誤差最小化法による多項式形入力に対する モデルの最適低次元化[†]

井 上 昭*・岩 井 善 太*・檜 崎 勝 弘*

Least Squares Model Reduction of Systems with Polynomial Inputs

Akira INOUE*, Zenta IWAI* and Katsuhiro NARASAKI*

This paper proposes a method for obtaining an optimal reduced order model to approximate a given high-order system with polynomial inputs. The polynomial inputs have many terms with random coefficients and approximate most of inputs operated in practical closed-loop control systems. The index for a reduced model is defined by integrating the square of its output error and averaging the integral over the random coefficients. The optimal reduced order model has the minimum index under the condition that the steady-state portion of its output is equal to the one of the high-order system exactly. This paper gives analytical expressions for the evaluation of the index, the gradients with respect to the unknown model parameters and the condition for coincidence of steady-state outputs of high-order system and the reduced order model. These expressions are derived by using a transformation of the state-variables of augmented systems with an input model and reducing the problem with polynomial inputs to a problem with impulse inputs.

Keyword: model reduction, least square error, polynomial input, optimal approximation, linear system

1. 緒 言

制御理論を現実のシステムに応用する場合、状態量検出、制御装置構成、計算時間などでの制約が問題となり、これらを解決する手段として、システムの低次元モデル化が必要となり、多くの手法が提案されている^{1),2)}。また、CADの計算機パッケージへの組込み

も試みられている³⁾。

提案されている各手法はそれぞれ特徴を有しているが、低次元モデル化を与えられた高次系を最もよく近似する低次系を求めることと定義するならば、高次系と低次系との出力誤差の2乗積分平均が最小となる低次系を求める誤差最小化法が、最も目的にかなった手法であるといえる。

この手法は Meier and Luenberger⁴⁾ や Wilson⁵⁾ によって提案され、以後多くの研究がある。Mishra など⁶⁾ は計算アルゴリズムの改善を行い、Galiana⁷⁾ は多入力多出力系の場合に同様の計算式を求めている。また Sinha など⁸⁾ はサンプリング点での誤差最小の手法を、Riggs など⁹⁾ は簡単な計算式を求めている。しかし、これらはインパルス入力に対する手法である。インパルス入力は状態量の初期値が変化し入力の無いときと同じであり、現実の入力のある場合には適用できない。制御系設計特にフィードバックゲインの決定に利用するには、フィードバック制御則による操作量入力に対し近似させねばならない。ところが、閉ループ系の操作量入力はステップ信号、ランプ信号さらに時間 t の高次のべき乗の信号などの多くの信号成分を含んでいる。そこで、これら成分の組合された多項式形入力に対し、定常偏差のない最適低次系を求める問題が生じる。

Edgar¹⁰⁾ と Hirzinger など¹¹⁾ はステップ入力に対し、Siret など¹²⁾ はステップとランプの単項式形入力に対し求めているが、さらに高次の入力には求められていない。Wilson など¹³⁾ も試みているが入力の微分項を必要とし実現が困難である。いずれも多項式形入力は考察されていない。

そこで本論文ではこの多項式形入力に対する最適低次系を誤差最小化法により求める。さらに、閉ループ系の操作量入力はどの多項式で近似的に表わされているかあらかじめ求めることは困難であり、また、種々のフィードバックゲインの操作量入力に対し近似する

[†] 第23回自動制御連合講演会で発表(昭55・11)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received March 30, 1981)

(Revised October 26, 1981)

ため、多項式の係数を確率変数とし、これらについて平均した最適化を行う。また、係数の平均値、分散行列を変えることにより、単項式形入力や次数の異なる入力にも同一の計算式で求められる。さらに定常偏差がなくなるための条件を求め、高次系が多重の極をもたないとき低次系の次数 m は入力の次数 p に対し $2m \geq p$ でなければならないことを示す。従来の手法ではこのような拡張は計算上困難であったが、本論文の提案する変数変換によって始めて可能となるものである。すなわち、入力モデルとの合成系に対し変数変換を行い、すでに結果の得られているインパルス入力に対する問題に帰着させて解く。

2 章では問題の定式化を行い、3 章で、多項式形入力に対する最適低次系を求める計算式と定常値一致の条件を与える。4 章では数値計算法と例題を述べる。

なお、多入力多出力系の問題は容易に 1 入力 1 出力系の場合に帰着できるので¹¹⁾、本論文では記述を簡単化するため、1 入力 1 出力系を扱う。

2. 問題の記述

実在システムを精度よく近似しているモデルとして線形定係数系が与えられたとする。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで $\mathbf{x}$ は n 次状態ベクトル、入力 u と出力 y はスカラー、 $\mathbf{A}$ は安定行列である。この系を高次系と呼ぶ。

この高次系を近似する m 次元 ($m < n$) の低次系を

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R + \mathbf{b}_R u, & \mathbf{x}_R(0) = \mathbf{0} \\ y_R = \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}_R \end{cases} \quad (2.2)$$

とし、 $\mathbf{x}_R$ は m 次状態ベクトル、 y_R はスカラー出力。

入力 u はつぎの $p-1$ 次多項式で表わされるとする。

$$u(t) = \sum_{i=1}^p f_i t^{i-1} \quad (2.3)$$

係数 f_i はつぎの統計的性質の正規分布をする確率変数である。 f_i を成分とするベクトルを $\mathbf{f}$ とすると

$$E[\mathbf{f}] = \mathbf{f}_0, \quad E[(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)^T] = \mathbf{N} \quad (2.4)$$

$\mathbf{N}$ は $p \times p$ 半正定値行列である。

【問題 I】 多項式形入力 (2.3) 式に対する出力応答誤差 $e = y_R - y$ の 2 乗積分平均

$$J = E \left[\int_0^\infty e(t)^2 dt \right] \quad (2.5)$$

を低次系 (2.2) 式の評価式とする。ここで平均操作は $\mathbf{f}$ について行う。問題は高次系の $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ および低次系の次元数 m が与えられたとき、 J を最小とする低次系の $\mathbf{A}_R$, $\mathbf{B}_R$, $\mathbf{C}_R$ を求めることである。

入力がインパルスのときの問題は Wilson⁵⁾ ほかに

よって考察され、すでに J , $\partial J / \partial A_R$, $\partial J / \partial B_R$, $\partial J / \partial C_R$ の計算式が求まっており、これらの式を用いて繰返し計算などにより最適低次系を求める方法が提案されている。しかし、これらの方法ではいくつもの Lyapunov 行列方程式を解かねばならず計算が繁雑である。Riggs など⁹⁾ はシステム行列 $\mathbf{A}$ が対角化可能なとき、 J , $\partial J / \partial A_R$ などがシステム・パラメータから直接計算できる式を与えた。低次元モデル化を CAD などの計算機パッケージに組み込む場合、このようにパラメータから直接計算できることが望ましい。よって、本論文でも問題 I とともに、行列 $\mathbf{A}$ が対角化可能な場合の問題も考察する。すなわち、低次系の $\mathbf{A}_R$ が対角化可能という条件のもとで、最適低次系を求めるとすれば、変数変換によって、高次系の $\mathbf{A}$ だけでなく、低次系の $\mathbf{A}_R$ も対角行列に変換でき、高次系 (2.1) 式および低次系 (2.2) 式はそれぞれつぎの (2.6) 式および (2.7) 式と表わすことができる¹⁴⁾ (注 1)。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}^* u, & y = \mathbf{c}^* \mathbf{z} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, & \mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, & \mathbf{c}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_R = \mathbf{A}_R \mathbf{z}_R + \mathbf{b}_R^* u, & y_R = \mathbf{c}_R^* \mathbf{z}_R \\ \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_m \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_R^* = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}, & \mathbf{c}_R^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.7)$$

【問題 II】 高次系のパラメータ $\{\lambda_i\}$, $\{b_i\}$ および低次系の次元数 m が与えられたとき、多項式形入力 (2.3) 式に対する出力応答誤差の 2 乗積分平均 (2.5) 式が最小となる低次系のパラメータ $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ を条件 $\alpha_i < 0$ のもとで求める。

3. 多項式形入力に対する最適低次元モデル

入力が多項式形 (2.3) 式のときの最適低次系を考察する。まず、入力 (2.3) 式の数式モデルを構成する。

(2.3) 式の入力はつぎの p 次元線形系の出力と表わせる。

(注 1) 高次系が複素根をもつ場合にも (2.6) 式のように複素根のまま対角化を行う。共役複素根が存在し、かつ、 $\mathbf{b}^*$ の対応する成分も共役複素数となるので複素数のまま計算を行っても計算結果は実数となる。低次系も複素根のまま対角化を行うが、複素根のないとき、1 組の複素根のあるとき、2 組あるときなどと高次系がもつ複素根の組数まで場合に分けて別々に計算し最適のものを選ぶ。

$$\dot{\mathbf{v}} = E\mathbf{v} + F\delta(t), \quad u = \mathbf{h}^T \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで $\delta(t)$ は、ベクトル $\mathbf{f}$ およびデルタ関数 $\delta(t)$ の積によるインパルス入力である。

$$\delta(t) = \mathbf{f}\delta(t) \quad (3.2)$$

入力のモデル式 (3.1) と高次系 (2.1) 式の合成系、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{b}\mathbf{h}^T \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \delta(t) \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

を構成する。次式を満たす $n \times p$ 行列 T を考える。

$$TE + \mathbf{b}\mathbf{h}^T - AT = 0 \quad (3.4)$$

A は安定行列であり、 E の固有値はすべて 0 で、 A と E は共通の固有値をもたないので行列方程式 (3.4) は一意の解 T をもつ¹⁵⁾。この T を用いて変数変換、

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + T\mathbf{v} \quad (3.5)$$

を合成系 (3.3) 式に行う。すると次式に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TF \\ F \end{bmatrix} \delta(t) \\ y &= [\mathbf{c}^T, -\mathbf{c}^T T] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

同様に低次系 (2.2) 式と入力モデル (3.1) 式との合成系

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_R & \mathbf{b}_R \mathbf{h}^T \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \delta(t) \\ y_R &= \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}_R \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

を考え $m \times p$ 行列 T_R をつぎの行列方程式で求める。

$$T_R E + \mathbf{b}_R \mathbf{h}^T - A_R T_R = 0 \quad (3.8)$$

同様につぎの変数変換を合成系 (3.7) 式に行う。

$$\tilde{\mathbf{x}}_R = \mathbf{x}_R + T_R \mathbf{v} \quad (3.9)$$

合成系 (3.7) 式は次式へ変換される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_R \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_R & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_R \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_R F \\ F \end{bmatrix} \delta(t) \\ y_R &= [\mathbf{c}_R^T, -\mathbf{c}_R^T T_R] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_R \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

すると多項式形入力の問題はインパルス入力 $\delta(t)$ (3.2) 式に対し高次系 (3.6) 式の出力 y を最もよく近似する低次系 (3.10) 式を求める問題となる。

ここで、評価式 (2.5) の積分ができるためには $t \rightarrow \infty$ で $e(t) = y_R(t) - y(t) \rightarrow 0$ とならねばならない。 A および A_R は安定行列でなければならないから、(3.6)、(3.10) 式において $t \rightarrow \infty$ では、 $\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$ 、 $\mathbf{c}_R^T \tilde{\mathbf{x}}_R(t) \rightarrow 0$ である。よって

$$\begin{aligned} y_R - y &= \mathbf{c}_R^T \tilde{\mathbf{x}}_R - \mathbf{c}_R^T T_R \mathbf{v} - \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{c}^T T \mathbf{v} \\ &\rightarrow (\mathbf{c}^T T - \mathbf{c}_R^T T_R) \mathbf{v} \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。これは、出力のいわば定常値の差である。入力モデル式は可制御だから、 $y_R - y \rightarrow 0$ のためには

$$\mathbf{c}^T T - \mathbf{c}_R^T T_R = 0 \quad (3.12)$$

でなければならない。これを定常値一致の条件と呼ぶ。この条件を満たすとき、出力誤差は $e = \mathbf{c}_R^T \tilde{\mathbf{x}}_R - \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}$ となる。すなわち、 $\bar{y}_R, \bar{y}, \bar{e}$ を

$$\bar{y}_R = \mathbf{c}_R^T \tilde{\mathbf{x}}_R, \quad \bar{y} = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}, \quad \bar{e} = \bar{y}_R - \bar{y} \quad (3.13)$$

と置くと、 e と $\bar{e}$ は等しくなり、評価関数は

$$J = E \left[\int_0^\infty \bar{e}(t)^2 dt \right] \quad (3.14)$$

となる。ここで $\bar{y}$ は (3.6) 式で $\tilde{\mathbf{x}}$ だけに関係しているから n 次系、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= A\tilde{\mathbf{x}} + TF\delta, \\ \bar{y} &= \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

の出力とみなすことができる。同様に $\bar{y}_R$ は m 次系、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_R &= A_R \tilde{\mathbf{x}}_R + T_R F \delta \\ \bar{y}_R &= \mathbf{c}_R^T \tilde{\mathbf{x}}_R \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

の出力である。よって、多項式形入力の問題はつぎのインパルス入力の問題 I' に帰着された。

【問題 I' 】 高次系 (3.15) 式に対して、(3.2) 式のインパルス入力 δ に対する出力応答誤差 $e(t)$ の 2 乗積分平均 (3.14) 式が条件 (3.12) 式のもとで最小となる低次系 (3.16) 式を求める。

この問題の制約条件のない場合はすでに Wilson⁵⁾ ほか^{7), 11)} によって考察され、すでに $J, \partial J / \partial A_R$ などの計算式は得られている。 F が単位行列であることを考慮して、文献 5) の (6) 式 (24) 式に問題 I' を適用すると、つぎの計算式が求まる。すなわち、つぎの Lyapunov 行列方程式の解をそれぞれ $P_{11}, P_{12}, P_{22}, R_{11}, R_{12}, R_{22}$ とする。

$$\left. \begin{aligned} P_{11}A + A^T P_{11} + \mathbf{c}\mathbf{c}^T &= 0, \\ P_{12}A_R + A^T P_{12} - \mathbf{c}\mathbf{c}_R^T &= 0 \\ P_{22}A_R + A_R^T P_{22} + \mathbf{c}_R\mathbf{c}_R^T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} AR_{11} + R_{11}A^T + T(f_0 f_0^T + N)T^T &= 0 \\ AR_{12} + R_{12}A_R^T + T(f_0 f_0^T + N)T_R^T &= 0 \\ AR_{22} + R_{22}A_R^T + T_R(f_0 f_0^T + N)T_R^T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

このとき、 $J, \partial J / \partial A_R$ などの計算式は次式となる。

$$J = \mathbf{c}^T R_{11} \mathbf{c} - 2\mathbf{c}^T R_{12} \mathbf{c}_R + \mathbf{c}_R^T R_{22} \mathbf{c}_R \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial J}{\partial A_R} = 2(R_{12}^T P_{12} + R_{22} P_{22}) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial J}{\partial T_R} = 2(P_{12}^T T + P_{22} T_R)(f_0 f_0^T + N) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}_R} = 2(-\mathbf{c}_R R_{12} + \mathbf{c}_R R_{22}) \quad (3.22)$$

これらの計算式をもとの問題 I へ適用するためにこれから行列 T, T_R を消去する。まず、行列方程式

(3.4), (3.8)式に(3.1)式の $E, \mathbf{h}$ を代入することによって行列 T, T_R は解くことができ次式となる.

$$T = [A^{-1}\mathbf{b}, A^{-2}\mathbf{b}, \dots, A^{-p}\mathbf{b}] \quad (3.23)$$

$$T_R = [A_R^{-1}\mathbf{b}_R, A_R^{-2}\mathbf{b}_R, \dots, A_R^{-p}\mathbf{b}_R] \quad (3.24)$$

よって定常値一致の条件(3.12)式はつぎの式になる.

$$\mathbf{c}^T A^{-i} \mathbf{b} = \mathbf{c}_R^T A_R^{-i} \mathbf{b}_R, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.25)$$

また, $\mathbf{f}_0$ の第 i 成分を f_i^0 , N の第 (i, j) 成分を n_{ij} と書き, (3.23), (3.24)式を(3.18)式に代入すると, その線形性より解は,

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= \sum_{k,h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) R_{11}^{kh}, \\ R_{12} &= \sum_{k,h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) R_{12}^{kh}, \\ R_{22} &= \sum_{k,h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) R_{22}^{kh} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

と分解でき, $R_{11}^{kh}, R_{12}^{kh}, R_{22}^{kh}$ はつぎの方程式の解である.

$$\left. \begin{aligned} A R_{11}^{kh} + R_{11}^{kh} A^T + A^{-k} \mathbf{b} \mathbf{b}^T A^{-h} &= 0 \\ A R_{12}^{kh} + R_{12}^{kh} A_R^T + A^{-k} \mathbf{b} \mathbf{b}_R^T A_R^{-h} &= 0 \\ A_R R_{22}^{kh} + R_{22}^{kh} A_R^T + A_R^{-k} \mathbf{b}_R \mathbf{b}_R^T A_R^{-h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

さて, (3.24)式より行列 T_R はパラメータ A_R および $\mathbf{b}_R$ で決定される. ところが, (3.20)式の $\partial J / \partial A_R$, (3.21)式の $\partial J / \partial T_R$ はそれぞれ, A_R と T_R とが独立なパラメータであるとみなして J を微分したものである. しかし, 問題 I で必要なのは A_R と $\mathbf{b}_R$ とが独立とみなして微分した $\partial J / \partial A_R$ と $\partial J / \partial \mathbf{b}_R$ であり, これらを求める. 区別するために前者の意味の微分を記号 $[\partial J / \partial A_R]$ を使い, 後者はそのまま $\partial J / \partial A_R$ とする. また T_R の第 (j, k) 成分を $(T_R)_{jk}$ と書く. すると両者の微分には

$$\frac{\partial J}{\partial A_R} = \left[\frac{\partial J}{\partial A_R} \right] + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial J}{\partial (T_R)_{jk}} \right] \cdot \frac{\partial (T_R)_{jk}}{\partial A_R} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}_R} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial J}{\partial (T_R)_{jk}} \right] \cdot \frac{\partial (T_R)_{jk}}{\partial \mathbf{b}_R} \quad (3.29)$$

の関係がある. これを計算する(付録)と次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial A_R} &= 2 \sum_{k=1}^p \sum_{h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) \left\{ R_{12}^{kh} T P_{12} \right. \\ &\quad - \sum_{i=1}^k A_R^{-i} \mathbf{b}_R \mathbf{b}^T A^{T-h} P_{12} A_R^{-k-1+i} + R_{22}^{kh} P_{22} \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^k A_R^{-i} \mathbf{b}_R \mathbf{b}_R^T A_R^{T-h} P_{22} A_R^{-k-1+i} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}_R} &= 2 \sum_{k=1}^p \sum_{h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) A_R^{T-h} (P_{12}^T A^{-k} \mathbf{b} \\ &\quad + P_{22} A_R^{-k} \mathbf{b}_R) \end{aligned} \quad (3.31)$$

これで計算式(3.17)~(3.22)から行列 T, T_R が消去された. すなわち, 問題 I の最適低次系を求めるための $J, \partial J / \partial A_R$ などのはつぎのようにして計算される.

まず, (3.27)式と(3.26)式より R_{11}^{kh}, R_{12}^{kh} などをもとめ, (3.17)式より P_{11}, P_{12}, P_{22} を求める. これらを代入することにより, J は(3.19)式, $\partial J / \partial A_R$ は(3.30)式, $\partial J / \partial \mathbf{b}_R$ は(3.31)式, $\partial J / \partial \mathbf{c}_R$ は(3.22)式で求まる.

特に $p=1$ とすれば, ステップ入力の場合が得られ, Hirzinger など¹¹⁾のステップ入力に対する計算式と一致するが彼らは定常値一致の条件には留意していない. また, $p=2$ とすれば, ステップ入力とランプ入力とが $\mathbf{f}_0$ と N で指定される比率で印加されるとき計算式となる. このとき特に $\mathbf{f}_0$ と N の成分のうち f_2^0 以外をすべて 0 とすれば, ランプ入力のみ印加される場合が得られ, さらに低次系が可制御標準形のときの式は, Siret など¹²⁾がこの特別の場合に求めている式と一致する.

ここで得られた問題 I に対する計算式では, Lyapunov 行列方程式を解かねばならないが, 高次系, 低次系がともに対角形のシステム行列をもつ場合の問題 II では計算式が直接計算可能な式となる. すなわち, 高次系の $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に(2.6)式の $A, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*$ を, また低次系の $A_R, \mathbf{b}_R, \mathbf{c}_R$ に(2.7)式の $A_R, \mathbf{b}_R^*, \mathbf{c}_R^*$ をそれぞれ代入すると, まず, 行列方程式(3.17), (3.27)の解が書きおろすことができ, 解の各行列の第 (i, j) 成分はそれぞれ次式となる.

$$\begin{aligned} (P_{11})_{ij} &= -\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}, \quad (P_{12})_{ij} = -\frac{1}{\lambda_i + \alpha_j}, \\ (P_{22})_{ij} &= -\frac{1}{\alpha_i + \alpha_j} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\left. \begin{aligned} (R_{11}^{kh})_{ij} &= -\frac{\lambda_i^{-k} \lambda_j^{-h} b_i b_j}{\lambda_i + \lambda_j}, \\ (R_{12}^{kh})_{ij} &= -\frac{\lambda_i^{-k} \alpha_j^{-h} b_i \beta_j}{\lambda_i + \alpha_j}, \\ (R_{22}^{kh})_{ij} &= -\frac{\alpha_i^{-k} \alpha_j^{-h} \beta_i \beta_j}{\alpha_i + \alpha_j} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

これらを(3.19), (3.30)式の対角成分, (3.31)式に代入すると, つぎの計算式を得る.

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k,h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) \left\{ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_i^{-k} \lambda_j^{-h} b_i b_j}{\lambda_i + \lambda_j} \right. \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_i^{-k} \alpha_j^{-h} b_i \beta_j}{\lambda_i + \alpha_j} \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_i^{-k} \alpha_j^{-h} \beta_i \beta_j}{\alpha_i + \alpha_j} \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} = 2 \sum_{k,h=1}^p (f_k^0 f_h^0 + n_{kh}) \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{-k} \alpha_j^{-h} b_i \beta_j}{\lambda_i + \alpha_j} \right.$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\lambda_i + \alpha_j} + \frac{h}{\alpha_j} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^{-k} \alpha_j^{-h} \beta_i \beta_j}{\alpha_i + \alpha_j} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i + \alpha_j} + \frac{h}{\alpha_j} \right) \} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_j} = 2 \sum_{k,h=1}^p \left[(f_k f_h + n_{kh}) \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{-k} \alpha_j^{-h} b_i}{\lambda_i + \alpha_j} - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^{-k} \alpha_j^{-h} \beta_i}{\alpha_i + \alpha_j} \right\} \right] \quad (3.36)$$

特に、(3.35)、(3.36)式は(3.34)式の J の α_i, β_j による微分によっても得られる。定常値一致の条件は

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^{-i} b_j = \sum_{k=1}^m \alpha_k^{-i} \beta_k, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.37)$$

となる。よって、問題IIは制約条件(3.37)および $\alpha_k < 0 (k=1, \dots, m)$ のもとで(3.34)式で計算される J を最小とするパラメータ $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ を求めることによって解ける。

また、定常値一致の条件(3.37)式が成立するためにはパラメータ $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ の個数が条件式の個数より大きくならなければならない。すなわち、 $2m \geq p$ が必要である。よって、定常偏差なく低次系が高次系を近似するためには低次系の次元数 m が入力の次数 p の $1/2$ より大きくならなければならない。

4. 数値計算法および例題

最適解を求めるには、数値計算が必要であるが、最小にすべき評価関数が、(3.19)式あるいは(3.34)式で計算でき、そのパラメータによる微分を計算する式も求められているので、制約条件のない問題に帰着できれば、Variable-metric 法¹⁶⁾ などにより最適解が求められる。そのためには、制約条件をペナルティ関数とする、つぎの方法を利用する¹⁶⁾。すなわち、問題I、問題IIのそれぞれ評価関数を

$$J^* = J + w \sum_{i=1}^p (\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-i} \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{R}^{-i} \mathbf{b}_R)^2 \quad (4.1)$$

$$J^* = J + w \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-i} b_j - \sum_{k=1}^m \alpha_k^{-i} \beta_k \right)^2 + \frac{1}{w} \sum_{j=1}^m (-\alpha_j) \quad (4.2)$$

とすれば、制約条件のない問題となる。ここで $w > 0$ は重みで、まず w を小さい値に選び J^* を最小とするパラメータ値を求める。得られた最適値をパラメータの初期値とし、 w を大きくして再び J^* を最小化する。これを繰返して、十分大きい w に対する最適パラメータ値を求めれば、制約条件を満足して J を最小化する最適解が得られる。

厳密な最適解を得るには、このように Variable-metric 法などによる繰返し計算が必要となるが、つぎに、得られる解は近似最適解であるが、繰返し計算を必要とせず、計算量の少ない手法を提案する。すなわち、まず、低次系のシステム行列 $\mathbf{A}_R$ あるいは固有値 $\{\alpha_j\}$ を、ほかの低次元化手法、たとえば Marshall 法¹⁴⁾、あるいは、改良 Marshall 法¹⁴⁾によって、高次系の $\mathbf{A}, \{\lambda_j\}$ から決定する。つぎに、入力ゲイン $\mathbf{b}_R$ あるいは $\{\beta_j\}$ のみ最適化を行う。 $\mathbf{b}_R$ 、あるいは $\{\beta_j\}$ の最適値は、制約条件(3.25)式または(3.37)式と、(3.31)式を $\partial J / \partial \mathbf{b}_R = 0$ とした方程式あるいは(3.36)式を $\partial J / \partial \beta_j = 0$ とした式から解き出せばよい。これらの式はいずれもパラメータ $\mathbf{b}_R, \{\beta_j\}$ に関して連立1次方程式であるから容易に解くことができる。例題において示されるように、このようにして得た近似解はもとの Marshall 法あるいは改良 Marshall 法による低次元モデルに比べ応答がよく改善されている(注2)。

例題を示す。つぎの4次元の高次系を2次元に低次元化した低次系を求める。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ -0.056 & -0.556 & -1.8 & -2.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 \\ -3.65 \\ 6.475 \\ -8.8085 \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

$y = x_1$

高次系(4.3)のシステム行列を対角化して、(2.6)式のように変換して、問題IIによって低次系を求める。高次系のパラメータ、すなわち、固有値と入力ゲインは

$$\lambda_1 = -0.2, \lambda_2 = -0.4, \lambda_3 = -0.7, \lambda_4 = -1.0 \quad (4.4)$$

$$b_1 = 0.4, b_2 = 4.5, b_3 = -18.9, b_4 = 15.0 \quad (4.5)$$

である。まず、Marshall 法¹⁴⁾による低次モデルを求

める。(2.7)式の形式のモデルを求めると次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} u$$

$y_R = z_{R1} + z_{R2} \quad (4.6)$

これを数値計算の初期値として用いる。ステップ入力

(注2) この近似最適解を求める手法は多入力1出力系あるいは1入力多出力系へ容易に拡張可能であるが多入力多出力系へはこのままでは拡張できない。

Fig. 1 Output responses for step input $u(t)=1.0$

Fig. 2 Output responses for step and ramp input $u(t)=10.0+t$

に対する最適低次系を求めると次式となる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2914 & 0 \\ 0 & -0.3360 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.3382 \\ -8.0414 \end{bmatrix} u, \quad y_R = z_{R1} + z_{R2} \quad (4.7)$$

ランプ入力に対する最適低次系はつぎのようになる.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2564 & 0 \\ 0 & -0.4293 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.9011 \\ -2.6459 \end{bmatrix} u, \quad y_R = z_{R1} + z_{R2} \quad (4.8)$$

ステップ入力とランプ入力が 10:1 の比率で印加される混合入力に対する最適低次系は次式である.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2683 & 0 \\ 0 & -0.3884 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.6374 \\ -3.3331 \end{bmatrix} u, \quad y_R = z_{R1} + z_{R2} \quad (4.9)$$

また, ステップ入力に対する近似最適低次モデルとして, Marshall 法による (4.6) 式の入力ゲインだけを最適化した低次系を求めると,

Table 1 Integrals from $t=0$ to $t=30$ of squares of output response errors for step input $u(t)=1.0$

Marshall's model	25.2
Modified Marshall's model	13.5
Marshall's model improved by optimizing input gains	0.543
Optimal model for step input	0.345

Table 2 Integrals from $t=0$ to $t=30$ of squares of output response errors for step and ramp input $u(t)=10.0+t$

Optimal model for step input	47.0
Optimal model for step and ramp input	39.8
Optimal model for ramp input	42.0

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0390 \\ -1.5779 \end{bmatrix} u, \quad y_R = z_{R1} + z_{R2} \quad (4.10)$$

となる. 以上の低次モデルに, ステップ入力 $u(t)=1.0$ および, ステップとランプの混合入力 $u(t)=10.0+t$ を印加したときの出力の応答を Fig. 1, Fig. 2 に示す. また, 時間 0.0 から 30.0 までの出力応答誤差の 2 乗積分値を Table 1, Table 2 に示す. 比較のために改良 Marshall 法による低次系の応答, その誤差 2 乗積分を Fig. 1, Table 1 に示す. ステップ入力に対する Fig. 1, Table 1 からわかるように, ステップ入力の最適低次系 (4.7) 式の応答がステップ入力には Marshall 法, 改良 Marshall 法に比べ非常によいことがわかる. また, Marshall 法の低次系の入力ゲインのみ最適化した近似最適系 (4.10) 式は厳密な最適解 (4.7) 式への近似もかなりよいことがわかる. Fig. 2, Table 2 から, 混合入力に対しては, 混合入力の最適低次系 (4.9) 式が最もよく, ステップ入力の最適低次系 (4.7) 式の応答には定常偏差が表われていることがわかる.

なお, Marshall 法の (4.6) 式をパラメータの初期値とし, Variable metric 法によって, 各入力の最適低次系 (4.7) ~ (4.9) 式を, ミニコンピュータ (NOVA 4/c, メモリー 32 k 語) を用いて計算したが, 計算時間はそれぞれ約 18 分であった.

5. 結 言

本論文では, 与えられた高次系に多項式形入力が印加されるとき, 出力応答誤差の 2 乗積分平均を最小

とする最適低次元化モデルの計算法を提案した。得られる低次モデルは出力の誤差が最も小さく最適であり、出力の定常値が高次系の定常値と完全に一致するための定常値一致の条件を求めた。さらに、入力の多項式の係数について平均して最適な低次系を求めているので、ほとんど一般の入力に対して、高次系の出力をよく近似していると考えられる。

本手法は、入力モデルとの合成系を変数変換することによって、出力の定常値一致の条件のもとで、従来のインパルス入力に対する最適低次元化手法に帰着させることによって導出されたものであり、従来、ステップ入力やランプ入力に対して試みられていた直接に評価関数を計算する手法では導出が困難であったものである。

4次元の高次系から2次元の低次系を求める例題では、メモリーの少ない低速のミニコン (NOVA 4/c, 32k 語) で計算時間約 18 分で最適解が得られることから示されるように、本手法で必要とされる計算量は比較的少なく、計算式は CAD などの計算機パッケージに組み込みの容易な形式となっていて、本手法は実用上有用な手法と思われる。

さらに、近似解法として、固有値をほかの手法で選択し、入力ゲインのみを最適化する手法は、連立1次方程式を解けばよく、得られる低次元化モデルは、例題で示されるように近似度の改善が著しく、実用上興味ある手法である。

参 考 文 献

- 1) 相良節夫：システムの低次元モデル化について、第16回 SICE 學術講演会予稿集, 1/2 (1977)
- 2) 前田 肇：大規模な線形システムの低次元モデルとシステム構造, システムと制御, **22-11**, 655/664 (1978)
- 3) 古田勝久, 梶原宏之：制御系のための CAD, 計測と制御, **18-9**, 777/789 (1979)
- 4) L. Meier, III and D.G. Luenberger: Approximation of Linear Constant Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-12-5**, 585/588 (1967)
- 5) D.A. Wilson: Optimum Solution of Model-Reduction Problem, Proc. IEE, **117-6**, 1161/1165 (1970)
- 6) R.N. Mishra and D.A. Wilson: A New Algorithm for Optimal Reduction of Multivariable Systems, Int. J. Control, **31-3**, 443/466 (1980)
- 7) F.D. Galiana: On the Approximation of Multiple Input-Multiple Output Constant Linear Systems, Int. J. Control, **17-6**, 1313/1324 (1973)
- 8) N.K. Sinha and G.T. Bereznaï: Optimum Approximation of High-Order Systems by Low-Order Models, Int. J. Control, **14-5**, 951/959 (1971)
- 9) J.B. Riggs and T.F. Edgar: Least Squares Reduction of Linear Systems Using Impulse Response, Int. J. Control, **20-2**, 213/223 (1974)
- 10) T.F. Edgar: Least Squares Model Reduction Using Step Response, Int. J. Control, **22-2**, 261/270 (1975)

- 11) G. Hirzinger and G. Kreisselmeier: On Optimal Approximation of High-Order Linear Systems by Low-Order Models, Int. J. Control, **22-3**, 399/408 (1975)
- 12) J.M. Siret, G. Michalesco and P. Bertrand: Optimal Approximation of High-Order Systems Subject to Polynomial Inputs, Int. J. Control, **26-6**, 963/9.1 (1977)
- 13) D.A. Wilson and R.N. Mishra: Optimal Reduction of Multivariable Systems, Int. J. Control, **29-2**, 267/278 (1979)
- 14) Z. Iwai and Y. Kubo: Determination of Eigenvalues in Marshall's Model Reduction, Int. J. Control, **30-5**, 823/836 (1979)
- 15) 児玉慎三, 須田信英：システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 16) L.C.W. ディクソン (松原正一訳)：非線形最適化計算法, 培風館 (1974)

《付 録》

(3.28), (3.29)式から (3.30), (3.31)式の導出.

(3.28)式において, $[\partial J/\partial A_R]$ は (3.20)式であり, $[\partial J/\partial (T_R)_{jk}]$ は (3.21)式の第 (j, k) 成分だから,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial J}{\partial (T_R)_{jk}} \right] &= \sum_{h=1}^p (f^k f^0 + n_{kh}) \\ &\quad \cdot (P_{12}^T A^{-k} b + P_{22} A_R^{-k} b_R)_j \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

で与えられ, $\partial (T_R)_{jk}/\partial A_R$ はつぎのようにして求められる. 第 i 成分が 1 の単位ベクトルを e_i と書くと,

$$(A_R^{-1})_{hi} = \text{trace}(A_R^{-1} e_i e_i^T) \quad (\text{A.2})$$

$$(T_R)_{jk} = (A_R^{-k} b_R)_j = \text{trace}(A_R^{-k} b_R e_j^T) \quad (\text{A.3})$$

と表われ, トレースの微分の公式¹⁵⁾を用いると,

$$\frac{\partial (A_R^{-1})_{hi}}{\partial A_R} = -(A_R^{-1} e_i e_h^T A_R^{-1})^T \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial (T_R)_{jk}}{\partial A_R^{-1}} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} A_R^{-i} b_R e_j^T A_R^{-k+1+i} \right)^T \quad (\text{A.5})$$

となる. よって $\partial (T_R)_{jk}/\partial A_R$ は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (T_R)_{jk}}{\partial A_R} &= \sum_{h=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial (T_R)_{jk}}{\partial (A_R^{-1})_{hl}} \cdot \frac{\partial (A_R^{-1})_{hl}}{\partial A_R} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^k (A_R^{-i} b_R e_j^T A_R^{-k-1+i})^T \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

(3.20), (A.1), (A.6)式を (3.28)式に代入すると (3.30)式が求まる.

(3.29)式において, $[\partial J/\partial (T_R)_{jk}]$ は (A.1)で求まっており, $\partial (T_R)_{jk}/\partial b_R$ は (A.3)式を b_R で微分して,

$$\frac{\partial (T_R)_{jk}}{\partial b_R} = A_R^{T-k} e_j \quad (\text{A.7})$$

となる. これらを (3.29)式に代入すると (3.31)式が得られる.