多変数多項式系のサーボ問題における 制御則の一構成法[†]

大久保 重 範*

A Construction of the Control's Law for the Servo Problem of Multi-Variable Polynomic Systems

Shigenori OKUBO*

In the actual systems which are described with polynomic systems, there are chemical ones biological ones and so on, and we can approximate general nonlinear systems by polynomic systems on an appropriate driving domain.

This paper is concerned with the servo problem of polynomic systems. The construction of the servo system in this paper is to apply Davison-Smith method to polynomic systems, to stabilize state $\dot{z}$ which is the time derivative of state z of the augmented system, and to guarantee the boundedness of state z at the same time.

In the servo system, state z must be converged to any constant vector generally under the consideration of constant disturbances and constant desired values. Then the boundedness of the state must be accomplished. Even if the state is bounded, it would be happened that the state is time-variable, for example a periodic function of time. So $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z} = 0$ must be accomplished because of the rejection of the above possibility. For the determination of the control's law, though the order is inverse, to set a quadratic form of $\dot{z}$ (V_D), to determine the control's law from $\dot{V}_D < 0$, and to calculate the driving domain D_S . For the next time, to set a quadratic form of z (V), and to confirm $\dot{V} < 0$ in the domain D_S . It is advantage that we can induce the condition of $\dot{V} < 0$ from one of $\dot{V}_D < 0$ in polynomic systems.

The control's law of the linear part can be gotten by the method of pole assignment or

a linear regulator with the condition of controllability. On the other hand, the nonlinear part can be gotten by the minimization of coefficients of the norm-evaluation with real numbers ρ_i ($i=1, 3, \dots$) for even degree polynomials of $\dot{V}_D$. The driving domain can be calculated from system parameters. Though its domain gives the sufficient condition for the system to drive stably, the practical one is wider than the theoretical one like as to show in a simulation of a numerical example.

From these considerations this paper's method can give an useful control's law for the servo problem of polynomic systems.

Keyword: polynomic system, servo system, augmented system, desired value, driving domain

1. ま え が き

多項式からなる非線形系を多項式系という。多項式系は化学系^{1), 2)}, 生態系³⁾に多く見られ, 経済系などにも適用可能である。また一般の非線形系は適当な動作領域で多項式系に近似できる。このように多項式系は実系のモデルとして有効であると考えられる。近年の多項式系に関する研究には, W. A. Porter らのヒルベルト空間における多項式演算の性質^{4), 5)}や Brockett の Lie 代数を使った多項式系を含むより一般の系に関する可制御, 可観測の考察^{6), 7)}などがあげられる。しかしフィードバック制御則を求める実際的方法を示すまでには到っていない。多項式系は線形系の性質を部分的ながら適用でき, 線形系の自然な拡張になっている。筆者は文献 8) で多項式系に関するレギュレータ問題を考察し, これらの性質を確認している。

さて, 設定値追従を目的にするサーボ系は, 制御工学上重要であり, 線形系においては多くの研究がなされている^{9)~12)}。しかし, 非線形系については, 応用上

[†] 第 10 回制御理論シンポジウムで発表 (昭 56・5)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received September 11, 1981)

(Revised March 30, 1982)

重要であるにもかかわらず、十分な研究がなされていない。その理由は一般性を保持した系に関する解析が困難であるためと考えられる。本稿では多項式系に関するサーボ問題を考察する。多項式系が線形系の自然な拡張とはいえ、制御則を求める計算は必ずしも容易でない。多項式系が線形系と同様動的モデルに広く使われるためには、制御則を求める計算を簡潔にすることが必要である。本方法はこの必要性を比較的満足している。

本方法は線形系における Davison-Smith 法⁹⁾を多項式系に適用したものであり、出力と設定値との偏差を零にするため、拡大系の状態 z を安定かつ有界な定数値に収束せしめるようにする。サーボ系では定数外乱、定数設定値を考慮するため、一般に z をある定数ベクトルに収束させる。そこで、まず z の有界性を図らなければならない。 z が有界でも、周期関数のように時間的に変化する場合がある。この可能性を除くには、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z} = 0$ にしなければならない。制御則は、順序が逆になるが、 $\dot{z}$ の 2 次形式 V_D を設定し、 $\dot{V}_D < 0$ より求める。同時に $\dot{V}_D < 0$ になる領域すなわち系の動作領域 D_S を求める。つぎに z の 2 次形式 V を導入し、 D_S で $\dot{V} < 0$ になることを確かめる。 $\dot{V} < 0$ の条件から、設定値および外乱の範囲が決まる。 z の初期値が D_S に含まれていれば、 $\dot{z}$ は零に収束し、 z は有界な値に収束する。これは偏差が零になることを意味する。 $\dot{V}_D < 0$ および $\dot{V} < 0$ の条件であるが、多項式系では都合よいことに、 $\dot{V}_D < 0$ の条件から $\dot{V} < 0$ が導ける¹³⁾。線形部の制御則は可制御条件のもとで極配置または線形レギュレータを使って求め、非線形部の制御則は、動作領域が $\dot{V}_D$ の中の偶数次多項式の負定の程度が大きくなるほど広くなることに着目し、実数 ρ_i を導入したノルム不等式を使って、その係数を最小にすることから求める。偶数次多項式の負定条件は系のパラメータによる簡単な不等式条件として与えられる。 $\dot{V}_D$ の奇数次多項式は動作領域を狭める要因になるため、その効果を最小にすることにより制御則を求める。 $\dot{V}_D$ が任意の z に対して負定であれば、設定値および外乱の大きさに関係なく z は有界な定数ベクトルに収束する。すなわち動作領域の制約条件を取り外すことができ、大域的に動作可能なサーボ系を作ることができる。本方法の有効性を確かめるため、2 変数 3 次多項式の系で出力が 3 次多項式の場合のシミュレーション結果を示す。

2. 問題の設定

多項式系を(1)式、出力系を(2)式とする。

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n A_i \omega_i(x) + Bu + d \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^n C_i \omega_i(x) \quad (2)$$

ここで、 $x \in R^l$, $u \in R^m$, $y \in R^p$, $A_i \in R^{l \times l} H_i$, $B \in R^{l \times m}$, $C_i \in R^{p \times l} H_i$, $d \in R^l$, $r \in R^p$, $\omega_i(x)$ は $\omega_i(x) = (x_1^{i_1} \cdots x_l^{i_l})$, で、状態 x の i 次同次座標ベクトルである。一般に x の要素 $(x_1, \dots, x_l)$ の線形独立な i 次単項式 $(C_{i_1 i_2 \dots i_l} x_1^{i_1} \cdots x_l^{i_l})$ を要素とする ${}_i H_i$ 次ベクトルを x の i 次同次座標ベクトルという。 d は有界な定数外乱、 r は定数設定値とする。(1), (2) 式の系に対し、(3)式を満たす制御則 u を求める。

$$y \rightarrow r \quad (t \rightarrow \infty) \quad (3)$$

偏差の時間積分の状態を v とし、 x, v を併合した状態を z とする。

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^n C_i \omega_i(x) - r \quad (4)$$

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \omega_i(z) + \bar{B}u + \bar{d} \quad (5)$$

ここで、 $z = (x^T, v^T)^T$ で $l_p = l + p$ として、 $z \in R^{l_p}$, $\omega_i(z)$ は z の i 次同次座標ベクトル、 $\bar{A}_i \in R^{l_p \times l_p} H_i$, $\bar{B} \in R^{l_p \times m}$, $\bar{d} \in R^{l_p}$ 特に

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} d \\ -r \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。 $\bar{A}_1, \bar{B}$ の構造は Davison-Smith の方法の場合と同一であり、つぎの条件が成り立つとする。

$$[A_1, B]: \text{可制御対}, \text{rank} \begin{bmatrix} A_1 & B \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = l_p \quad (7)$$

このとき $[\bar{A}_1, \bar{B}]$ は可制御対⁹⁾になる。上記の系に対し、制御 u を(8)式で設定し、フィードバック行列 $\bar{K}_i (i=1 \sim n)$ を求める。

$$u = - \sum_{i=1}^n \bar{K}_i \omega_i(z), \quad \bar{K}_i \in R^{m \times l_p} H_i \quad (8)$$

3. サーボ問題の解析

$t \rightarrow \infty$ で偏差が零になるためには、(5)式で z が有界、 $\dot{z} \rightarrow 0$ でなければならない。以下この条件を満たす系について考察する。 z の状態方程式は(9)式になるが、共変対称テンソル $\bar{F}_i$ を使えば(10)式に書ける。

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n (\bar{A}_i - \bar{B} \bar{K}_i) \omega_i(z) + \bar{d} \quad (9)$$

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i z^{[i]} + \bar{d}, \quad \bar{F}_i \in R^{l_p \times l_p} \quad (10)$$

ここで、 $z^{[i]}$ は z のクロネッカ幅であり、 $(\bar{A}_i - \bar{B} \bar{K}_i)$ と $\bar{F}_i$ の関係は $\omega_i(z) = U_i z^{[i]}$ の変換行列 U_i (縮約

化行列)を使えば, (11)式になる.

$$(\bar{A}_i - \bar{B}\bar{K}_i)U_i = \bar{F}_i \quad (11)$$

ここで $\dot{z}$ の2次形式 V_D を設定し, $\dot{V}_D$ を求める.

$$V_D = \frac{1}{2} \dot{z}^T P \dot{z}, \quad P \in R^{l_p \times l_p},$$

$$P = P^T > 0 \quad (12)$$

$$\dot{V}_D = \dot{z}^T P \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \bar{F}_i(z \otimes \cdots \otimes \dot{z} \otimes \cdots \otimes z) \quad (13)$$

(13)式に $\xi = \sqrt{P}z$ の変換を施し, 各項に関するノルム評価を行う.

$$\dot{V}_D = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \xi^T \bar{F}_i \xi (\xi \otimes \cdots \otimes \dot{\xi} \otimes \cdots \otimes \xi) \quad (14)$$

ここで

$$\bar{F}_i = \sqrt{P} \bar{F}_i (\sqrt{P}^{-1})^{[i+1]} \quad (15)$$

である. まず線形部に関しては, (7)式の条件のもとで, 安定化し, (16)式で $Q_1 > 0$ にとり, $P > 0$ が定まる.

$$(\bar{A}_1 - \bar{B}\bar{K}_1)^T P + P(\bar{A}_1 - \bar{B}\bar{K}_1) = -Q_1 \quad (Q_1 > 0) \quad (16)$$

$P > 0$ より

$$-\sqrt{P}^{-1} Q_1 \sqrt{P}^{-1} \leq I \mu_1 < 0 \quad (17)$$

である. つぎに非線形部すなわち $i \geq 2$ についてであるが(18)式が成り立つとする.

$$\xi^T \bar{F}_i (\xi \otimes \cdots \otimes \dot{\xi} \otimes \cdots \otimes \xi) \leq \mu_i \|\xi\|^2 \|\dot{\xi}\|^{i-1} \quad (18)$$

ノルム $\|\xi\|$ は $\|\xi\| = (\xi^T \xi)^{1/2} = (z^T P z)^{1/2}$ を意味する.

(18)式が成立すれば, $\dot{V}_D$ について(19)式が成り立つ.

$$\dot{V}_D \leq G_D(\|\xi\|) \|\dot{\xi}\|^2 \quad (19)$$

ここで

$$G_D(\|\xi\|) = \sum_{i=1}^n i \mu_i \|\xi\|^{i-1} \quad (20)$$

系の動作領域 D_s は $G_D(\|\xi\|) = 0$ の最小正根を $\|\xi_c\|$ とすれば, $\dot{V}_D < 0$ の条件から $D_s = \{\xi \mid 0 \leq \|\xi\| < \|\xi_c\|\}$ で与えられる. つぎに

$$G(\|\xi\|) = \int_0^{\|\xi\|} G_D(\|\xi\|) d\|\xi\| = \sum_{i=1}^n \mu_i \|\xi\|^i, \quad \xi \in D_s \quad (21)$$

とすれば, $G_D(\|\xi\|) < 0$ であるから, D_s で $G(\|\xi\|) < 0$ ($\xi \neq 0$) である. さらに2次形式 $V = \frac{1}{2} \xi^T \xi = \frac{1}{2} z^T P z$ を設定し, z の有界性を示す. $\dot{V}$ を計算するに当り, (18)式が任意の $\xi, \dot{\xi}$ に関して成り立つことから, $\xi^T \bar{F}_i \xi \leq \mu_i \|\xi\|^{i+1}$ に注意されたい. したがって $\dot{V}$ は(22)式を満たす.

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \xi^T \bar{F}_i \xi^{[i+1]} + \xi^T \bar{d} \leq \|\xi\| \{G(\|\xi\|) + \|\bar{d}\|\} \quad (22)$$

Fig. 1 Outline of G_D , G and V

ただし $\bar{d} = \sqrt{P} \bar{d}$ である. $G_D(\|\xi\|)$ と $G(\|\xi\|)$ の関係は Fig. 1 のようになるから, $\xi \in D_s$ で $G(\|\xi_c\|) < G(\|\xi\|) \leq 0$ であり, $G(\|\xi\|) < 0$ になる $\|\bar{d}\|$ の十分条件としての範囲は $0 \leq \|\bar{d}\| < -G(\|\xi_c\|)$ になる. 以上の考察から, サーボ系の動作許容条件はつぎのようにまとめられる.

$$D_s = \{\xi \mid 0 \leq \|\xi\| < \|\xi_c\|, 0 \leq \|\bar{d}\| < -G(\|\xi_c\|)\} \quad (23)$$

さて $\xi(t)$ の存在領域について考察してみよう.

【補題 1】

初期値 $\xi_0 = \xi(0) \in D_s$ であれば, $t > 0$ について $\xi(t) \in D_s$ である.

(証明)

$G_D, G, \dot{V}$ の概略は Fig. 1 のようになり, D_s をつぎの二つの領域 D_{s1}, D_{s2} に分けて考える. $D_{s1} = \{\xi \mid 0 \leq \|\xi\| \leq \|\xi_c\|\}$, $D_{s2} = \{\xi \mid \|\xi_c\| < \|\xi\| < \|\xi_c\| \|\xi_c\|\}$ は(22)式において $G(\|\xi\|) + \|\bar{d}\| = 0$ の最小正根であり, (23)式の条件から $\|\xi_c\| < \|\xi_c\|$ である. D_{s1} では $\dot{V}$ が正になる可能性を残すが, D_{s2} では $\dot{V}$ は必ず負である. $\xi_0 \in D_s$ に対し, $\exists t_1 \geq 0$ で $\xi(t_1) \in D_{s2}$ とすれば, $\dot{V}(\xi(t_1)) < 0$, $V = \frac{1}{2} \|\xi\|^2$ より $t \geq t_1$ で $\|\xi(t)\| \leq \|\xi(t_1)\| < \|\xi_c\|$ である. ゆえに $\xi(t) \in D_s$ である. また $\xi_0 \in D_s$ で $\forall t \geq 0$ に対し $\xi(t) \notin D_{s2}$ であることは, $\xi_0 \in D_{s1}$ かつ $\xi(t) \in D_{s1} \subset D_s$ を意味するから, $\|\xi(t)\| < \|\xi_c\|$ すなわち $\xi(t) \in D_s$ である. (証明終)

【補題 2】

$\xi_0 \in D_s$ であれば $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_\infty \in D_s$ である.

(証明)

補題 1 より $\xi_0 \in D_s$ で $\forall t \geq 0$ に対し $\xi(t) \in D_s$ である. $\|\xi(t)\| < \|\xi_c\|$ から $\xi(t)$ が有界であることがわかるが, $\xi(t)$ が周期関数になる場合のように $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| \neq 0$ になる可能性が残る. ところで, (20)式の $G_D(\|\xi\|)$ は $G_D(\|\xi\|) < 0$, $\xi \in D_s$ であるから, $\dot{V}_D < 0$ ($\xi \in D_s$, $\dot{\xi} \neq 0$) である. したがって V_D は $\xi \in D_s$ で $\dot{\xi}$ のリアプノフ関数になっている. したがって $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\xi}(t) = 0$ になる. $\xi(t)$ が有界であることを考えれば, $\xi(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で定数ベクトルに収束する. また $\forall t \geq 0$ に対し $\xi(t) \in$

D_s であるから $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_\infty \in D_s$ になる。(証明終)

[補題 3]

$\xi_\infty \in D_s$ は (24) 式を満たす。

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \xi_\infty^{[i]} + \bar{d} = 0 \quad (24)$$

(証明)

ξ に関する方程式が (25) 式であり、補題 1、補題 2

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \xi^{[i]} + \bar{d} \quad (25)$$

を使う。 $\xi_0 \in D_s$ で $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\xi} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi = \xi_\infty$ であるから、

ξ_∞ は (24) 式を満たす。(証明終)

補題 1 ~ 補題 3 の結果を $\xi(t)$ から $z(t)$ に変換し、 $z(t)$ に適用すれば、つぎの定理を得る。

《定理》 (23) 式の条件下で、 $\xi_0 \in D_s$ であれば、 $\forall t \geq 0$ に対し $\sqrt{P} z(t) = \xi(t) \in D_s$ で $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_\infty$ は (26) 式を満たし、また $y(t)$ について (27) 式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i z_\infty^{[i]} + \bar{d} = 0 \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = r \quad (27)$$

以上の考察より、多項式系でサーボ問題の制御則を構成するには $\dot{z}$ に関する 2 次形式 V_D を設定し、 $\dot{V}_D < 0$ にすればよいことがわかる。本定理は動作領域が有限である場合について述べているが、動作領域が大域的になる場合に拡張すれば、つぎの系を得る。

[系]

$G_D(\|\xi\|)$ が

$$G_D(\|\xi\|) < 0 \text{ as } \forall \xi \quad (28)$$

であれば (10) 式の系は任意の初期値 z_0 、任意の設定値 r 、および任意の定数外乱 d に対し $z(t)$ は有界で

あり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_\infty$ は $\sum_{i=0}^n \bar{F}_i z_\infty^{[i]} + \bar{d} = 0$ を満たす。

したがって $\lim_{t \rightarrow \infty} y = r$ である。

(証明)

任意の ξ に対して $G_D(\|\xi\|) < 0$ であるから、(23) 式より $\|\xi_c\| \rightarrow \infty$, $-G(\|\xi_c\|) \rightarrow \infty$ である。これは z_0 , r, d が任意でよいことを意味する。 D_s を $D_{s1} = \{\xi | 0 \leq \|\xi\| \leq \|\xi_d\|\}$ と、 $D_{s2} = \{\xi | \|\xi_d\| < \|\xi\| < \infty\}$ に分け、補題 1 の証明の方法を使えば、 ξ は有界かつ、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\xi} = 0$ になる。 $z = \sqrt{P}^{-1} \xi$ であるから、 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_\infty$,

$\|z_\infty\| < \infty$ であることを意味する。さらに系の方程式

が (10) 式より $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i z_\infty^{[i]} + \bar{d} = 0$ である。したがって

$\lim_{t \rightarrow \infty} y = r$ である。(証明終)

(28) 式の条件はサーボ系が z_0, r, d に依存せずに動

作可能であることを意味し、大域的に動作可能な条件である。

4. サーボ問題における制御則

線形部に対する制御則は (7) 式の条件のもとで、極配置法または線形レギュレータを使う。ここでは非線形部 ($i \geq 2$) の制御則について述べる。まず (9) 式から $\dot{z}$, $\dot{V}_D$ を計算する。

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n (\bar{A}_i - \bar{B} \bar{K}_i) H_i(z) \dot{\xi} \quad (29)$$

$$\dot{V}_D = \dot{z}^T \left\{ \sum_{i=1}^n P (\bar{A}_i - \bar{B} \bar{K}_i) H_i(z) \right\} \dot{z} \quad (30)$$

ここで $H_i(z) = \frac{\partial}{\partial z} \omega_i(z) \in R_{l_p}^{H_i \times l_p}$ である。 $z = \sqrt{P}^{-1} \xi$

ξ を (30) 式に代入し、 $\xi, \dot{\xi}$ で書き直す。

$$\dot{V}_D = \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i)^T \bar{\omega}_i(\xi, \dot{\xi}) \quad (31)$$

$\bar{\omega}_i(\xi, \dot{\xi})$ は $\xi, \dot{\xi}$ からなる同次座標ベクトルであり、(32) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_i(\xi, \dot{\xi}) = & \left(\sqrt{\frac{2!}{r_1! r_2! \dots r_{l_p}!}} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots \xi_{l_p}^{r_{l_p}} \right) \\ & r_1 + r_2 + \dots + r_{l_p} = 2 \\ & \times \left(\sqrt{\frac{(i-1)!}{j_1! j_2! \dots j_{l_p}!}} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_{l_p}^{j_{l_p}} \right) \\ & j_1 + j_2 + \dots + j_{l_p} = i-1 \end{aligned} \quad (32)$$

(30), (31) 式の各項の対応はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \dot{z}^T P \bar{A}_i H_i(z) \dot{z} &= \dot{\xi}^T \sqrt{P} \bar{A}_i H_i(\sqrt{P}^{-1} \xi) \sqrt{P}^{-1} \dot{\xi} \\ &= \bar{a}_i^T \omega_i(\xi, \dot{\xi}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}^T P \bar{B} \bar{K}_i H_i(z) \dot{z} &= \dot{\xi}^T \sqrt{P} \bar{B} \bar{K}_i H_i(\sqrt{P}^{-1} \xi) \sqrt{P}^{-1} \dot{\xi} \\ &= (\bar{B}_i \bar{K}_i)^T \bar{\omega}_i(\xi, \dot{\xi}) \end{aligned} \quad (34)$$

また $\bar{K}_i$ は $\bar{K}_i$ の要素からなるベクトルで (35) 式に示すような対応関係をもつ。

$$\begin{aligned} \bar{K}_i = \begin{bmatrix} \bar{k}_{i1}^T \\ \bar{k}_{i2}^T \\ \vdots \\ \bar{k}_{im}^T \end{bmatrix} &\rightarrow \bar{k}_i = \begin{bmatrix} \bar{k}_{i1} \\ \bar{k}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{k}_{im} \end{bmatrix}, \\ \bar{k}_{ij} &\in R_{l_p}^{H_i} \quad (j=1 \sim m) \end{aligned} \quad (35)$$

$L_i = m \cdot l_p H_i$, $N_i = l_p H_2 \cdot l_p H_{i-1}$ とすれば、 $\bar{a}_i \in R^{N_i}$, $\bar{B}_i \in R^{N_i \times L_i}$, $\bar{K}_i \in R^{L_i}$, $\bar{\omega}_i(\xi, \dot{\xi}) \in R^{N_i}$ である。 $\bar{\omega}_i(\xi, \dot{\xi})$ のノルムは簡単な計算より (36) 式を満たす。

$$\|\omega_i(\xi, \dot{\xi})\| = \|\dot{\xi}\|^2 \cdot \|\xi\|^{i-1} \quad (36)$$

系の動作領域は $\dot{V}_D < 0$ からなる ξ の領域で、これを広く確保するには、 $\dot{V}_D$ を構成する各多項式をできるだけ負定に近づける必要がある。一般に偶数次多項式は負定になり得るが、奇数次多項式は負定になり得ないので、 $\dot{V}_D$ を負定に近づける一つの方法として、本

稿では $\dot{V}_D$ の偶数次多項式を負定に近づけ、奇数次多項式の $\dot{V}_D$ に対する寄与を小さくする。(30)式で各偶数次多項式についてはつぎのノルム不等式が成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{a}}_i - \tilde{B}_i \tilde{\mathbf{k}}_i)^T \tilde{\omega}_i(\xi, \dot{\xi}) \\ & \leq (\|\bar{\mathbf{a}}_i - \tilde{B}_i \tilde{\mathbf{k}}_i - \rho_i \tilde{\mathbf{c}}_i\| + \rho_i) \|\dot{\xi}\|^2 \cdot \|\xi\|^{i-1}, \\ & i \in \text{odd} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで

$$\|\dot{\xi}\|^2 \|\xi\|^{i-1} = \tilde{\mathbf{c}}_i^T \omega_i(\xi, \dot{\xi}), \quad \tilde{\mathbf{c}}_i \in R^{N_i}, \quad i \in \text{odd} \quad (38)$$

である。 ρ_i は任意の実数とする。さて(36)式の偶数次多項式を負定に近づけるには、ノルムの係数を最小にすることである。まず $\tilde{\mathbf{k}}_i$ で最小化すれば、 $\tilde{\mathbf{k}}_i$ およびノルムの係数 μ_i はつぎようになる。

$$\tilde{\mathbf{k}}_i = (\tilde{B}_i^T \tilde{B}_i)^{-1} \tilde{B}_i^T (\bar{\mathbf{a}}_i - \rho_i \tilde{\mathbf{c}}_i), \quad i \in \text{odd} \quad (39)$$

$$\mu_i = \sqrt{\alpha_i \rho_i^2 - 2\beta_i \rho_i + \gamma_i + \rho_i}, \quad i \in \text{odd} \quad (40)$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \tilde{\mathbf{c}}_i^T \tilde{B}_i \tilde{\mathbf{c}}_i, \quad \beta_i = \tilde{\mathbf{c}}_i^T \tilde{B}_i \bar{\mathbf{a}}_i, \quad \gamma_i = \bar{\mathbf{a}}_i^T \tilde{B}_i \bar{\mathbf{a}}_i, \\ \tilde{B}_i &= I - \tilde{B}_i (\tilde{B}_i^T \tilde{B}_i)^{-1} \tilde{B}_i^T \end{aligned} \quad (41)$$

である。 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ についてつぎの不等式が成り立つ。

[補題 4]

$$\alpha_i \geq 1, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \alpha_i \gamma_i - \beta_i^2 \geq 0 \quad (42)$$

(証明)

$\alpha_i \geq 0$ であるが、 $0 \leq \alpha_i < 1$ である場合はあり得ないことを示す。 $0 \leq \alpha_i < 1$ であると仮定する。この場合(40)式より $\rho_i \rightarrow -\infty$ で $\mu_i \rightarrow -\infty$ になる。したがって(37)式はいくらでも負定にすることができる。ところで

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T P \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{v}}^T) \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^T P_{11} \dot{\mathbf{x}} + 2\dot{\mathbf{x}}^T P_{12} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}}^T P_{22} \dot{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \{\varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{K}_i) \dot{\mathbf{x}} + \theta_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{K}_i) \dot{\mathbf{v}}\} \quad (44)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \quad (45)$$

と書ける。 $\ddot{\mathbf{v}}$ の右辺は、 $\mathbf{v}, \bar{K}_i$ を陽に含まないことに注意する。ここで $\varphi_i \in R^{1 \times l}$, $\theta_i \in R^{1 \times p}$, $\eta_i \in R^{p \times l}$ とする。

$$\begin{aligned} \dot{V}_D &= (\dot{\mathbf{x}}^T P_{11} + \dot{\mathbf{v}}^T P_{12}^T) \sum_{i=1}^n \{\varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{K}_i) \dot{\mathbf{x}} \\ &+ \theta_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \bar{K}_i) \dot{\mathbf{v}}\} \\ &+ (\dot{\mathbf{x}}^T P_{12} + \dot{\mathbf{v}}^T P_{22}) \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (46)$$

(46)式で $\bar{K}_i$ を調整することにより、 $\dot{V}_D \leq \sum_{i=1}^n \mu_i \|\dot{\xi}\|^2$

$\|\xi\|^{i-1}$ で $\exists i_a \in \text{odd}, \mu_{i_a} \rightarrow -\infty$ にできたとする。 $P > 0$ より $P_{11} > 0$ であるから、 $\mathbf{x} = -P_{11}^{-1} P_{12} \mathbf{v}$, すなわち $\dot{\mathbf{x}} = -P_{11}^{-1} P_{12} \dot{\mathbf{v}}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \dot{V}_D &= \dot{\mathbf{v}}^T (P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12}) \sum_{i=1}^n \eta_i (-P_{11}^{-1} P_{12} \mathbf{v}) \\ &\quad \times P_{11}^{-1} P_{12} \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (47)$$

である。(47)式は $\bar{K}_i$ を陽に含まないため、 $i = i_a$ の部分をいくらでも負定にすることはできない。ゆえに $\alpha_i \geq 1$ である。 $\gamma_i \geq 0, \alpha_i \gamma_i - \beta_i^2 \geq 0$ については自明である。(証明終)

$\alpha_i > 1$ の場合、(40)式の最小値が存在し、 ρ_i が(48)式するとき、 μ_i の最小値は(49)式になる。 $\alpha_i = 1$ の場合は、 $\rho_i \rightarrow -\infty$ で $\mu_i \rightarrow \beta_i$ になるが、(48), (49)式は α_i に関する極限をとれば、 $\alpha_i \rightarrow 1$ の場合も含む。

$$\rho_i = \frac{1}{\alpha_i} \{\beta_i - \sqrt{(\alpha_i \gamma_i - \beta_i^2)(\alpha_i - 1)}\} \quad (48)$$

$$\mu_i = \frac{1}{\alpha_i} \{\beta_i + \sqrt{(\alpha_i \gamma_i - \beta_i^2)(\alpha_i - 1)}\} \quad (49)$$

μ_i が負になる条件はつぎのように与えられる。

[補題 5]

$$-\sqrt{\alpha_i \gamma_i} \leq \beta_i < -\sqrt{(\alpha_i - 1) \gamma_i} \quad (50)$$

のとき $\mu_i < 0$ である。

(証明)

(49)式で $\mu_i < 0$ とし、補題 4 の条件を使う。

(証明終)

(50)式の不等式で $-\sqrt{\alpha_i \gamma_i} \leq \beta_i$ は常に成り立つので、実質の条件は $\beta_i < -\sqrt{(\alpha_i - 1) \gamma_i}$ である。

ところで多項式 G_D の係数 μ_i は P の選択に依存するが、 P をどのように選ぶかについての指針を付録で述べる。

つぎに奇数次多項式の場合について考察する。奇数次多項式は一般に負定にならず、ノルムを使って大きいほうに不等式評価をやればその係数は正になる。これは動作領域を狭める要因になるので、奇数次多項式の寄与はできるだけ小さくなるようにフィードバック行列を決める。(38)式は i が奇数の場合に対して成り立ち、 i が偶数であれば $\|\xi\|^{i-1}$ に $(\xi^T \xi)^{1/2}$ の平方根の項を含むため成り立たない。そこで i が偶数の場合、すなわち(31)式の各奇数次多項式に対しては、(37)式で $\rho_i = 0$ とおいたノルム不等式を使う。

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{a}}_i - \tilde{B}_i \tilde{\mathbf{k}}_i)^T \tilde{\omega}_i(\xi, \dot{\xi}) \leq \|\bar{\mathbf{a}}_i - \tilde{B}_i \tilde{\mathbf{k}}_i\| \cdot \|\dot{\xi}\|^2 \cdot \|\xi\|^{i-1}, \\ & i \in \text{even} \end{aligned} \quad (51)$$

したがって、 $\tilde{\mathbf{k}}_i, \mu_i$ はつぎのように決まる。

$$\tilde{\mathbf{k}}_i = (\tilde{B}_i^T \tilde{B}_i)^{-1} \tilde{B}_i^T \bar{\mathbf{a}}_i, \quad i \in \text{even} \quad (52)$$

$$\mu_i = \sqrt{\gamma_i} \quad i \in \text{even} \quad (53)$$

以上、制御則を求める手法を述べたが、これらを流

Fig. 2 The flow chart of a construction for control's law

れ図にまとめれば Fig. 2 になる。さて、大域的に動作可能な条件は (28) 式であるが、 $G_D(\|\xi\|) = \sum_{i=1}^n i \mu_i \|\xi\|^{i-1} < 0$ の必要十分条件は $\mu_1 < 0$ で $G_D(\|\xi\|) = 0$ の代数方程式が正根をもたないこと、すなわち複素根と負根のみであることである。この場合当然 $\mu_n < 0$ でなければならない。ところで (53) 式より i が偶数に対し $\mu_i \geq 0$ であるから、 $\mu_n < 0$ になるためには、系の多項式の次数 n は奇数でなければならない。

5. 数 値 例

数値例として (54)~(56) 式の系に本手法を適用した場合について考察する。線形部の制御則には線形レギュレータを使い、状態の荷重行列 $Q = \text{diag}(10.0)$ 、制御の荷重行列 $R = 1.0$ とした。この場合、全体の制御則 u は (57) 式で与えられる。

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1^3 + 2.0x_1^2x_2 + 0.5x_1x_2^2 + 0.3x_2^3 + u + d \quad (54)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2.0x_2 + 0.5x_1^3 + 0.3x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 0.5x_2^3 + u \quad (55)$$

$$\dot{v} = x_1 + x_2 + x_1^3 + 0.5x_1^2x_2 + 0.3x_1x_2^2$$

Fig. 3 Output response curves of $r=0.02$, $d=0.01$

Fig. 4 Output response curves of $r=10.0$, $d=5.0$

$$+ 0.2x_2^3 - r \quad (56)$$

$$u = -(3.29x_1 + 1.95x_2 + 3.16v + 1.61x_1^3 + 2.96x_1^2x_2 - 2.10x_1^2v + 0.182x_1x_2^2 - 0.444x_1x_2v + 1.44x_1v^2 + 0.789x_2^3 - 0.0473x_2^2v + 1.15x_2v^2 + 0.301v^3) \quad (57)$$

本系では、 $G_D(\|\xi\|) = -0.654 + 7.74\|\xi\|^2$ であり、動作領域、設定値・外乱の範囲はつぎのように与えられる。

$$D_S: 0 \leq \{(1.87x_1 - 0.255x_2 - 0.0498v)^2 + (-0.255x_1 + 1.34x_2 + 0.659v)^2 + (-0.0498x_1 + 0.659x_2 + 3.35v)^2\}^{1/2} < 0.291 \quad (58)$$

$$0 \leq \{(1.87d + 0.0498r)^2 + (0.255d + 0.659r)^2 + (0.0498d + 3.35r)^2\}^{1/2} < 0.128 \quad (59)$$

上記の条件を満足する場合として、 $r=0.02$, $d=0.01$ で、 $z^T = (x_1, x_2, v)$ の初期値が $z_{o1}^T = (0.0, 0.0, 0.0)$, $z_{o2}^T = (0.01, 0.0, 0.0)$ の場合の応答を Fig. 3 に示す。さらに上記の条件が満足されない場合として、 $r=10.0$, $d=5.0$, $z_{o1}^T = (0.0, 0.0, 0.0)$, $z_{o2}^T = (3.0, 0.0, 0.0)$ の場合の応答を Fig. 4 に示す。いずれの場合も出力が設定値に収束することがわかる。特に Fig. 4

は理論上の十分条件としての動作領域外に初期値がある場合であり、実際の動作条件は、理論上のそれよりも十分緩和であることがわかる。

6. あとがき

本稿では、多変数多項式系のサーボ問題について制御則の性質および構成法について述べた。多項式系は線形系の自然な拡張になっており、扱いやすい性質をもつため、応用が広いと考えられる。本稿では、Davison-Smithの方法を適用し、比較的簡潔な計算により、拡大系の状態を定数値に収束せしめる制御則を求めた。 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}=0$ の条件 $\dot{V}_D < 0$ すなわち $G_D < 0$ から $G < 0$ が誘導され、同時に $\dot{V} < 0$ が示される。また動作条件を理論的に把握することができる。このような性質は多項式系の便利な性質であり、制御系の定量的改善をはかるうえで有用である。計算上での動作領域はあくまで十分条件であり、実際のそれはより広い領域になる。このことは例題のシミュレーションにも示した。特に任意の z に対して $\dot{V}_D < 0$ の場合は、大域的に動作可能であり、その判定は $G_D = 0$ の代数方程式の根を調べることによってなされる。すなわち $G_D = 0$ の根が複素根または負根のみであることがその条件になる。なお、本稿では制御則の計算を簡潔にするため、 V_D を 2 次形式に選んだが、2 次形式で十分であるという意味ではない。動作領域が広い制御則を求めるには、 V_D を高次の正定値形式に選ぶ必要があるが、制御則を求める考え方は本稿で述べた考え方と基本的に変らない。サーボ系では定数設定値が概して零でない場合を考えるが、定数設定値が零である場合はいわゆるレギュレータ系になり、本方法は外乱のある多変数多項式系に関するレギュレータ問題における制御則の構成をも含むものである。

最後に日頃御指導を賜っている東京大学工学部北森俊行教授に感謝いたします。

参考文献

- 1) G. R. Gavalos: Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems, Springer, New York, 1/30 (1968)
- 2) 井本：反応工学，日刊工業新聞社，1/84 (1968)
- 3) 山口：非線形現象の数学，朝倉書店，61/134 (1972)
- 4) W. A. Porter and R. M. Desantis: Linear Systems with Multiplicative Control, Int. J. Control, **20**-2, 257/266 (1974)
- 5) R. M. Desantis and W. A. Porter: On the Analysis of Feedback Systems with a Polynomial Plant, Int. J. Control, **21**-1, 159/175 (1975)
- 6) R. W. Brockett: Lie Algebras and Lie Groups in Control Theory, In Geometric Methods in System

- Theory, (D. Q. Mayne and R. W. Brockett, ed.), D. Reidel, Dordrecht-Holland, 43/82 (1973)
- 7) R. W. Brockett: System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces, SIAM. J. Control, **10**-2, 265/284 (1972)
- 8) 大久保，北森：非線形レギュレータの構成，計測自動制御学会論文集，**11**-5, 541/549 (1975)
- 9) E. J. Davison and H. W. Smith: Pole Assignment in Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Constant Disturbances, Automatica, **7**, 489/498 (1971)
- 10) E. J. Davison: The Output Control of Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances, IEEE Trans., On Automatic Control, **AC**-17-5, 621/629 (1972)
- 11) 朴，鈴木，藤井：積分型コントローラをもつ多変数系最適追従系の設計，計測自動制御学会論文集，**10**-1, 1/5 (1974)
- 12) 武田，北森：線形多入力最適追従制御系の一設計法，計測自動制御学会論文集，**14**-4, 359/363 (1978)
- 13) 大久保：多項式からなる非線形系の定数設定値サーボ系，第 10 回制御理論シンポジウム資料，127/130 (1981)

《付 録》

〈P の選択に関する指針〉

$\mu_i < 0$ になる条件

$$\beta_i < -\sqrt{(\alpha_i - 1)\gamma_i} \quad (\text{A } 1)$$

を幾何学的に解釈する。

$$\hat{B}_i = T_i^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_i \quad (\text{A } 2)$$

$I: (N_i - L_i) \times (N_i - L_i)$ の単位行列

でありこの T_i を使って

$$\bar{\mathbf{a}}_i = [I \ 0] T_i \bar{\mathbf{a}}_i, \quad \bar{\mathbf{c}}_i = [I \ 0] T_i \bar{\mathbf{c}}_i \quad (\text{A } 3)$$

とすれば

$$\alpha_i = \|\bar{\mathbf{c}}_i\|^2, \quad \beta_i = \bar{\mathbf{c}}_i^T \bar{\mathbf{a}}_i, \quad \gamma_i = \|\bar{\mathbf{a}}_i\|^2 \quad (\text{A } 4)$$

ベクトル $\bar{\mathbf{a}}_i, \bar{\mathbf{c}}_i$ のなす角を θ_i とすれば、(A 1) 式は (A 5) 式になる。

$$\cos \theta_i < -\frac{\sqrt{\|\bar{\mathbf{c}}_i\|^2 - 1}}{\|\bar{\mathbf{c}}_i\|} \quad (\|\bar{\mathbf{c}}_i\| \geq 1) \quad (\text{A } 5)$$

Fig. 5 The domain of $\bar{\mathbf{a}}_i$, in which μ_i is negative

これを図に示せば Fig. 5 になる.

これより $\mu_i < 0$ になる場合は $\bar{\mathbf{a}}_i$ が図の斜線部の極錐に含まれる場合である. 中心線と母線のなす角を δ_i とすれば, δ_i は (A 6) 式で与えられる.

$$\sin \sigma_i = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{c}}_i\|} \left(0 < \delta_i \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A } 6)$$

したがって δ_i が大きいほど $\mu_i < 0$ になる領域が大きくなる. ところで

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{c}}_i\|^2 &= \bar{\mathbf{c}}_i^T \bar{\mathbf{c}}_i - \bar{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i (\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \bar{\mathbf{c}}_i \\ &= (l+p)^{i+1} - \bar{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i (\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \bar{\mathbf{c}}_i \quad (\text{A } 7) \end{aligned}$$

である. $\bar{\mathbf{c}}_i$ は定数ベクトル, $\tilde{\mathbf{B}}_i$ は B および P によ

って決まる行列であり, $\|\bar{\mathbf{c}}_i\|$ は B, P のみに依存し, A_i (i は 3 以上の奇数) に依存しない. 非線形部のパラメータに独立に $\mu_i < 0$ の領域を大きくするような P の設定法が考えられる. すなわち

$$\bar{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i (\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \bar{\mathbf{c}}_i \rightarrow \max \quad (\text{A } 8)$$

にすることである. 系の奇数次 ($i \geq 3$) が複数個考えられる場合は, それらの荷重和を P で最大にすることと代替する.

$$\sum_{i=3,5,7,\dots} w_i \bar{\mathbf{c}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i (\tilde{\mathbf{B}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_i^T \bar{\mathbf{c}}_i \rightarrow \max \quad (w_i > 0) \quad (\text{A } 9)$$