リアプノフ代数行列方程式の解行列の陽的表示と 最大, 最小固有値の存在範囲

森 武 宏*・福 間 則 夫**・桑 原 道 義*

On Explicit Solutions of the Algebraic Lyapunov Matrix Equation
and Bounds for their Extremal Characteristic Roots

Takehiro MORI*, Norio FUKUMA** and Michiyoshi KUWAHARA*

As is known well, Lyapunov matrix equation, together with Riccati equation, plays a fundamental role in various aspects of linear and nonlinear system theory. Due to its extreme importance, a lot of papers concerning numerical methods of solving it efficiently have been published, though it is merely a linear algebraic equation. Moreover, in recent years many simple inequalities have been proposed to evaluate the "size" of its solution at hand.

In this paper, some new explicit formulae for the solution of the Lyapunov matrix equation are presented and lower and upper bounds for its extremal characteristic roots are derived using these formulae. The obtained formulae may be theoretically interesting in its own right and may possess some points of advantages in solving the equation numerically. The bounds derived here are quite useful because they can be applied in a unified manner to the equation with any coefficient matrix whenever it has a positive definite solution. Simple numerical examples are illustrated to make the significance of the present approach clear.

Keyword: algebraic matrix equation, Lyapunov matrix equation, explicit solution, characteristic root

1. ま え が き

リアプノフ代数行列方程式は, リカッチ行列方程式とともに線形あるいは非線形のシステム理論の多くの局面に現れ, 重要な役割を果たす方程式として知られている。たとえば, その応用例をいくつか数え挙げて

も評価関数の計算, 最適レギュレータやフィルタの設計, リカッチ方程式の解法, リアプノフ関数の構成, 過渡応答の評価, などがただちに挙げられる。リアプノフ方程式自身は, 通常の線形代数方程式にほかならないが, 上に述べたような重要性のゆえに古くから興味もたれ, これまでに能率のよい数値解法^{1)~4)}やそれに関連した解行列の表示法^{5), 6)}などについて多くの研究結果が報告されている。また近年は, その解行列の“大きさ”(解行列のノルムや最大, 最小固有値など)の評価をめぐる, それらの上, 下界を与える簡便な評価式が相次いで報じられている^{7)~15)}。本論文は, リアプノフ行列方程式の解のいくつかの新たな陽的表示式を示し, さらにこれらの表示式を用いて行列解の最大, 最小固有値についてその存在範囲を与える評価式を導いたものである。得られた評価式によると, 従来の結果が対象とし得ない場合を含めた, より広いクラスの方程式に対して統一した形でその解の“大きさ”の評価を得ることができる。本論文では以下に述べるように議論を進める。まず, 次章では方程式の係数行列が一般の安定行列の場合について, 解行列の表示式とその固有値の限界評価式を導く。3章では, 特に係数が単純行列の場合について2章の議論と並行した結果を示す。これらの結果に関する検討と簡単な数値例が4章で与えられる。最初に, ここで用いられる記号について触れておこう。(j, k)要素が x_{jk} である行列, $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($\in \mathbf{C}^{n \times n}$) を $X = \{x_{jk}\}$ と表記し, X に対して $\lambda_j(X)$ でその固有値を示し, さらにこれらがすべて実数であるとき, $\max_j \lambda_j(X)$ を $\lambda_{\max}(X)$ と書く。 $\lambda_{\min}(X)$ についても同様である。行列またはベクトルに対して右肩の記号(')でそれらの転置を示し, (-)で共役信号, (*)で共役転置を示す。行列 $X = X'$ または $X = X^*$ が正定値(非負正值)であるとき, $X > 0$ ($X \geq 0$) と書く。行列 $X = \{x_{jk}\} \in \mathbf{R}^{p \times q}$

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

** 京都教育大学教育学部 京都市伏見区深草藤森町 1

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji

** Faculty of Education, Kyoto University of Education, Kyoto

(Received November 7, 1980)

(Revised December 4, 1981)

($\in \mathbf{C}^{p \times q}$), $Y \in \mathbf{R}^{r \times s}$ ($\in \mathbf{C}^{r \times s}$) に対して, 行列 $X \otimes Y$ は X と Y のクロネッカ積, すなわち, その (j, k) ブロック行列が $x_{jk}Y$ である $pr \times qs$ 行列を表わす, また, 記号 I_r は r 次単位行列を示している.

2. 一般の係数行列の場合

つぎのようなリアプノフ代数行列方程式の対称行列解 P について考える.

$$A'P + PA = -BB' \quad (1)$$

ただし, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$; 安定行列, $B \in \mathbf{R}^{n \times r}$ とする. BB' が正則の場合には上式の解は正定値となるが, この場合が通常最も頻繁に取り扱われている. しかし, $P > 0$ となるのはこの場合だけでなく, BB' が非正則であっても組 (A', B) が可制御組の場合, すなわち,

$$\text{rank } M = n \quad (2)$$

$$M \triangleq [B, A'B, A'^2B, \dots, A'^{n-1}B] \in \mathbf{R}^{n \times nr}$$

ならば, 同様に正定値対称解が得られることが知られている²⁾. 解行列 P の“大きさ”の評価式の中で, $\lambda_{\min}(P)$ の下界に関しては従来 $\lambda_{\min}(BB')$ を含む式が用いられているが, この場合には下界は 0 になり意味のある評価が得られないことになっている. 本論文では, このような場合にも有意の結果が得られる評価式を導く. 本論文の最初の結果は, 解の陽的表示法を示すつぎの定理である.

《定理 1》

(1) 式の係数行列 A' に対して, $e^{A't}$ が次式のように A' についてその特性多項式に基づいて有限級数表示されているものとする.

$$e^{A't} = a_1(t)I_n + a_2(t)A' + \dots + a_n(t)A'^{n-1} \quad (3)$$

このとき, (1) 式の解は次式のように陽に書き表わすことができる.

$$P = MHM'$$

$$H \triangleq \left\{ \int_0^\infty a_j(t)a_k(t)dt \right\} \otimes I_r \in \mathbf{R}^{nr \times nr} \quad (4)$$

(証明) 付録 1 に, (3) 式の $a_i(t)$ の定め方のあらまし, 一意性やその性質について簡単に掲げておく. さて, (1) 式の解は,

$$P = \int_0^\infty e^{A't} BB' e^{A't} dt \quad (5)$$

と表わされる. 上式の被積分項中, $e^{A't}B$ は (3) 式を用いて,

$$\begin{aligned} e^{A't}B &= a_1(t)B + a_2(t)A'B + \dots + a_n(t)A'^{n-1}B \\ &= [B, A'B, \dots, A'^{n-1}B] \begin{bmatrix} a_1(t)I_r \\ a_2(t)I_r \\ \vdots \\ a_n(t)I_r \end{bmatrix} \\ &= M[a_1(t)I_r, a_2(t)I_r, \dots, a_n(t)I_r]' \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} e^{A't} BB' e^{A't} &= M[a_1(t)I_r, a_2(t)I_r, \dots, a_n(t)I_r]' \\ &\quad \cdot [a_1(t)I_r, a_2(t)I_r, \dots, a_n(t)I_r] M' \\ &= MA(t)M' \end{aligned} \quad (6)$$

となる. ただし, $A(t)$ は

$$A(t) \triangleq [a_1(t)I_r, a_2(t)I_r, \dots, a_n(t)I_r]' \cdot [a_1(t)I_r, a_2(t)I_r, \dots, a_n(t)I_r]$$

で定められる $nr \times nr$ 行列である. この $A(t)$ はまた,

$$A(t) = \{a_j(t)a_k(t)\} \otimes I_r \quad (7)$$

と書くことができる. (6), (7) 式を (5) 式に用いることによって, (4) 式の表現が得られる. ところで, 仮定により行列 A は安定であるから, (3) 式右辺の関数 $a_j(t)$ はその定め方より一般に, $e^{-\alpha t} t^\beta \sin \gamma t$ あるいは $e^{-\alpha t} t^\beta \cos \gamma t$ (α : 正数, β : 非負整数, γ : 実数) なる形の項からなっており, したがって $L^2[0, \infty)$ 関数空間に属している (付録 1 参照). これから行列 H の要素, $\int_0^\infty a_j a_k dt$ は有限確定し, H は定数行列であることがわかる. (証明終)

さて, 式 (4) 右辺における行列 H は明らかにその形から非負定値であるが, 実は正定値である. これはつぎのようにしてわかる. 関数列, $a_j(t)$, $j=1, 2, \dots, n$ はさきに述べたように L^2 に属しており, これらは互いに 1 次独立である (付録 1 参照). いま, 関数 $a_j(t)$ と $a_k(t)$ の内積を,

$$\int_0^\infty a_j(t)a_k(t)dt$$

で定めれば, 行列 $\left\{ \int_0^\infty a_j a_k dt \right\}$ は, 関数列 $a_j(t)$, $j=1, 2, \dots, n$ の Gram 行列となっている. $a_j(t)$ の 1 次独立性からこの行列は正定値である. ところで, 一般に行列 $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbf{R}^{r \times r}$ の固有値をそれぞれ, $\lambda_j(X)$, $\lambda_k(Y)$ とすると, $X \otimes Y$ の固有値は $\lambda_j(X) \cdot \lambda_k(Y)$, $j=1, 2, \dots, n$, $k=1, 2, \dots, r$ であるから, (4) 式の H の固有値は, $\lambda_i \left(\left\{ \int_0^\infty a_j(t)a_k(t)dt \right\} \right)$, $i=1, 2, \dots, n$ がそれぞれ r 個重複したものにほかならない. これよりただちに,

$$\lambda_{\max}(H) = \lambda_{\max} \left(\left\{ \int_0^\infty a_j(t)a_k(t)dt \right\} \right) > 0 \quad (8)$$

$$\lambda_{\min}(H) = \lambda_{\min} \left(\left\{ \int_0^\infty a_j(t)a_k(t)dt \right\} \right) > 0$$

が得られ, H は正定値であることが知れる.

定理 1 の結果および以上の議論から, (1) 式の解行列の最大, 最小固有値の上, 下界を与えるつぎの結果が導かれる.

〔系 1〕

(1) 式の解行列 P に対してつぎの不等式が成り立つ。

$$(1.1) \quad \lambda_{\max}(P) \leq \lambda_{\max} \left(\left\{ \int_0^{\infty} a_j(t) a_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\max}(MM')$$

$$(1.2) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\min} \left(\left\{ \int_0^{\infty} a_j(t) a_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\max}(MM')$$

$$(1.3) \quad \lambda_{\min}(P) \leq \lambda_{\max} \left(\left\{ \int_0^{\infty} a_j(t) a_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\min}(MM')$$

$$(1.4) \quad \lambda_{\min}(P) \geq \lambda_{\min} \left(\left\{ \int_0^{\infty} a_j(t) a_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\min}(MM')$$

(証明) 最初に, (1.1) と (1.2) 式について証明しよう。行列 $X = X' > 0$ に対する不等式 $x' X x \leq \lambda_{\max}(X) x' x$ を用いて一般に, $x \in \mathbf{R}^n$ ($\neq 0$) に対して

$$\frac{x' M H M' x}{x' x} \leq \lambda_{\max}(H) \cdot \frac{x' M M' x}{x' x}$$

が成り立つ。したがって, 定理 1 から

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(P) &= \max_{x \neq 0} \frac{x' M H M' x}{x' x} \leq \lambda_{\max}(H) \\ &\quad \cdot \max_{x \neq 0} \frac{x' M M' x}{x' x} \\ &= \lambda_{\max}(H) \cdot \lambda_{\max}(M M') \end{aligned}$$

である。この式と (8) 式より (1.1) 式が得られる。(1.2) は, 不等式, $\lambda_{\min}(X) x' x \leq x' X x$ を用いて得られる関係,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) \cdot \max_{x \neq 0} \frac{x' M M' x}{x' x} &\leq \max_{x \neq 0} \frac{x' M H M' x}{x' x} \\ &= \lambda_{\max}(P) \end{aligned}$$

と (8) 式より導くことができる。(1.3), (1.4) 式は

$$\lambda_{\min}(P) = \min_{x \neq 0} \frac{x' M H M' x}{x' x}$$

を用いることにより, (1.1), (1.2) 式と同様にして得ることができる。これらの場合, (2) 式が成り立てば $M M' > 0$ であり, したがって $\lambda_{\min}(M M') > 0$ であることに注意されたい。(証明終)

定理 1 では, 行列 $e^{A't}$ の $n-1$ 次までの A' についての有限級数表示を用いたが, 一般に必ずしも $n-1$ 次まで $e^{A't}$ を級数展開せずとも A の最小多項式の次数を m とすれば $e^{A't}$ は $m-1$ 次までの級数で表わすことができる。すなわち, 最小多項式による展開の係数を $b_j(t)$, $j=1, 2, \dots, m$ とすれば,

$$e^{A't} = b_1(t) I_n + b_2(t) A' + \dots + b_m(t) A'^{m-1} \quad (9)$$

と表わされる。(9) 式を用いることによって定理 1 を導いたと同様にしてつぎの結果が得られる。

《定理 2》

(1) 式の解行列はつぎのように表わすことができる。

$$P = L J L' \quad (10)$$

ここに, $L \triangleq [B, A'B, \dots, A'^{m-1}B] \in \mathbf{R}^{n \times mr}$

$$J \triangleq \left\{ \int_0^{\infty} b_j(t) b_k(t) dt \right\} \otimes I_r \in \mathbf{R}^{mr \times mr}.$$

一般に, $m \leq n$ であるので, (10) 式右辺のそれぞれの行列は, (4) 式右辺のものよりも小さなサイズの行列となりうる。特に, (2) 式が成り立てば,

$$\text{rank } L = n \quad (11)$$

となっている。なぜならば m が最小多項式の次数であることから, i を -1 より大きい整数として $A'^{m+i}B$ の各列は $A'^j B$, $j=0, 1, \dots, m-1$ の対応する列の 1 次結合で表わされる。したがって $M = [B, A'B, \dots, A'^{n-1}B]$ の最初の mr 本の列のなす行列, つまり L の階数は M のそれと同一であるからである。(11) 式から, (2) 式が成り立つとき $LL' > 0$ となっていることがわかる。また, 行列 J は定理 1 の証明およびそのあとに述べたと同じ理由により, その要素は有限確定しておりかつ $J > 0$ となっている。定理 2 の解の表現および以上の議論からただちに系 1 に対応したつぎの評価式が得られる。証明は同様に行えるので省略する。

〔系 2〕

方程式 (1) の解行列 P について, つぎの不等式が成立する。

$$(2.1) \quad \lambda_{\max}(P) \leq \lambda_{\max} \left(\left\{ \int_0^{\infty} b_j(t) b_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\max}(LL')$$

$$(2.2) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\min} \left(\left\{ \int_0^{\infty} b_j(t) b_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\max}(LL')$$

$$(2.3) \quad \lambda_{\min}(P) \leq \lambda_{\max} \left(\left\{ \int_0^{\infty} b_j(t) b_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\min}(LL')$$

$$(2.4) \quad \lambda_{\min}(P) \geq \lambda_{\min} \left(\left\{ \int_0^{\infty} b_j(t) b_k(t) dt \right\} \right) \lambda_{\min}(LL')$$

特に, (2.3), (2.4) 式において (2) 式が成り立てば, $LL' > 0$, すなわち $\lambda_{\min}(LL') > 0$ である。

3. 係数行列が単純行列の場合

(1) 式において, 特に, A が単純行列, すなわち対角行列に相似変換可能な行列とする。このとき, $e^{A't}$ は, つぎのようにスペクトル表現することができる¹⁶⁾。

$$e^{A't} = \sum_{j=1}^{\sigma} \exp[\lambda_j(A')t] E_j \quad (12)$$

ここに, $\lambda_j(A') \in \mathbf{C}$, $j=1, 2, \dots, \sigma$ は行列 A の相異なる固有値であり, $E_j \in \mathbf{C}^{n \times n}$ はつぎの性質を満たす一意に定まる行列である。

$$(i) \quad A' = \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j(A') E_j \quad (13)$$

$$(ii) \quad E_j^2 = E_j, \quad j=1, 2, \dots, \sigma \quad (14)$$

$$(iii) \quad E_j E_k = 0 \text{ (零行列)}, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \dots, \sigma \quad (15)$$

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^{\sigma} E_j = I_n \quad (16)$$

(12) 式の表現を用いると，つぎのような新たな(1)式の解の表示式が得られる。

《定理 3》

A が安定な単純行列であるとき，(1)式の解はつぎのように書くことができる。

$$P = N A N^* \quad (17)$$

ただし，

$$N \triangleq [E_1 B, E_2 B, \dots, E_{\sigma} B] \in \mathbb{C}^{n \times \sigma r}$$

$$A \triangleq \{-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)\} \otimes I_r \in \mathbb{C}^{r \times \sigma r}$$

である。ここに $\lambda_j(A')$ を λ_j と略記している。

(証明) 定理 1，定理 2 の場合と同様に，行列 $e^{A't} B \cdot B' e^{A't}$ はつぎのように書き表わされる。

$$\begin{aligned} e^{A't} B B' e^{A't} &= \left(\sum_{j=1}^{\sigma} e^{\lambda_j t} E_j B \right) \left(\sum_{j=1}^{\sigma} e^{\lambda_j t} E_j B \right)^* \\ &= [E_1 B, E_2 B, \dots, E_{\sigma} B] \\ &\quad \cdot [e^{\lambda_1 t} I_r, e^{\lambda_2 t} I_r, \dots, e^{\lambda_{\sigma} t} I_r]^* \\ &\quad \cdot [e^{\bar{\lambda}_1 t} I_r, e^{\bar{\lambda}_2 t} I_r, \dots, e^{\bar{\lambda}_{\sigma} t} I_r] \\ &\quad \cdot [E_1 B, E_2 B, \dots, E_{\sigma} B]^* \\ &= N E(t) N^* \end{aligned} \quad (18)$$

ここに， $E(t)$ は

$$\begin{aligned} E(t) &\triangleq [e^{\lambda_1 t} I_r, e^{\lambda_2 t} I_r, \dots, e^{\lambda_{\sigma} t} I_r]^* \\ &\quad \cdot [e^{\bar{\lambda}_1 t} I_r, e^{\bar{\lambda}_2 t} I_r, \dots, e^{\bar{\lambda}_{\sigma} t} I_r] \\ &= \{e^{(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)t}\} \otimes I_r \in \mathbb{C}^{r \times \sigma r} \end{aligned}$$

で定められる行列である。行列 A は安定であるから，つぎのような実変数の複素数値積分，

$$\int_0^{\infty} e^{(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)t} dt$$

の値は確定し， $-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)$ である。このことと(18)式を(5)式に用いると，(17)式の表現を得ることができる。(証明終)

ところでこの場合も， (A', B) が可制御組ならば $\text{rank } N = n$ とはならないであろうか。実際，これは正しく，(2)式の条件のもとでは $NN^* > 0$ となっていることが示される。(付録 2 参照)

また， $\{-1/(\lambda_i + \bar{\lambda}_k)\} > 0$ は明らかである。

同様にしてこの場合も定理 3 の表現を用いて，系 1，系 2 に対応したつぎの結果が導かれる。証明は省略する。

[系 3]

(1)式において A は安定な単純行列であるとする。

このとき，解 P の最大，最小固有値についてつぎの評価式が成り立つ。

$$(3.1) \quad \lambda_{\max}(P) \leq \lambda_{\max}(\{-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)\}) \lambda_{\max}(NN^*)$$

$$(3.2) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\min}(\{-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)\}) \lambda_{\max}(NN^*)$$

$$(3.3) \quad \lambda_{\min}(P) \leq \lambda_{\max}(\{-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)\}) \lambda_{\min}(NN^*)$$

$$(3.4) \quad \lambda_{\min}(P) \geq \lambda_{\min}(\{-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)\}) \lambda_{\min}(NN^*)$$

また，(2)式が成り立てば，(3.3)，(3.4)式において $NN^* > 0$ つまり $\lambda_{\min}(NN^*) > 0$ となっている。

さて，定理 3 の表現では A の固有値のほかに，行列 N を求めるために E_j が必要でありこのためには A の固有ベクトルを得なければならない。しかし， N は A の固有値が求まれば，これらの固有値と可制御行列 M とを用いて次式のように表わすことができる。(付録 3 参照)

$$N = M \{[\lambda]^* \otimes I_r\} \{[\lambda][\lambda]^* \otimes I_r\}^{-1} \quad (19)$$

ただし，上式の $[\lambda]$ は， A' の固有値 $\lambda_j(A')$ によってつぎのようにして作られる $\sigma \times n$ 行列である。

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{\sigma} & \dots & \lambda_{\sigma}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. 検 討

本章では，2，3章で得られた結果についての検討を行うとともに簡単な数値例を挙げる。定理 1 から定理 3 までの三つの新たなリアプノフ方程式の解の表現はいずれも陽的な表示であり，具体的には定理 1，定理 2 では $e^{A't}$ の有限級数表示の係数，定理 3 では A の固有値を求めることが重要な仕事となる。これらは多少面倒であるが，一旦，これらを求めておけば，(1)式右辺にさまざまな B を与えて解を計算するような場合には相当の手間を省くことができよう。特に，定理 3 では，(19)式を用いるとリアプノフ方程式の解が行列 A の固有値と組 (A', B) の可制御行列 M を用いて表わすことができる。したがって，たとえば極指定されたあとのシステム行列に対して(1)式の解を求める場合などのようにあらかじめ固有値が解っているときには，解 P は容易に計算することができよう。定理 1 ないし定理 3 を見れば，一般に，これらによる解の計算はいずれも n に比して r が小さいときには，より有利なものとなることがわかる。このように，本論文の陽的表示法によれば解を数値的に求めるときにも興味ある結果となる場合が存在すると考えられるが，ここでは立ち入らない。しかし，どちらかといえばこれらの表示法はそれ自身理論的な興味がより深いものであり，リアプノフ方程式を用いたシステム解析の各種の理論的な局面で役立つと考えられる。つぎに，各定理に対応する系の結果について考えよう。リアプノフ代数行列方程式の解行列の最大固有値あるいは最小固有

値の上界, 下界については, 近年多くの評価式が報告されている^{7)~15)}. これらの多くは, 最大, 最小固有値の下界を与えるもので, 上界を求めた報告はわずかである^{11), 13), 15)}. しかも上, 下界を問わずこれらの評価式では, (1)式右边に与える行列 BB' に条件を設けたり, あるいは場合によっては自明な結果しか得られなかったり, ほかになんらかの条件を必要としたりするなど, (1)式が正定値対称解をもつすべての場合について有意の結果が得られるわけではない. 特に 2 章の冒頭で触れたように, 最小固有値の下界の評価式には $\lambda_{\min}(BB')$ を積の形で含むため, BB' が非正則かつ (A', B) が可制御組の場合には $P > 0$ であるにもかかわらず下界は 0 となり, 意味のある結果が得られなかった^{8), 9), 11), 13)~15)}. 本論文の系 1, 系 2 の結果では, 上に述べた場合を含めて (1)式右边に任意の $BB' \geq 0$ を与えたとき $P > 0$ となる場合のすべてについて統一した形で, 解行列 P の最大, 最小固有値の上界および下界, すなわちこれらの存在範囲が得られている. 系 3 については, A が単純行列の場合上と同様のことを述べるができることともにさらに (19)式を用いると上, 下界が (A', B) の可制御行列と A の固有値をもって表現できることになる. また, BB' が非正則で (2)式が成立立たない場合は $\lambda_{\min}(P) = 0$ となり, 各系の評価式 ($j=3$), ($j=4$), $j=1, 2, 3$ が正確な評価を与えている. 一般の場合について, 得られた上, 下界の評価式のよさ, すなわち実際どれ程固有値に近い評価を与えているかについての従前の結果との比較は困難である. しかし, r が n に比べて十分に小さい場合, 可制御行列を用いた本論文の結果は相対的によい評価をもたらすものではないかと予想される. なお, 系 1 ~ 系 3 の結果相互間の一般的な比較も同様に困難である.

つぎに簡単な数値例を挙げて, 前章までの結果を例示することにしよう.

(例 1)

(1)式において, A, B がそれぞれ,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

である場合について考える. この場合, 解行列 P は,

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

となる. この解の固有値の評価を系 1 を用いて求めてみよう. (21)式の A に対して,

$$\begin{aligned} e^{A't} &= a_1(t)I_2 + a_2(t)A' \\ a_1(t) &= e^{-t} + te^{-t}, \quad a_2(t) = te^{-t} \end{aligned}$$

となるから, これより行列 $\left\{ \int_0^\infty a_j a_k dt \right\}$ は,

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

のように得られる. (21)式の場合,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

であり, これらの行列から解 P が (4)式のように表現されることが容易に確かめられる. さらに, MM' は

$$MM' = 2 \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

となる. 以上の行列に対して系 1 を適用すると, つぎの結果が得られる. ただし, $\lambda_{\max}(P)$, $\lambda_{\min}(P)$ の真の値はそれぞれ, $(9 + \sqrt{65})/4 = 4.26556\cdots$, $(9 - \sqrt{65})/4 = 0.23443\cdots$ である.

$$\lambda_{\max}(P) \leq \{[(3+2\sqrt{2})/4](13+\sqrt{153})\} = 36.96580\cdots$$

$$\lambda_{\max}(P) \geq \{[(3-2\sqrt{2})/4](13+\sqrt{153})\} = 1.08817\cdots$$

$$\lambda_{\min}(P) \leq \{[(3+2\sqrt{2})/4](13-\sqrt{153})\} = 0.91897\cdots$$

$$\lambda_{\min}(P) \geq \{[(3-2\sqrt{2})/4](13-\sqrt{153})\} = 0.02705\cdots$$

この評価について, 二, 三の従来の結果との比較を行ってみよう. 最大固有値の下界については, 従来, 最も報告が多いが, たとえば代表的な

$$\lambda_{\max}(P) \geq \lambda_{\max}(BB')/2\lambda_{\max}^{1/2}(A'A)^{9), 12)}$$

$\lambda_{\max}(P) \geq -\text{tr}(BB')/2\text{tr}(A)^7)$, $\text{tr}(\cdot)$; トレースの二つの結果の右边を計算すると, それぞれ,

$$1/2 \cdot \{(27+5\sqrt{29})/2\}^{-1/2} = 0.09629\cdots, \quad 1/4 = 0.25$$

となっている. 最大固有値の上界についてはたとえば

$$\lambda_{\max}(P) \leq -\lambda_{\max}(BB')/2\mu(A)^{15)}, \quad \mu(A) < 0$$

ただし, $\mu(A)$ はユークリッドノルムより導かれた行列 A の行列メジャー,

を挙げると, この例に対しては $\mu(A) > 0$ となり評価できない結果となる. また, 系 2 をこの例に適用したとき, (21)式の A では最小多項式と固有多項式が一致するため, 系 1 を適用した場合と同一の結果がもたらされることになる. なお, この例の A は単純行列ではないので系 3 は適用できない.

(例 2)

(1)式において

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

の場合を考えよう. 上の行列 A は単純行列であるので系 3 の方法で評価することにする. この例の方程式 (1)の解は,

$$P = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

であり, $\lambda_{\max}(P) = (2 + \sqrt{2})/8 = 0.42677\cdots$, $\lambda_{\min}(P) =$

$(2-\sqrt{2})/8=0.07322\cdots$ となっている。行列 A の固有値は、 $-1\pm i$, i ; 虚数単位であり、 E_1, E_2 は、

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

と計算される。これを用いると、 $NN^*=1/2 \cdot I_2$ となる。また、

$$\{-1/(\lambda_j + \bar{\lambda}_k)\} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

である。この場合も、解 P が (17) 式右辺のように表現できることが簡単に確かめられる。以上の結果から、評価式 (3.1) から (3.4) 式までの右辺を求めるとつぎのようになる。

$$\lambda_{\max}(P) \leq (2+\sqrt{2})/8$$

$$\lambda_{\max}(P) \geq (2-\sqrt{2})/8$$

$$\lambda_{\min}(P) \leq (2+\sqrt{2})/8$$

$$\lambda_{\min}(P) \geq (2-\sqrt{2})/8$$

すなわち、 $\lambda_{\max}(P)$ の上界と $\lambda_{\min}(P)$ の下界において、等号が成り立っていることになる。ちなみに、この例に系 1 を適用するとつぎのようになる。

$$0.09766\cdots \leq \lambda_{\max}(P) \leq 2.19311\cdots$$

$$0.01424\cdots \leq \lambda_{\min}(P) \leq 0.31997\cdots$$

この場合も例 1 同様、系 2 は系 1 と同じ結果を与えられる。

以上の 2 例のいずれについても従来の結果による最小固有値の下界評価は 0 となってしまうことに注意されたい。

5. む す び

リアプノフ代数行列方程式に対して、解行列のいくつかの新たな陽的表示の式を得た。これらの表示式はそれ自身、システム理論的に興味深いものである。さらに、それぞれの表示式に対応して、解行列の最大固有値と最小固有値の上界および下界を与える評価式を導いた。得られた評価式によると、従来扱えなかった場合を含むより一般的な方程式に対して、整理された形で、解行列の固有値の存在範囲を推定することができる。陽的表示式の数値計算法的な側面からの利用の検討と離散形リアプノフ方程式における対応する結果の考察などが残された課題であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) S. Barnett and C. Storey: Matrix Methods in Stability Theory, 88/107, Nelson (1970)
- 2) S. Barnett: Matrices in Control Theory, Van Nostrand Reinhold (1971)
- 3) I. S. Pace and S. Barnett: Comparison of Numerical Methods for Solving Liapunov Matrix Equation,

- Int. J. Control, **15**-5, 907/915 (1972)
- 4) P. Hagander: Numerical Solution $A^T S + SA + Q = 0$, Inf. Sci., **4**, 35/50 (1972)
- 5) I. E. Ziedan: Explicit Solution of the Lyapunov Matrix Equation, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-17**-3, 379/381 (1972)
- 6) N. J. Young: Formulae for the Solution of Lyapunov Matrix Equations, Int. J. Control, **31**-1, 159/179 (1980)
- 7) R. V. Patel and M. Toda: On Norm Bounds for Algebraic Riccati and Lyapunov Equations, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-23**-1, 87/88 (1978)
- 8) E. Y. Shapiro: On the Lyapunov Matrix Equation, Ibid., **AC-19**-5, 594/596 (1974)
- 9) J. J. Montemayor and B. F. Womack: Comments on "On the Lyapunov Matrix Equation", Ibid., **AC-20**-6, 814/815 (1975)
- 10) J. C. Geromel and J. Bernussou: On Bounds of Lyapunov's Matrix Equation, Ibid., **AC-24**-3, 482/483 (1979)
- 11) K. Yashuda and K. Hirai: Upper and Lower Bounds on the Solution of the Algebraic Riccati Equation, Ibid., **AC-24**-3, 483/487 (1979)
- 12) W. H. Kwon and A. E. Pearson: A Note on the Algebraic Matrix Riccati Equation, Ibid., **AC-22**-1, 143/144 (1977)
- 13) 森, 桑原: リアプノフ行列方程式に関する覚書, システムと制御, **23**-5, 277/278 (1979)
- 14) 森: リカッチ及びリアプノフ代数行列方程式の解の限界に関する覚書, 電子通信学会論文誌, **J 62-A**-10, 760/762 (1979)
- 15) 森: リアプノフ行列方程式の解の新たな評価, 電子通信学会論文誌, **J 63-A**-1, 38/40 (1980)
- 16) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 17) L. A. Zadeh and C. A. Desoer: Linear System Theory, 593/612, McGraw-Hill (1963)
- 18) K. Ogata: State Space Analysis of Control Systems, 315/321, Prentice-Hall (1967)

<付 録>

<付録 1>

特性多項式や最小多項式に基づく e^{At} の有限級数表示に関する記述は、 e^{At} の計算法の一つとして和洋の多くの教科書 (たとえば、文献 16)~18)) に見い出される。詳細はこれらに委ねることにして、ここでは本論文の内容に関連した部分のあらましを掲げておく。最小多項式による表示も特性多項式に基づくものとはほとんど同様に求められるので、(3) 式のような特性多項式による表示法について簡単に述べる。行列 A の特性多項式を、

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2}$$

$$\cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad \sum_j m_j = n$$

とする。ただし、 λ_i は重複度 m_i の A の固有値である。このとき $\chi(\lambda) \triangleq \sum_{j=1}^n a_j(t) \lambda^{j-1}$ として (3) 式の $a_i(t)$ は、

$$\left. \frac{d^k}{d\lambda^k} \chi(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda t} \right|_{\lambda=\lambda_i}$$

$$k=0, 1, \dots, m_i-1, i=1, 2, \dots, \nu$$

から決定される。 $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))'$ とすると上式はベクトル行列表現を用いて、

$$\Phi a(t) = d(t)$$

なる 1 次方程式となる。右辺の n 次列ベクトル $d(t)$ の要素は $t e^{\lambda_i t}$ ($k=0, 1, \dots, m_i-1, i=1, 2, \dots, \nu$) であり、これらは t の区間 $[0, \infty)$ で 1 次独立かつ A が安定ならば $L^2[0, \infty)$ 空間に属していることは容易にわかる。さらに、上式で Φ は正則であることを示すことができ、これより $a(t)$ は $a(t) = \Phi^{-1} d(t)$ と一意に定まることになる。このように、 $a_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) は $d(t)$ の要素の正則な行列を係数とする 1 次結合となっているから、互いに 1 次独立でありさらに A が安定であればこれらは $L^2[0, \infty)$ 空間に属していることがわかる。

<付録 2>

ここでは、つぎの補題を証明する。この結果は、つぎの補題 2 で述べる議論によっても示すことができるが、ここでは独立した証明を与えておく。

[補題 1]

単純行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ および行列 $B \in \mathbf{R}^{n \times r}$ に対して、組 (A', B) は可制御、すなわち、 $\text{rank } M = n$, $M \triangleq [B, A'B, \dots, A'^{n-1}B]$ とする。 A' の相異なる固有値を $\lambda_j(A')$, $j=1, 2, \dots, \sigma$ とし、行列 A' を $A' = \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j(A') E_j$ のようにスペクトル表示したとき、行列 $N \triangleq [E_1 B, E_2 B, \dots, E_{\sigma} B] \in \mathbf{C}^{n \times \sigma r}$ に対して、

$$\text{rank } N = n$$

が成り立つ。

(証明) $x \in \mathbf{C}^n$ に対して、 $N^* x = 0$ ならば $x = 0$ となることを示せばよい。そこで、 $N^* x = 0$ を仮定する。これより、 $x^* [E_1 B, E_2 B, \dots, E_{\sigma} B] = 0$ 、すなわち、 $x^* E_j B = 0$, $j=1, 2, \dots, \sigma$ である。ここで、 $x^* E_j = y_j^*$ と置くと、 $y_j^* B = 0$, $j=1, 2, \dots, \sigma$ 。また、 E_j の性質、(i) ~ (iii) を用いると、 $y_j^* A' = x^* E_j A' = x^* E_j \sum_{k=1}^{\sigma} \lambda_k E_k = \lambda_j x^* E_j = \lambda_j y_j^*$ を得る。ところで、 (A', B) が可制御組であるための必要十分条件は、 $\eta' A' = \lambda \eta'$, $\eta' B = 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\eta \in \mathbf{C}^n$ ならば $\eta = 0$ となる

ことである¹⁶⁾。この結果を用いると、 $y_j = 0$ 、すなわち $y_j = E_j^* x = 0$, $j=1, 2, \dots, \sigma$ が導かれる。この σ 個の式を加えて E_j の性質 (iv) を用いると、 $\sum_{j=1}^{\sigma} E_j^* x = x = 0$ が得られる。(証明終)

この結果をみると、補題 1 の条件のもとでは、 σr は n より小さくなり得ないことがわかる。行列 NN^* は非負定値かつ補題 1 より正則となり、結局、 $NN^* > 0$ であることがわかる。

<付録 3>

つぎの補題を示す。

[補題 2]

M, N を補題 1 に示す行列とする。このとき、

$$N = M \{ [\lambda] \otimes I_r \} \{ [\lambda] [\lambda]^* \otimes I_r \}^{-1}$$

が成り立つ。ただし、 $[\lambda]$ は、(20) 式によって定められる行列である。

(証明) E_j の性質 (i) ~ (iv) を用いると、

$$\begin{aligned} M &= [B, A'B, \dots, A'^{n-1}B] \\ &= [\sum_{j=1}^{\sigma} E_j B, \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j E_j B, \dots, \sum_{j=1}^{\sigma} \lambda_j^{n-1} E_j B] \\ &= [E_1 B, E_2 B, \dots, E_{\sigma} B] \begin{bmatrix} I_r & \lambda_1 I_r & \dots & \lambda_1^{n-1} I_r \\ I_r & \lambda_2 I_r & \dots & \lambda_2^{n-1} I_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_r & \lambda_{\sigma} I_r & \dots & \lambda_{\sigma}^{n-1} I_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= N \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_{\sigma} & \dots & \lambda_{\sigma}^{n-1} \end{bmatrix} \otimes I_r \right\}$$

すなわち、 $M = N \{ [\lambda] \otimes I_r \}$ を得る。この式に右から $\{ [\lambda] \otimes I_r \}^*$ を乗じると、

$$M \{ [\lambda] \otimes I_r \}^* = N \{ [\lambda] \otimes I_r \} \{ [\lambda] \otimes I_r \}^*$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち、} M \{ [\lambda]^* \otimes I_r \} &= N \{ [\lambda] \otimes I_r \} \{ [\lambda]^* \otimes I_r \} \\ &= N \{ [\lambda] [\lambda]^* \otimes I_r \} \end{aligned}$$

となる。ところで、行列 $[\lambda]$ の σ 次の小行列式には、Vandermonde 行列式が含まれるが、 $\lambda_j(A')$, $j=1, 2, \dots, \sigma$ は A' の相異なる固有値であるからこの行列式は 0 ではない。したがって行列 $[\lambda]$ の階数は σ 、つまりその行は互いに 1 次独立である。このことから、行列、 $[\lambda] [\lambda]^*$ は正則であり、したがって $[\lambda] [\lambda]^* \otimes I_r$ も正則である。ゆえに $\{ [\lambda] [\lambda]^* \otimes I_r \}^{-1}$ が存在し、求める関係式が得られる。(証明終)