放物形分布定数系に対するサーボ系の設計†

小林 敏 弘*・黒 岩 恵**

A Design Procedure for a Servomechanism Problem of Distributed Parameter Systems of Parabolic Type

Toshihiro KOBAYASHI* and Megumu KUROIWA**

In this paper a servomechanism problem is investigated for a distributed parameter system of parabolic type. The servomechanism problem considered here is to design a feedback control system such that the output will tend to a desired constant reference vector as $t \rightarrow \infty$ even for a system with constant unknown disturbances.

Under some assumptions with respect to input-distribution functions it is shown that there exists a feedback controller which stabilizes and regulates a distributed parameter system. From a practical and applicable point of view, a design procedure of a servomechanism is presented which can be realized in "finite-dimensional" theories and techniques for a "infinite-dimensional" distributed parameter system. In the design procedure it is necessary to construct a finite-dimensional observer in order to estimate the system state from measurement data. Some numerical examples are also presented to show the effectiveness of the design procedure.

Keyword: distributed parameter system of parabolic type, design of servomechanism, finite-dimensional controller, finite-dimensional observer

1. 緒 論

一般に、サーボ系の特徴は、閉ループ系の安定化のみならず、定常状態において制御量が目標値に一致する出力レギュレーションをも満たすことである。集中定数系に対するサーボ系の設計問題に関しては、数多くの研究があり、木村¹⁾と古田²⁾の解説もある。

分布定数系に対しても、サーボ系の設計問題は、プ

ロセス制御の分野などで非常に重要であると思われるが、筆者等の知る限り、この方面の研究としては、Desoer 等³⁾によるもの以外ほとんどない。Desoer 等は、convolution algebra を使用することにより、サーボ系は外生信号の発生システムのモデルを閉ループ内に含んでいなければならないことを指摘しているが、具体的な設計法については考察していない。本論文では、放物形分布定数系に対して、ステップ状外乱あるいは目標値に有効なサーボ系の設計問題について考察する。分布定数系といえども、無限次元のコントローラを設計するのは、実用上困難である。それゆえ、ここでは有限次元の範囲で実現可能なサーボ系を、Davison⁴⁾の考え方をを用いて構成する。

2. 系の記述とサーボ問題

まず、われわれの取扱う分布定数系について述べる。 V, H を二つのヒルベルト空間として

$$V \subset H, V \text{ は } H \text{ で稠密} \quad (2.1)$$

であるとする。 V' を V の双対空間とし、 H' を H と同一視すれば $V \subset H \subset V'$ になる。作用素 $A \in \mathcal{L}(V, V')$ (V から V' への有界線形作用素の空間) が与えられ、それが強圧的⁵⁾、すなわち定数 α, β が存在し

$$(Au, u) + \beta \|u\|_{H^2}^2 \geq \alpha \|u\|_{V^2}^2, u \in V, \alpha > 0 \quad (2.2)$$

であるとする。そのとき、ステップ状外乱をもつ分布定数系が、つぎのように与えられる。

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = \sum_{i=1}^p g_i f_i(t) + \sum_{j=1}^q h_j s_j(t), t > 0 \quad (2.3)$$

$$u(0) = u_0 \in H \quad (2.4)$$

ここに $g_i \in H$ ($i=1, \dots, p$) は設計可能な入力分布関数、 $h_j \in H$ ($j=1, \dots, q$) は未知の外乱分布関数である。 $f_i(\cdot) \in C^1(0, \infty)$ ($i=1, \dots, p$) が入力関数、 s_j ($j=1, \dots, q$) は未知ステップ状関数であるとする。

作用素 $-A$ は H における半群 $U(t)$ の生成作用素である⁵⁾から、系(2.3), (2.4)の解は $C(0, \infty, H)$ に一

† 第 23 回自動制御連合講演会で発表 (昭 55・11)

* 九州工業大学工学部 北九州市戸畑区仙水町 1-1

** 松下電器産業(株) 門真市大字門真 1006

* Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu

** Matsushita Electric Industrial Co., Ltd, Kadoma (Received May 28, 1981)

(Revised March 8, 1982)

意に存在する。さらに、作用素 A が対称で、 V から H への単射がコンパクトであれば、半群 $U(t)$ は H 上の対称完全連続作用素となる。このとき、ヒルベルト・シュミットの展開定理の帰結として、つぎの (i) ~ (iv) の性質をもつ固有値、固有関数の列 $\{\lambda_n, \varphi_n; n=1, 2, \dots\}$ が存在する^{5), 6)}。

$$(i) \quad \text{const.} > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty. \quad (2.5)$$

(ii) $\{\varphi_n; n=1, 2, \dots\}$ は H の完全正規直交系を構成する。

(iii) 各固有関数 φ_n は

$$U(t)\varphi_n = e^{\lambda_n t} \varphi_n, \quad A\varphi_n = -\lambda_n \varphi_n \quad (2.6)$$

を満足する。

(iv) 任意の $h \in H$ に対して

$$U(t)h = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} h_n \varphi_n, \quad h_n = (h, \varphi_n)_H. \quad (2.7)$$

以上より、系 (2.3), (2.4) の一意解は

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)u_0 + \int_0^t U(t-\tau) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^p g_i f_i(t) + \sum_{j=1}^q h_j s_j(\tau) \right) d\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\lambda_n t} u_{0n} + \sum_{i=1}^p g_{in} \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} f_i(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^q h_{jn} \int_0^t e^{\lambda_n(t-\tau)} s_j(\tau) d\tau \right] \varphi_n \quad (2.8) \end{aligned}$$

と求まる。ここに $u_{0n} = (u_0, \varphi_n)_H$, $g_{in} = (g_i, \varphi_n)_H$, $h_{jn} = (h_j, \varphi_n)_H$ である。

つぎに制御量 y としては、 $w_k (k=1, \dots, r)$ を H に属する既知関数として

$$y_k(t) = (w_k, u(t))_H, \quad k=1, \dots, r. \quad (2.9)$$

を考える。このとき

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn} u_n(t), \quad w_{kn} = (w_k, \varphi_n)_H \\ &\quad k=1, \dots, r \quad (2.10) \end{aligned}$$

となる。

ここで考察するサーボ問題は、

- 1) 閉ループ系の特性根のすべてが安定である。
- 2) ステップ状外乱の存在のもとで、 y_d を目標値ベクトルとすると、制御偏差 $e(t)$

$$e(t) = y(t) - y_d \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.11)$$

に出力レギュレーションする。

という 2 条件を満足するサーボ系を構成することである。次章以下で、このサーボ系を Davison の考え方に基づいて設計し、それが有限次元の範囲で実現可能であることを示す。

3. 有限次元サーボ系の構成

本章では、前章で与えられた分布定数系に対するサーボ系を有限次元で構成する。そしてそのために必要となる条件について述べる。

系 (2.3), (2.4) は、固有関数展開により

$$\frac{du_n}{dt} = \lambda_n u_n(t) + \sum_{i=1}^p g_{in} f_i(t) + \sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(t) \quad (3.1)$$

$$u_n(0) = u_{0n}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n \quad (3.2)$$

となる。正または零の固有値に対する固有関数の数を、その重複度数だけ数えて M とするとき

$$N \geq \max(M, r) \quad (3.3)$$

となるよう整数 N を選ぶ。ただし N を選ぶとき、同じ固有値に対する固有関数が全部入るように選ぶものとする。

サーボ系を N 次で構成することを考える。系 (3.1) の最初の N 次サブシステムは

$$\frac{du^N}{dt} = A_N u^N(t) + G_N f(t) + H_N s(t), \quad u^N(0) = u_0^N \quad (3.4)$$

となる。ここに $u^N = [u_1, \dots, u_N]^T$, $f = [f_1, \dots, f_p]^T$, $s = [s_1, \dots, s_q]^T$, $A_N = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$,

$$G_N = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1N} & \dots & g_{pN} \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{q1} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{1N} & \dots & h_{qN} \end{bmatrix}$$

である。一方、制御偏差 $e(t)$ は

$$e(t) = \Phi_N u^N(t) + \Phi_{\infty} u_{\infty}(t) - y_d \quad (3.5)$$

とかける。ただし

$$u_{\infty} = [u_{N+1}, u_{N+2}, \dots]^T,$$

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{r1} & \dots & w_{rN} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\infty} = \begin{bmatrix} w_{1,N+1} & w_{1,N+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{r,N+1} & w_{r,N+2} & \dots \end{bmatrix}.$$

(3.4), (3.5) 式の両辺を時間 t で微分すると、 $ds/dt=0$, $dy_d/dt=0$ であるので

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{u}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_N \\ 0 & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{u}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_N \end{bmatrix} \dot{f}(t) + \begin{bmatrix} \Phi_{\infty} \dot{u}_{\infty}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

が得られる。ここに $\dot{u}^N$ は u^N に関する微分を示す。集中定数系と異なるのは、右辺第 3 項である。今システム (3.6)

で $\begin{bmatrix} 0 & \Phi_N \\ 0 & A_N \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ G_N \end{bmatrix}$ が可制御対があれば、システム

の特性根をすべて安定にする状態フィードバック則

$$\dot{f} = K_u \dot{u}^N + K_e e \quad (3.7)$$

が存在する。ここに K_u , K_e はそれぞれ $p \times N$, $p \times r$ 行列である。さらに条件

$$\int_0^{\infty} \|\Phi_{\infty} \dot{u}_{\infty}(t)\|^2 dt < \infty \quad (3.8)$$

が満たされれば $[e^T, (\dot{u}^N)^T]^T$ は、2 乗可積分関数の空

間 $L_2(0, \infty)$ の $(r+N)$ 直積空間 $L_2^{r+N}(0, \infty)$ に属する。

それゆえ、出力レギュレーション

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0, \text{ i. e., } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (3.9)$$

が成立する。

(注意 1) 条件 (3.8) の $\|\cdot\|$ は、有限次元ユークリッド空間の任意のノルムでよい。条件 (3.8) を一般化して、 $\|\Phi_\infty \dot{u}_\infty\| \in L_p(0, \infty)$ ($p \geq 1$) が成立するとき $[e^T, (\dot{u}_\infty^T)^T]^T$ は空間 $L_p^{r+N}(0, \infty)$ に属する (付録 1 参照)。

フィードバック則 (3.7) における行列 K_u, K_e は、有限次元系に対する通常の 2 次形式評価関数の最小化問題あるいは、極配置問題を解くことにより決定される²⁾。また、 $\begin{pmatrix} 0 & \Phi_N \\ 0 & \Lambda_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ G_N \end{pmatrix}$ は、 (Λ_N, G_N) が可制御かつ

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & \Phi_N \\ G_N & \Lambda_N \end{pmatrix} = r+N \leq p+N$$

のとき、可制御対となることが容易にわかる²⁾。 $g_i (i=1, \dots, p)$, $w_k (k=1, \dots, r)$ は、この可制御性のための条件を満足するものでなければならない。

一方、状態 $u_\infty(t)$ は無限次元の連立微分方程式

$$\frac{du_\infty}{dt} = \Lambda_\infty u_\infty(t) + G_\infty f(t) + H_\infty s(t), \quad u_\infty(0) = u_\infty^0 \quad (3.11)$$

に支配される。ここに $\Lambda_\infty = \text{diag}[\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots]$,

$$G_\infty = \begin{bmatrix} g_{1,N+1} & \dots & g_{p,N+1} \\ g_{1,N+2} & \dots & g_{p,N+2} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix},$$

$$H_\infty = \begin{bmatrix} h_{1,N+1} & \dots & h_{q,N+1} \\ h_{1,N+2} & \dots & h_{q,N+2} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

である。

以下の考察では、入力分布関数 $g_i (i=1, \dots, p)$ を第 N 次モードまでで設計できると仮定する。

【仮定 I】

$$g_{in} = 0, \quad i=1, \dots, p; \quad n=N+1, N+2, \dots \quad (3.12)$$

(注意 2) もし設計者が入力分布関数 $g_i (i=1, \dots, p)$ を設計できなければ、仮定 I は理論的には成立しない。その場合 $g_i (i=1, \dots, p)$ を同定することが必要となるが、現実には g_i の有限個のモードしか決定できない。つまり $g_i = \sum_{n=1}^{N'} g_{in} \varphi_n (i=1, \dots, p)$ なる形でしか決定できない。このとき、 $N'=N$ とすれば、仮定 I が成立する。つぎに $g_i (i=1, \dots, p)$ が設計できる場合でも、点入力あるいは境界入力分布関数 (たとえば $g_i(x) = \delta(x-c_i)$, $g_i(x) = \delta'(x-c_i)$ で入力位置 c_1 を選

ぶ場合) のときには、仮定 I は成立しない。しかし実際問題として数学的に厳密な意味での点入力、境界入力分布関数を構成することのほうが困難であり、有限個のモードをもつ分布入力分布関数で近似されなければならない。この場合も仮定 I が成立する。それゆえ、仮定 I は現実的応用に際しては、ほとんど制約にはならない。

仮定 I のもとでは、系 (3.11) は

$$\frac{du_\infty}{dt} = \Lambda_\infty u_\infty(t) + H_\infty s(t), \quad u_\infty(0) = u_\infty^0 \quad (3.13)$$

となる。先の N の選び方より、 Λ_∞ の固有値はすべて安定固有値であり、かつ、状態は、フィードバック則 (3.7) の影響を受けない。

以上より、仮定 I のもとで $\begin{pmatrix} 0 & \Phi_N \\ 0 & \Lambda_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ G_N \end{pmatrix}$ が可制御対であり、かつ条件 (3.8) が成立すれば、系 (3.1) つまり系 (2.3) のすべての特性根を安定化し、かつ出力レギュレーションするフィードバック則

$$f = K_u u^N + K_e \int_0^t e(t) dt \quad (3.14)$$

が存在する。

最後に条件 (3.8) について検討しておく。(3.12) 式より

$$\frac{d\dot{u}_n}{dt} = \Lambda_\infty \dot{u}_n(t), \quad \dot{u}_n(0) = \Lambda_\infty u_\infty^0 + H_\infty s(0) \quad (3.15)$$

を得る。すなわち

$$\frac{d\dot{u}_n}{dt} = \lambda_n \dot{u}_n(t), \quad \dot{u}_n(0) = \lambda_n u_{0n} + \sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(0), \quad n=N+1, N+2, \dots, \quad (3.16)$$

これより $\lambda_n < 0$ ($n=N+1, N+2, \dots$) を考慮して

$$\int_0^\infty \|\Phi_\infty \dot{u}_\infty(t)\|^2 dt \leq M_r \sum_{k=1}^r \sum_{n=N+1}^\infty \left(\sum_{n=N+1}^\infty w_{kn} \dot{u}_n(t) \right)^2 dt,$$

M_r は正定数

(シュワルツの不等式を用いて)

$$\begin{aligned} &\leq M_r \sum_{k=1}^r \int_0^\infty \left(\sum_{n=N+1}^\infty w_{kn} \right)^2 \left(\sum_{n=N+1}^\infty \dot{u}_n^2(t) \right) dt \\ &\leq M_r \sum_{k=1}^r \|w_k\|^2 \int_0^\infty \sum_{n=N+1}^\infty \dot{u}_n^2(t) dt \\ &= M_r \sum_{k=1}^r \|w_k\|^2 \int_0^\infty \sum_{n=N+1}^\infty \left[e^{\lambda_n t} \left(\lambda_n u_{0n} + \sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(0) \right) \right]^2 dt \\ &\leq 2M_r \sum_{k=1}^r \|w_k\|^2 \int_0^\infty \sum_{n=N+1}^\infty e^{2\lambda_n t} \left[\lambda_n^2 u_{0n}^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(0) \right)^2 \Big] dt \\
= & -M_r \sum_{k=1}^r \|w_k\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left[\lambda_n^2 u_{0n}^2 \right. \\
& \left. + \left(\sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(0) \right)^2 \right] \\
\leq & M_r \sum_{k=1}^r \|w_k\|^2 \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} (-\lambda_n) u_{0n}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^q s_j^2(0) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{h_{jn}^2}{(-\lambda_n)} \right] \quad (3.17)
\end{aligned}$$

ここで関数列 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_n}} \varphi_n; n=N+1, N+2, \dots \right\}$ は V で正規直交系をなし,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (-\lambda_n) u_{0n}^2 < \infty \quad (u_0 \in V)$$

である⁶⁾。それゆえ、 $u_0 \in V$, $h_j \in H$ ($h_j \in V'$ でもよい) のときには (3.17) 式の最右辺が有界となり、条件 (3.8) が成立する。ところで $u_0 \in V$ なる条件は、5章の例題でみるように、 u_0 が C^1 級の関数であれば、成立する。また y_k が点状出力である場合には、 w_k は H に属さないで、条件 (3.8) は成立しないが、代わりに $u_0 \in V$ のとき $\Phi_{\infty} \dot{u}_{\infty} \in L^1(0, \infty)$ が成立する (付録2)。よって $u_0 \in V$ および条件 (3.8) は、なんら強い制約ではない。

本章の結果を定理の形でまとめておく。

《定理 1》

$\begin{bmatrix} 0 & \Phi_N \\ 0 & A_N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ G_N \end{bmatrix}$ が可制御対であり、 $u_0 \in V$ であれば、仮定 I のもとで、分布定数系 (2.3) のすべての特性根を安定化し、かつ出力レギュレーションするフィードバック則 (3.14) が存在する。

ところで、フィードバック則 (3.14) において状態 $u^N(t)$ を直接使用することは、実際の見地からして困難である。次章では、 $u^N(t)$ の代りに、オブザーバによる推定値が使用可能であることを示す。

4. オブザーバ・サーボ系

本章では、フィードバック則 (3.14) における $u^N(t)$ の代りに、有限次元オブザーバによる推定値を用いてもサーボ系の構成が可能であることを示す。

オブザーバの構成に当り、観測出力 z として

$$z_l(t) = (v_l, u(t))_H, \quad v_l \in H, \quad l=1, \dots, m \quad (4.1)$$

を考える。制御量 y を用いることも可能である。

オブザーバとして N 次元オブザーバ

$$\frac{d\hat{u}^N}{dt} = A_N \hat{u}^N + G_N f + K_0 (\Phi_{zN} \hat{u}^N - z), \quad \hat{u}^N(0) = 0 \quad (4.2)$$

を構成する⁷⁾。ここに K_0 は $N \times m$ 行列で

$$\Phi_{zN} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{N1} & \dots & v_{NN} \end{bmatrix}$$

である。 (A_N, Φ_{zN}) が可観測対ならば、行列 K_0 を適当に選んで、 $A_N + K_0 \Phi_{zN}$ の固有値を実軸に対称な範囲で任意に設定できる。(3.4) と (4.2) により

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(u^N - \hat{u}^N) \\
& = (A_N + K_0 \Phi_{zN})(u^N - \hat{u}^N) + H_N s(t) + \Phi_{z\infty} u_{\infty}(t) \quad (4.3)
\end{aligned}$$

を得る。ここに

$$\Phi_{z\infty} = \begin{bmatrix} v_{1,N+1} & v_{1,N+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{N,N+1} & v_{N,N+2} & \dots \end{bmatrix}$$

である。行列 $(A_N + K_0 \Phi_{zN})$ の固有値は、実部がすべて負となるように設定されているが、強制項 $H_N s + \Phi_{z\infty} u_{\infty}$ が存在するので、定常状態で推定誤差が残る。しかし、このような推定値 $\hat{u}^N$ を用いてもサーボ系の構成が可能であることを示せる。

今、フィードバック則 (3.7) の代りに

$$\dot{f} = K_u \hat{u}^N + K_e e \quad (4.4)$$

を採用することになる。このとき (3.6) と (4.2) により、オブザーバ・サーボ系

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{u}^N \\ e \\ \dot{u}^N \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} A_N + G_N K_u + K_0 \Phi_{zN} & G_N K_e & -K_0 \Phi_{zN} \\ 0 & 0 & \Phi_N \\ G_N K_u & G_N K_e & A_N \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} \hat{u}^N \\ e \\ \dot{u}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_0 \Phi_{z\infty} \dot{u}_{\infty}(t) \\ \Phi_{\infty} \dot{u}_{\infty}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

を得る。合成システム (4.5) の固有値は、オブザーバ (4.2) の極とサーボ系 (3.6) の極とからなっているから、その実部はすべて負である。それゆえ、前章の考察と同様にして、 $u_0 \in V$ のとき

$$\int_0^{\infty} \left\| \begin{bmatrix} -K_0 \Phi_{z\infty} \dot{u}_{\infty}(t) \\ \Phi_{\infty} \dot{u}_{\infty}(t) \end{bmatrix} \right\|^2 dt < \infty \quad (4.6)$$

となるから、 $[(\hat{u}^N)^T, e^T, (\dot{u}^N)^T]^T$ は空間 $L_2^{r+2N}(0, \infty)$ に属する。つまり出力レギュレーションする。

以上より、 N 次元オブザーバによる推定値を用いても、サーボ系が構成できることが示された。本章結果を定理の形でまとめておく。

《定理 2》

$\begin{bmatrix} 0 & \Phi_N \\ 0 & A_N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ G_N \end{bmatrix}$ が可制御対、 (A_N, Φ_{zN}) が可観測対かつ $u_0 \in V$ ならば、仮定 I のもとで分布定数系

(2.3)のすべての特性根を安定化し、かつ出力レギュレーションするフィードバック則

$$f = K_u \hat{u}^N + K_e \int_e(t) dt \quad (4.7)$$

が存在する。

定理1, 定理2より, 仮定Iが満たされれば, 分布定数系(2.3)に対して有限次元の範囲内でサーボ系の構成が可能であることがわかった。

5. 数値シミュレーション

ここでは, 前章までの結果を適用し, 簡単な熱系に対するサーボ系を構成し, その数値シミュレーション結果を示す。

【例1】 つぎの1次元熱系を考える。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = g(x)f(t) + h(x)s(t) \quad t > 0, 0 < x < 1, a > 0 \quad (5.1)$$

$$\text{境界条件} \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{初期条件} \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (5.3)$$

制御量としては,

$$y(t) = u(t, c), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq c \leq 1 \quad (5.4)$$

を考え, 観測出力としても用いる。

まず2章における Hilbert 空間 H, V としては, $H = L_2(0, 1)$, $V = H^1(0, 1)$ (1次の Sobolev 空間)を取ればよい。このとき作用素 $A = -a\Delta$ は対称で, $H^1(0, 1)$ から $L_2(0, 1)$ への単射もコンパクト⁵⁾であるから, 固有関数よりなる $L_2(0, 1)$ の完全正規直交系が存在する。実際

$$\varphi_1(x) = 1, \varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos(n-1)\pi x, n = 2, 3, \dots$$

が固有関数である。固有値 λ_n は,

$$\lambda_n = -a(n-1)^2\pi^2, n = 1, 2, \dots$$

である。

今の場合, 制御量が $u(t, c)$ で(2.10)式における w が $\delta(x-c)$ となり $L_2(0, 1)$ の要素ではない。しかし系(5.1)の解 u が, $u \in L_2(0, \infty; H^1(0, 1))$ ⁵⁾ で $H^1(0, 1) \subset C(0, 1)$ であることより, 制御量 $u(t, c)$ は意味をもつ。このとき条件(3.8)は成立しないが, u_0, w, h が条件(付7)を満たせば, そのとき

$$\int_0^\infty \|\Phi_{\infty} \dot{u}_\infty(t)\| dt < \infty \quad (5.5)$$

が成立し(付録2), 出力レギュレーションする。

さてサーボ系の構成であるが, 不安定固有値は λ_1 だけであるから, $N=1$ でもよいが, 数値シミュレーションでは $N=2$ とする。数値例として

Fig. 1 The evolution of the controlled output $u(t, 1)$

Fig. 2 The steady state $u_s(x)$ of the system

$$\begin{cases} a = 0.1, c = 1.0, u_0(x) = \frac{\pi}{2}(x - 0.5), y_d = 5, \\ g(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(0.3)\varphi_2(x) = 1 + 1.18 \cos \pi x \\ h(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 0.2), \\ 1 & (0.2 < x \leq 0.8) \\ 0 & (0.8 < x \leq 1) \end{cases} \\ s(t) = 1(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

このとき $g_n = 0, n = 3, 4, \dots$ で仮定Iが成立する。さらに条件(付7)が満たされ, (5.5)が成立する。条件(付7)より $h(x)$ がデルタ関数, それゆえ境界外乱でもさしつかえない。

今, 定理2における可制御性, 可観測性の条件が満足されるので, 極指定により, サーボ系の極が $-1, -2, -3$ に, オブザーバの極が, $-5, -5$ となるようフィードバック係数ベクトルが決定できて

$$K_u = [-12.2, 8.68]^T, K_e = -6.08 \quad (5.7)$$

$$K_0 = [-25.3, -11.5]^T \quad (5.8)$$

となる。これらフィードバック係数を求めて, オブザーバ・サーボ系を構成できる。

Fig. 1 に制御量 $y(t) = u(t, 1)$ の時間応答を, Fig. 2 に $u(t, x)$ の定常状態 $u_s(x)$ を示す。以上の数値シミュレーションでは, 分布定数系(5.1)を20個の固有

関数で近似した。

6. 結 論

本論文では、放物形分布定数系に対して、ステップ状外乱が存在しても定常状態で制御量がステップ状目標値に一致する制御系の設計、すなわちサーボ系の設計問題について考察した。サーボ系の構成に際しては、閉ループ系の安定化と出力レギュレーションの両方が満足されねばならなかった。そして分布定数系に対しても、実際の見地から、有限次元の範囲で可能なサーボ系の設計法が与えられ、数値シミュレーションによってもその有効性が示された。

ところで本論文での設計法のポイントは、仮定 I である。仮定 I は、もし設計者が入力分布関数を設計できなければ、理論的には成立しない。しかし注意 2 で述べたように、仮定 I は現実的应用に際しては、ほとんど制約とはならないが、仮定 I が成立しない場合のサーボ系の設計問題も、理論面からは今後の重要な問題であろう。

参 考 文 献

- 1) 木村, 井上: 多変数制御系の理論と応用—Ⅶ, Ⅷ, システムと制御, **22**, 683/692, 743/751 (1976)
- 2) 古田, 原: サーボ技術と現代制御論, 計測と制御, **19**-10, 953/961 (1980)
- 3) C. A. Desoer and Y. T. Wang: Linear Time-Invariant Robust Servomechanism Problem: A Self-Contained Exposition, Control and Dynamic Systems, 81/129, Academic Press (1980)
- 4) E. J. Davison and H. W. Smith: Pole Assignment in Linear Time-Invariant Multivariable Systems with Constant Disturbances, Automatica, **7**, 489/498 (1971)
- 5) J. L. Lions: Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer (1971)
- 6) 溝畑: 積分方程式入門, 朝倉書店 (1968)
- 7) T. Kobayashi and S. Hitotsuya: Observers and Parameter Determination for Distributed Parameter Systems, Int. J. Control, **33**, 31/50 (1981)

《付 録》

〈付録 1〉 $\|\Phi \cdot \dot{u}_\infty\| \in L_p(0, \infty) (p \geq 1)$ のとき $[e^T, (u^N)^T]^T \in L_{p^*+N}(0, \infty)$ なることを示す。ここに $\|\cdot\|$ は有限次元ユークリッド空間の任意のノルムである。

$$u_e = \begin{bmatrix} e \\ \dot{u}^N \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_N \\ G_N K_e & A_N + G_N K_u \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \Phi \cdot \dot{u}_\infty \\ 0 \end{bmatrix}$$

と置くと、フィードバック則 (3.7) による (3.6) に対する閉ループ系は

$$\frac{du_e}{dt} = A_e u_e(t) + F(t) \quad (\text{付 1})$$

とかける。解 $u_e(t)$ は

$$u_e(t) = \exp(A_e t) u_e(0) + \int_0^t \exp(A_e(t-s)) F(s) ds \quad (\text{付 2})$$

である。ここで行列 A_e の固有値は、すべて安定に設定されているから、正定数 M, β が存在し

$$\|\exp(A_e t)\| \leq M \exp(-\beta t) \quad t > 0 \quad (\text{付 3})$$

が成立している。

$u_e \in L_{p^*+N}(0, \infty)$ を示すには、(付 2) の右辺の各項が $L_{p^*+N}(0, \infty)$ の要素となることを示せばよい。まず第 1 項は、

$$\int_0^\infty \|\exp(A_e t) u_e(0)\|^p dt \leq M^p \|u_e(0)\|^p \int_0^\infty \exp(-p\beta t) dt < \infty \quad (\text{付 4})$$

つぎに、第 2 項については、 $p > 1$ のときには

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\| \int_0^t \exp(A_e(t-s)) F(s) ds \right\|^p dt \\ & \leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \|\exp(A_e(t-s)) F(s)\| ds \right)^p dt \\ & \leq M^p \int_0^\infty \left(\int_0^t \exp(-\beta s) \|F(t-s)\| ds \right)^p dt \end{aligned}$$

($F(t)=0, t < 0$ より)

$$= M^p \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-\beta s) \|F(t-s)\| ds \right)^p dt$$

(Hölder の不等式と Fudini の定理より、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ として)

$$\begin{aligned} & \leq M^p \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-\beta s) ds \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \quad \times \left(\int_0^\infty \exp(-\beta s) \|F(t-s)\|^p ds \right) dt \\ & \leq M^p \left(\int_0^\infty \exp(-\beta s) ds \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \quad \times \int_0^\infty \exp(-\beta s) \int_0^\infty \|F(t)\|^p dt \\ & = M^p \left(\int_0^\infty \exp(-\beta s) ds \right)^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty \|\Phi \cdot \dot{u}_\infty(t)\|^p dt < \infty \end{aligned} \quad (\text{付 5})$$

となる。 $p=1$ のときも

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\| \int_0^t \exp(A_e(t-s)) F(s) ds \right\| dt \\ & \leq M \int_0^\infty \int_0^t \exp(-\beta(t-s)) \|F(s)\| ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= M \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\beta s) \|F(t-s)\| ds dt \\
 &= M \int_0^\infty \int_s^\infty \exp(-\beta s) \|F(t-s)\| dt ds \\
 &\leq M \int_0^\infty \exp(-\beta s) ds \int_0^\infty \|F(t)\| dt \\
 &= M \int_0^\infty \exp(-\beta s) ds \int_0^\infty \|\Phi_\infty \dot{u}_\infty(t)\| dt < \infty
 \end{aligned}$$

(付 6)

が成立する。(付 5), (付 6) より (付 2) の右辺第 2 項も $L_p^{r+N}(0, \infty)$ の要素であり, 結局 $u_e \in L_p^{r+N}(0, \infty)$ が示された.

〈付録 2〉 $\Phi_\infty \dot{u}_\infty \in L_1^r(0, \infty)$ のための条件の導出
 今 M_r を r のみに依存する正定数とすると,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \|\Phi_\infty \dot{u}_\infty(t)\| dt &\leq M_r \int_0^\infty \sum_{k=1}^r \left| \sum_{n=N+1}^\infty w_{kn} \dot{u}_n(t) \right| dt \\
 &\leq M_r \int_0^\infty \sum_{k=1}^r \sum_{n=N+1}^\infty |w_{kn}| \cdot \left| e^{\lambda_n t} (\lambda_n u_{0n}) \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(0) \right| dt$$

($\lambda_n < 0, n = N+1, N+2, \dots$ を考慮して)

$$\begin{aligned}
 &\leq M_r \sum_{k=1}^r \sum_{n=N+1}^\infty \frac{|w_{kn}|}{(-\lambda_n)} \left| \lambda_n u_{0n} + \sum_{j=1}^q h_{jn} s_j(0) \right| \\
 &\leq M_r \sum_{k=1}^r \left(\sum_{n=N+1}^\infty |w_{kn}| \cdot |u_{0n}| \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^q |s_j(0)| \sum_{n=N+1}^\infty \frac{|w_{kn}| |h_{jn}|}{|\lambda_n|} \right)
 \end{aligned}$$

よって $u_0, w_k (k=1, \dots, p), h_j (j=1, \dots, q)$ が条件

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=N+1}^\infty |w_{kn}| \cdot |u_{0n}| &< \infty, \\
 \sum_{n=N+1}^\infty \frac{|w_{kn}| \cdot |h_{jn}|}{|\lambda_n|} &< \infty, \quad k=1, \dots, p, j=1, \dots, q
 \end{aligned}$$

(付 7)

を満足すれば, (たとえば, $u_0 \in V, w_k \in V', h_j \in V'$ なら満足する) $\Phi_\infty \dot{u}_\infty \in L_1^r(0, \infty)$ となる.