状態方程式の z 変換, 拡張 z 変換とサンプル点間応答の一つの性質†

美 多 勉*・向 田 昌 幸*・坂 中 好 典*

The z Transform and the Modified z Transform of State Equations and a Property of the Intersample Response

Tsutomu MITA*, Masayuki MUKAIDA* and Yoshinori SAKANAKA*

は じ め に

近年マイクロコンピュータの発達によりデジタル制御理論を利用する機会が多くなり, 新しい著作も相次いで発表されている^{2)~4)}. しかし, z 変換を求める場合, 伝達関数法によるとインパルスサンプリングが出发点となり (ラプラス変換と z 変換の関係を重視していることによる), 状態方程式を使った場合0次ホールドを出发点としており, 両者の関係を明確に論じている論文, 著作などは筆者らの知る限りない.

また, 制御用のマイクロコンピュータとして演算速度の遅いものを利用する場合などでは, サンプル点間の応答波形も問題となり, 拡張 z 変換が重要となる. Kuo²⁾やFranklin³⁾は状態方程式と拡張 z 変換について若干の解説を試みているが明確な公式を導くまでには至っていない. ここでは, インパルスサンプリングの概念を状態方程式に適用し, 最初の問題を解決すると共に, 各種の離散化機構において状態方程式から直接拡張 z 変換を導く公式を求め, 応用としてサンプル点間の応答を吟味する一つの方法について述べる.

1. 物理システムと離散化機構

以下で離散化されるシステムは

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t); \quad A(n \times n), \quad B(n \times m) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t); \quad C(l \times n), \quad t \geq 0 \quad (1b)$$

とする. すると, その伝達関数行列は

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

となる. この系において $v(t)$ は以下で取り扱う離散化機構 (サンプラーやホールド回路) によって連続な入力 $u(t)$ ($t \geq 0$) からつくられるものとする.

2. インパルスサンプリングと z 変換, 拡張 z 変換

このような離散化機構の実現は無理であるが, 従来からサンプル値制御を理想化して扱うための基礎として用いられている^{1)~4)}. インパルスサンプリングを行った場合, $u_i = u(iT)$ とすると

$$v(t) = u_i \delta(t - iT) \quad [iT \leq t < (i+1)T] \quad (3)$$

となる. ただし, T はサンプリング周期で, デルタ関数 $\delta(t)$ は, $t \geq 0$ で定義された関数である⁸⁾. この場合, $x(t)$ は Fig. 1 のように, $t = iT$ の前後で Bu_i だけジャンプすることになるので, $x_i = x(iT_+)$ と定義すると, 差分方程式は

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= e^{AT} x_i + \int_{iT_+}^{(i+1)T_+} e^{A((i+1)T_+ - \tau)} Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{AT} x_i + Bu_{i+1} \quad (i \geq 0) \end{aligned} \quad (4a)$$

$$y_i = Cx_i, \quad x_0 = x(0) + Bu_0 \quad (4b)$$

となる. 本式を, $z[X(z) - z x_0] = z[u(z) - z u_0]$ を使い z 変換すると

$$\begin{aligned} Y(z) &= C(zI - e^{AT})^{-1} z x(0) \\ &\quad + zC(zI - e^{AT})^{-1} B U(z) \end{aligned} \quad (5)$$

となり, $x(0) = 0$ と置いてパルス伝達関数行列

$$G(z) = zC(zI - e^{AT})^{-1}B \quad (6)$$

を得る. よって

$$z[G(s)] = z[Ce^{As}B] = zC(zI - e^{AT})^{-1}B \quad (7)$$

となり, これが, z 変換表^{1)~4)}を一般化したものとなる. つぎに, $0 \leq m < 1$ に対してサンプル点間の変数を $x_i(m) = x(iT_+ + mT)$ と定義すれば

$$x_i(m) = e^{AmT} x_i, \quad y_i(m) = Cx_i(m) \quad (i \geq 0) \quad (8)$$

Fig. 1 Response of system using impulsive sampling

† 電気学会全国大会で発表 (昭 57・4)

* 千葉大学工学部 千葉市弥生町 1-33

* Faculty of Engineering, University of Chiba, Chiba (Received May 25, 1982)

(Revised July 8, 1982)

Keyword: state equation, modified z transform, intersample phenomenon

となり， z 変換して(5)式を使うと

$$Y(z, m) = Ce^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}zx(0) + zCe^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}BU(z) \quad (9)$$

を得，拡張パルス伝達関数行列として， $x(0)=0$ と置き

$$G(z, m) = zCe^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}B \quad (10)$$

を得る。したがって，つぎの関係式を得る。

$$z_m[G(s)] = z_m[Ce^{As}B] = zCe^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}B \quad (11)$$

なお，従来の拡張 z 変換では， $x_i(m) = x[(i-1)T + mT]$ と1サンプルの遅れを入れてサンプル点間の変数を定義しているため，拡張 z 変換表では，(10)，(11)式は $Ce^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}B$ が記載されている^{1)~3)}。状態方程式でサンプル間応答を吟味する場合，遅れを代入しないで定義したほうが(8)式が(4a)式の出力方程式として記述できるので，以下の4章でもわかるように便利である。

3. サンプラ+0 次ホールドの場合

離散化機構がサンプラ+0 次ホールドの場合，

$$v(t) = u_i \quad (iT \leq t < (i+1)T) \quad (12)$$

となり， $v(t)$ は有界なので $x(t)$ は連続となる。そこで， $x_i = x(iT)$ と置くとよく知られているように

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= e^{AT}x_i + \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A[(i+1)T-\tau]} Bv(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}x_i + \int_0^T e^{AT}d\tau Bu_i \quad (i \geq 0) \end{aligned} \quad (13a)$$

$$y_i = Cx_i, \quad x_0 = x(0) \quad (13b)$$

となり，さらに， $0 \leq m \leq 1$ に対し $x_i(m) = x(iT + mT)$ と置くと

$$x_i(m) = e^{AmT}x_i + \int_0^{mT} e^{A\tau}d\tau Bu_i \quad (i \geq 0) \quad (14a)$$

$$y_i(m) = Cx_i(m) \quad (14b)$$

となる。したがって，

$$G = \int_0^T e^{A\tau}d\tau B, \quad G_m = \int_0^{mT} e^{A\tau}d\tau B \quad (15)$$

と置くと，(13)，(14)式を z 変換して

$$Y(z) = C(zI - e^{AT})^{-1}zx(0) + C(zI - e^{AT})^{-1}GU(z) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Y(z, m) &= Ce^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}zx(0) \\ &\quad + \{Ce^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}G + CG_m\}U(z) \end{aligned} \quad (17)$$

を得， $x(0)=0$ と置いて，つぎの

$$G(z) = C(zI - e^{AT})^{-1}G \quad (18)$$

$$G(z, m) = Ce^{AmT}(zI - e^{AT})^{-1}G + G_m \quad (19)$$

パルス伝達関数行列，拡張パルス伝達関数行列を得る。

サンプリング+1 次ホールドなどの場合にも同様に

してパルス伝達関数行列，拡張パルス伝達関数を得る⁵⁾。また，ラプラス変換 $g(s)$ で与えられた信号の z 変換，拡張 z 変換は， $g(s)$ をインパルス応答とする，システム(1)式を最小実現し，(7)，(11)式の関係を用いて求められる。

なお，インパルスサンプリング時の $G(z)$ ， $G(z, m)$ からサンプラ+0 次ホールド時の $G(z)$ ， $G(z, m)$ を求めることも状態方程式を使い行うことができる^{5), 7)}。

4. 状態レギュレータのサンプル点間の応答の特性

サンプラ+0 次ホールドの場合， $0 \leq m \leq 1$ に対し

$$x_{i+1} = \bar{A}x_i + \bar{B}u_i; \quad \bar{A} = e^{AT}, \quad \bar{B} = G \quad (20)$$

$$x_i(m) = \bar{E}_m x_i + \bar{D}_m u_i; \quad \bar{E}_m = e^{AmT}, \quad \bar{D}_m = G_m \quad (21)$$

と置ける。系(20)式に対してサンプル点上での状態フィードバック制御 $u_i = -\bar{F}x_i$ を行うと，閉ループ系の応答は

$$x_{i+1} = (\bar{A} - \bar{B}\bar{F})x_i, \quad x_i(m) = (\bar{E}_m - \bar{D}_m\bar{F})x_i$$

より，次式となる。

$$x_i = (\bar{A} - \bar{B}\bar{F})^i x_0, \quad y_i = Cx_i \quad (22)$$

$$x_i(m) = (\bar{E}_m - \bar{D}_m\bar{F})(\bar{A} - \bar{B}\bar{F})^i x_0, \quad (23a)$$

$$y_i(m) = Cx_i(m) \quad (23b)$$

したがって， $\bar{A} - \bar{B}\bar{F}$ が安定行列で固有値が重複しないならば， m を一つ固定して考えることにより， $y_i(m)$ の減衰率と y_i の減衰率は一致する。すなわちサンプル点間応答の減衰率とサンプル点上の応答の減衰率は一致する。なお，サンプル点上で0でサンプル点間で持続振動する応答⁶⁾は $\bar{A} - \bar{B}\bar{F}$ が安定行列でなく $(C, \bar{A} - \bar{B}\bar{F})$ の不可観測空間に入る振動モードが存在する場合に生ずる。なぜならば，この場合，ほとんどすべての m に対し，このようなモードが $[C(\bar{E}_m - \bar{D}_m\bar{F}), \bar{A} - \bar{B}\bar{F}]$ の不可観測定空間に入ることがないことが容易に証明できるからである(証明省略)⁷⁾。

参考文献

- 森，他訳：サンプル値制御，丸善(1962)
- B. C. Kuo: Digital Control Systems, Holt, Rinehart and Winston (1980)
- G. F. Franklin et al.: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley (1980)
- 成田：ディジタルシステム制御，昭晃堂(1981)
- 美多，向田：状態方程式の拡張 z 変換とその応用，電気学会全国大会，1320 (1982)
- E. I. Jury: Hidden Oscillations in Sampled-Data Control Systems, AIEE Trans. 75, Pt. II, 391/395 (1956)
- 向田：千葉大学工学部修士論文(1982)
- 中野，美多：制御基礎理論，昭晃堂(1982)