いた状態に対応したもののについて解が求められている。なお、 ε を ε^* より少し大きくして不等式をたてれば、解領域はそれにつれて広がり、真値をより確実に含むようになるが、解領域が広がる分、あいまいさも大きくなる。 $\varepsilon_{\max}$ を正確に求める手法の開発が望まれるが、一般に有限個のデータから求めるには限界があるとも考えられ、今後の課題である。

つぎに、ほかの方法による結果と精度の比較を行うために、解領域の代表値として正規化平均ベクトル g_A を次式で定義した。

$$\hat{g}_A = \frac{1}{r_K} \sum_{i=1}^{r_K} g_i \quad (35)$$

$$g_A = \frac{\hat{g}_A}{\|\hat{g}_A\|} \quad (36)$$

Table 4 Reconstructed scales and comparison of goodness of fit to real scale

real scale	reconstructed scale			remark
	(A)	(B)	(C)	
-0.472	-0.459	-0.457	-0.439	(B); represent scale of proposed method.
-0.416	-0.415	-0.415	-0.415	
-0.360	-0.374	-0.388	-0.389	
-0.079	-0.096	-0.084	-0.083	
-0.023	-0.017	-0.016	-0.044	
0.090	0.101	0.104	0.112	(C), (D); Kobayashi- Shibata's method.
0.146	0.153	0.149	0.140	
0.259	0.272	0.287	0.287	
0.371	0.346	0.337	0.330	
0.484	0.490	0.483	0.501	
sum of square difference	0.0017	0.0033	0.0058	

今回のデータから求めた g_A を Table 4(B) に示す。Table 4(C), (D)は、文献 4)の方法を用いて、2種の異なった初期値から構成した間隔尺度である。Table 4 では、真値と再現された間隔尺度との差の2乗和が合せて示されており、それらを比較すると本アルゴリズムの有効さが理解できる。今回の例のように、真値が解領域の周辺部にある場合、(C), (D)の方法では初期値の与え方により再現性のよさが影響される。

なお、Table 3(B)~(D)には、Table 4(B)~(D)に対応するベクトルと、Table 2 の必要十分係数ベクトルを正規化したものとの内積を示してある。(B)に比べ、(C), (D)は値のパラツキが大きく、(B)は解領域のより中央部に、(C), (D)は4章で指摘したとおり解領域の周辺部に位置していることがわかる。なお、Table 3(C)~(D)には、最も近くに位置する辺に対応する係数ベクトルとの内積に印を付けてある。

6. む す び

官能検査などによく用いられる一対比較データのため新しい数値処理法を提案した。

この方法は、帯関数モデルを仮定しているため、従来一般的に一対比較法で扱われているほとんどのデータに適用でき、特に比較判断に非直線性がある場合に最も大きな効果を発揮する。また、すべての比較対に対する判断結果を心ずしも必要とせず、かつ判断結果に入っているあいまいさやパラツキの程度を ε の大きさから知ることができるなど、文献 4) で提案された手法のもつ特長と有効性をそのまま共有すると同時に、帯関数モデルを前提とする範囲でデータのもつすべての情報を解領域の形式であますところなく尺度構

成化することができる点に大きな意味を有している。
今後、解領域の大きさや代表値の与え方の検討により、本手法のもつ効用についてさらにきめ細かい議論ができると考えている。

参 考 文 献

- 1) 岡本暁之助：感覚計測, 計測と制御, **15**-1, 146/150 (1976)
- 2) 小林 彬：検査の機器計測化への諸問題, 電気学会雑誌 **100**-9, 827/834 (1980)
- 3) 日科技連官能検査委員会編：新版官能検査ハンドブック, 241/570, 日科技連出版社 (1973)
- 4) 小林 彬, 芝田 勉：一対比較のための非計量的手法, 計測自動制御学会論文集, **14**-2, 189/195 (1978)
- 5) A. J. Goodman and A. W. Tucker: Polyhedral Convex Cones, Linear Inequalities and Related Systems, 19/40, Princeton University Press (1956)
- 6) 諏訪部和之：順序構造と計測, 東京工業大学制御工学科修士論文 (1976)
- 7) 小林 彬, 村上瑞夫：非計量一対比較法の解領域について, 第 17 回 SICE 学術講演会予稿集, 3512 (1978)