操作量にむだ時間を含む線形離散値系のデカップリング制御†

川崎 義 則*・後 藤 正 則**・岩 井 善 太**

Decoupling Control of Linear Discrete Time Systems with Time-Delays
in the Control Variables

Yoshinori KAWASAKI*, Masanori GOTOH** and Zenta IWAI**

1. 緒 言

多変数系において入出力間の相互干渉を除去し1対1対応を実現するデカップリング制御は、そのシステム論的興味だけでなく実在プラントへの適用など実用面での有効性からも重要であり、これまで多くの報告がある¹⁾。しかしながら、計算機制御に適した離散値系での解析や^{2), 3)}、むだ時間を含む系に対して一般的な議論を行ったものは比較的少ないようである。

ここでは、操作量にむだ時間を含む線形定係数離散値系に対するデカップリング制御について述べる。まずデカップリング制御実現のための条件(数学的実現可能条件)を示す。つぎに得られたデカップリング制御の実践的な実現可能条件(構成可能条件)およびフィードバック則を求める。また、むだ時間系に対してしばしばなされる拡張系を用いた設計⁵⁾についても述べる。最後に、2, 3の数値例での検討結果を示す。

2. 制御対象の記述

考察の対象となる系が、差分方程式

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{\alpha} \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k-i) & (1a) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) & (1b) \end{cases}$$

で与えられているものとする。ここに $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^m$ であり、初期関数: $\mathbf{u}(k)=0$, $-\alpha \leq k < 0$ である。今、シフトオペレータ ∇ を導入して系(1)を

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\nabla)\mathbf{u}(k) & (2a) \\ \mathbf{B}(\nabla) = \sum_{i=0}^{\alpha} \mathbf{B}_i \nabla^i & (2b) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) & (2c) \end{cases}$$

のように書き改める。ここに、 $\nabla f(k) = f(k-1)$, $\nabla^{\lambda} f(k) = f(k-\lambda)$, $\nabla^{-1} f(k) = f(k+1)$, $\nabla^{-\lambda} f(k) = f(k+\lambda)$ である。

3. 状態フィードバックによるデカップリング制御

系(2)について、対応定数 d_i ($i=1, 2, \dots, m$) を

$$\begin{cases} d_i = \min \{j : \mathbf{c}_i \mathbf{A}^j \mathbf{B}(\nabla) \neq 0, j=0, 1, \dots, n-1\} \\ \text{または} \\ d_i = n-1, \text{ if } \mathbf{c}_i \mathbf{A}^j \mathbf{B}(\nabla) = 0, \forall j \end{cases} \quad (3)$$

で定義する。ここに $\mathbf{c}_i$ は $\mathbf{C}$ の第 i 行ベクトルを示す。

さて、系(2)に対して、つぎの状態フィードバック則を適用するものとする。

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{P}(\nabla)\mathbf{x}(k) + \mathbf{Q}(\nabla)\boldsymbol{\omega}(k) \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{P}(\nabla)$, $\mathbf{Q}(\nabla)$ は ∇ に関する有理関数マトリクスであり、 $\boldsymbol{\omega}$ は設定入力 ($\boldsymbol{\omega} \in R^m$) である。このとき、つぎのようにデカップリング制御を定義する。

【定義1】 制御則(4)式を系(2)に適用したとき、系の入出力間に、適当な非負の整数 l と l_i が存在し

$$y_i(k) + \sum_{j=1}^{l_i} e_{ij} \nabla^j y_i(k) = \omega_i(k-l), \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5)$$

が成立するとき、系(2)はデカップリング制御されたという。ここに y_i, ω_i はそれぞれ $\mathbf{y}, \boldsymbol{\omega}$ の第 i 成分であり、 e_{ij} は任意のパラメータである。

《定理1》 今、 $\det D^*(\nabla) \neq 0$ であるとする。このとき(4)式のフィードバック則において

$$\mathbf{P}(\nabla) = -\mathbf{D}^*(\nabla)^{-1} \mathbf{C}^* \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}(\nabla) = \mathbf{D}^*(\nabla)^{-1} \nabla^r \quad (7)$$

と選べば (r : 非負の整数), 系(2)はデカップリング制御されて(5)式が得られる。ただし

† 第20回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭56・7)

* 有明工業高等専門学校 大牟田市東萩尾町 150

** 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Ariake Technical College, Ohmuta

** Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received December 7, 1981)

(Revised March 15, 1982)

Keyword: decoupling control, tim-delay system, linear system, discrete system

$$D^*(V) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 A^{d_1} B(V) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m A^{d_m} B(V) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C^* = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m A^{d_m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{d_1+1} e_{1j} \mathbf{c}_1 A^{d_1+1-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{d_m+1} e_{mj} \mathbf{c}_m A^{d_m+1-j} \end{bmatrix} \quad (9)$$

である。(証明)文献 2)の方法に準じて行う(省略) ■

以上で状態フィードバックによるデカップリング制御が実現できることが示されたが、定理 1 は数学的に実現可能なこと(数学的実現可能)を示したに過ぎない。それは、(4)式で与えられる $\mathbf{u}(k)$ が、 $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}$ の未来値を用いる形で構成される場合を含むためである。この問題を明確にするため未来値を含まない形で構成できる(構成可能)か否かの判別の必要がある。

4. 制御則の構成可能性

今、(4)、(6)式および(7)式から

$$\mathbf{u}(k) = -D^*(V)^{-1} C^* \mathbf{x}(k) + D^*(V)^{-1} V_r \boldsymbol{\omega}(k) \quad (10)$$

を得るが、この方程式に注目してつぎを定義する。

【定義 2】 (10)式より、操作入力 of 現在値 $\mathbf{u}(k)$ が、状態量と設定入力 of 現在および過去の値 $(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1), \dots, \boldsymbol{\omega}(k), \boldsymbol{\omega}(k-1), \dots)$ および操作入力 of 過去の値 $(\mathbf{u}(k-1), \mathbf{u}(k-2), \dots)$ のみを用いて陽に解き出せれば、制御則(10)式は構成可能であるという。 ■

今、 $\det D^*(V)$ 、 $\text{adj } D^*(V)$ および p を

$$\det D^*(V) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} q_i V^i \quad (11)$$

$$\text{adj } D^*(V) = \sum_{i=0}^{\beta_1} \bar{D}_i V^i \quad (12)$$

$$p = \min \{i : q_i \neq 0, i=0, 1, \dots, \alpha_1\} \quad (13)$$

にて表わすとき、つぎの補題がいえる。

【補題】 $m \times m p$ 行列 M を

$$M = [M_0, M_1, \dots, M_{p-2}, q_p I_m + M_{p-1}] \quad (14)$$

と置く。($p \geq 1$) ただし

$$M_j = \sum_{i=0}^j \bar{D}_i C^* F_{j-i}, j \geq i, \quad F_i = A F_{i-1} + B_i, F_0 = B_0 \quad (15)$$

である。($I_m : m \times m$ 単位行列) このとき、 $M_0, M_1, \dots, q_p I_m + M_{p-1}$ のうち少なくとも一つが正則であり、かつその行列の左に存在する行列 M_i が全て零行列であれば、制御則(10)式は構成可能である。ただし $p=0$ のとき $M = q_0 I_m$ 。(証明) 省略 ■

さて、補題によりデカップリング制御の構成可能条件が形式的に示されたが、この補題をさらに吟味すれば具体的な構成可能条件を得る。得られた条件およびそのフィードバック則の構成を示す。

《定理 2》 (14)式 of 行列 M について、 $M_0 = M_1 = \dots = M_{p-2} = 0$ かつ $q_p I_m + M_{p-1}$ が正則であるとき、制御則(10)式は構成可能であり、フィードバック則は、

$$\mathbf{u}(k) = -L[\{N_1(V) + N_2(V)\} \mathbf{u}(k) - N_3(V) \mathbf{x}(k) + N_4(V) \boldsymbol{\omega}(k)] \quad (16)$$

で与えられる。ここに

$$\begin{cases} L = (q_p I_m + M_{p-1})^{-1}, & N_1(V) = \sum_{i=p+1}^{\alpha_1} q_i V^{i-p}, \\ N_2(V) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha-j} (\bar{D}_0 C^* A^{p-i} + \bar{D}_1 C^* A^{p-i-1} + \dots + \bar{D}_{p-1} C^*) B_{i+j} \right\} V^{j+1}, \\ N_3(V) = \sum_{i=0}^{p-1} \bar{D}_i C^* A^{p-i} + \sum_{i=p}^{\beta_1} \bar{D}_i C^* V^{i-(p-1)}, \\ N_4(V) = \sum_{i=0}^{\beta_1} \bar{D}_i V^i \end{cases} \quad (17)$$

である(ただし $r=p$ と選んでいる)。(証明) 省略 ■

5. 拡張系による考察

これまで示したデカップリング制御の構成法とは別に、むだ時間を含む離散値系の設計でしばしば採られる方法を示す。それは、遅れを有する成分を新たな状態変数とみなし本来の状態変数に付加した拡張系について設計するものである。すなわち、系(2)に対し

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(k+1) = \tilde{A} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{B} \mathbf{u}(k) \quad (18a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \tilde{C} \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (18b)$$

なる系を考える。ここに

$$\tilde{\mathbf{x}}(k)^T = [\mathbf{x}(k)^T, \mathbf{u}(k-1)^T, \dots, \mathbf{u}(k-\alpha)^T]^T \quad (19)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & \dots & B_\alpha \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = [C \ 0 \ \dots \ 0] \quad (20)$$

である。拡張系(18)は、もはやむだ時間を含まない系とみなせるため、むだ時間なし of 線形離散値系のデカップリング制御問題に帰着できる²⁾。そこで(3)式に対応するものとして、系(18)に対して、つぎの

$$\begin{cases} \tilde{d}_i = \min \{j : \tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{A}^j \tilde{B} \neq 0, j=0, 1, \dots, n+m\alpha-1\} \\ \text{または} \\ \tilde{d}_i = n+m\alpha-1, \text{ if } \tilde{\mathbf{c}}_i \tilde{A}^j \tilde{B} = 0, \forall j \end{cases} \quad (21)$$

なる対応定数 $\tilde{d}_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) を定義し、系(18)に

$$\mathbf{u}(k) = \tilde{P} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{Q} \boldsymbol{\omega}(k) \quad (22)$$

なる状態フィードバック則を用いれば、定理 1 に対応してつぎの定理 3 を得る。

《定理 3》 今、 $\det \tilde{D}^* \neq 0$ であるとする。このとき(23)式 of フィードバック則において

$$\tilde{P} = -\tilde{D}^{*-1} \tilde{C}^* \quad (23)$$

$$\tilde{Q} = \tilde{D}^{*-1} \quad (24)$$

と選べば、系(18)はデカップリング制御されて(5)式が得られる。ただし

$$\tilde{D}^* = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \tilde{A} \tilde{d}_1 \tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{c}_m \tilde{A} \tilde{d}_m \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \sum_{i=0}^{\tilde{d}_1} A \tilde{d}_1 - i B_i \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \sum_{i=0}^{\tilde{d}_m} A \tilde{d}_m - i B_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^* &= \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \tilde{A} \tilde{d}_{1+1} \\ \vdots \\ \tilde{c}_m \tilde{A} \tilde{d}_{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\tilde{d}_{1+1}} e_{1j} \tilde{c}_1 \tilde{A} \tilde{d}_{1+1-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\tilde{d}_{m+1}} e_{mj} \tilde{c}_m \tilde{A} \tilde{d}_{m+1-j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 A \tilde{d}_{1+1}, \mathbf{c}_1 \sum_{i=1}^{\tilde{d}_{1+1}} A \tilde{d}_{1+1-i} B_i, \dots, \mathbf{c}_1 A \tilde{d}_1 B_\alpha \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m A \tilde{d}_{m+1}, \mathbf{c}_m \sum_{i=1}^{\tilde{d}_{m+1}} A \tilde{d}_{m+1-i} B_i, \dots, \mathbf{c}_m A \tilde{d}_m B_\alpha \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\tilde{d}_{1+1}} e_{1j} \left[\mathbf{c}_1 A \tilde{d}_{1+1}, \mathbf{c}_1 \sum_{i=1}^{\tilde{d}_{1+1}} A \tilde{d}_{1+1-i} B_i, \dots, \mathbf{c}_1 A \tilde{d}_1 B_\alpha \right] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\tilde{d}_{m+1}} e_{mj} \left[\mathbf{c}_m A \tilde{d}_{m+1}, \mathbf{c}_m \sum_{i=1}^{\tilde{d}_{m+1}} A \tilde{d}_{m+1-i} B_i, \dots, \mathbf{c}_m A \tilde{d}_m B_\alpha \right] \end{bmatrix} \quad * \\ &\quad \begin{bmatrix} \dots, \mathbf{c}_1 A \tilde{d}_1 B_\alpha \\ \vdots \\ \dots, \mathbf{c}_m A \tilde{d}_m B_\alpha \end{bmatrix} \quad (26) \end{aligned}$$

である。(証明) 省略

なお、拡張系(18)におけるデカップリング制御では前述の取扱いと異なり、定理3の条件を満足すれば同時に構成可能条件をも必ず満たしていることに注意する。今のところ、これら両者の方法について、いずれが有効であるかについては厳密にはいえない。しかしいくつかの例題による検証では前述の設計法がより有効であることが示された。

6. 数 値 例

(例1) 数学的実現可能であるが構成不可能な例。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} 1+\mathcal{V} & 1+2\mathcal{V} \\ \mathcal{V} & \mathcal{V}+\mathcal{V}^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

対応定数 $d_1 = d_2 = 0$ 。

$$D^*(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} 1+\mathcal{V} & 1+2\mathcal{V} \\ \mathcal{V} & \mathcal{V}+\mathcal{V}^2 \end{bmatrix}$$

より $\det D^*(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^3 \neq 0$ 。定理1から数学的実現可能。構成可能性は ($q_0 = q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = 1 \neq 0$ から $p = 3$) (14)式の $M = [M_0, M_1, q_3 I_2 + M_2]$ について、 $M_0 \neq 0$ となるため定理2より構成不可能である。

(例2) 数学的実現可能かつ構成可能な例。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} 1+\mathcal{V} & 1+2\mathcal{V} \\ 1 & 1+\mathcal{V}-\mathcal{V}^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^*(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} 1+\mathcal{V} & 1+2\mathcal{V} \\ 1 & 1+\mathcal{V}-\mathcal{V}^2 \end{bmatrix} \text{ より } \det D^*(\mathcal{V}) =$$

$- \mathcal{V}^3 \neq 0$ 。よって数学的実現可能、構成可能性は ($q_0 = q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = -1 \neq 0$ から $p = 3$) $M_0 = 0$, $M_1 = 0$,

$$q_3 I_2 + M_2 = \begin{bmatrix} 2e_{11} - 2e_{21} & 4e_{11} + 1 - 4e_{21} \\ -e_{11} - 1 + e_{21} & -2e_{11} - 2 + 2e_{21} \end{bmatrix}$$

である。今 $e_{11} = e_{21} = 0$ と置けば $\det (q_3 I_2 + M_2) = 1 \neq 0$ 。したがって構成可能である。

(例3) 上例と同様数学的実現可能かつ構成可能な例 (ただし、パラメータ $e_{ij} \neq 0$ ($i=1, 2$; $j=1$) の場合のみ)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(\mathcal{V}) = \begin{bmatrix} 1+\mathcal{V} & 1+2\mathcal{V} \\ 1 & 1+\mathcal{V} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det D^*(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^2 \neq 0$ より数学的実現可能。構成可能性は ($q_0 = q_1 = 0$, $q_2 = 1 \neq 0$ から $p = 2$)

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1+e_{11}-e_{21} & 1+e_{11}-e_{21} \\ -1-e_{11}+e_{21} & -1-e_{11}+e_{21} \end{bmatrix}$$

より、もし $e_{11} = e_{21} = 0$ と選べば $M_0 \neq 0$ より構成不可能。今 $e_{11} = -0.5$, $e_{21} = 0.5$ と選べば $M_0 = 0$ 、しかも $\det (q_2 I_2 + M_1) = 1 \neq 0$ となり構成可能となる。

(参考) 5章で述べた拡張系による方法で、上例を設計すれば、いずれも $\det \tilde{D}^* \neq 0$ なる条件が満たされないためデカップリング制御系は構成できない。

7. 結 言

操作量にむだ時間を含む線形定係数離散値系のデカップリング制御問題で、特にフィードバック制御の構成可能性を論じた。数学的実現可能なもののうち実際に構成可能なものと不可能なものが存在し、これらを判別する一手法を示した。デカップリング制御系を定義1の形で与えその任意パラメータを設計者が適当に定めることで、構成不可能を可能化したり制御系の特性指定をある程度可能にしている。なお、頁数の都合で証明はすべて割愛したことを付言します。

参 考 文 献

- 1) 河野, 杉浦: 非干渉制御問題, 計測と制御, **17**-2, 145/152 (1978)
- 2) S. Lloyd: Decoupling a Multivariable Discrete-time System, Electronics Letters, **6**-26, 831 (1970)
- 3) V. Sankaran and M.D. Srinath: Decoupling of Linear Discrete-Time Systems by State Variable Feedback, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **39**, 338/345 (1972)
- 4) 後藤, 岩井, 井上: 操作量におくれを含む系のデカップリング, 第23回自動制御連合講演会前刷, 193/194 (1980)
- 5) 山下, 足田: 入力にむだ時間をもつ系の分離制御について, 室蘭工業大学研究報告, 理工編, **10**-2, 169/179 (1980)