非線形非定常確率システムモデリングの一方†

砂 原 善 文*・福 田 得 夫*・重 左 秀 彦**

On a Modeling for a Class of Nonstationary Nonlinear Systems

Yoshihumi SUNAHARA* and Tokuo FUKUDA* and Hidehiko JUSA**

In this paper, a method is presented for modeling a class of nonlinear systems which involves time-varying parameters. The system model proposed here is a type of nonlinear difference equation, where unknown parameters are assumed to be linearly involved in the system model.

The principal line of attack is to assume that the nonlinear time-varying function in the system can be expanded into the M known functions with unknown constant coefficients.

First, the estimation process of unknown parameters is given by using the maximum likelihood principle. Secondly, consistency properties and asymptotic normality conditions of the estimator are shown. Finally, two numerical examples are shown in order to demonstrate asymptotic properties of the estimator derived here.

Keyword: modeling, nonstationary nonlinear system, nonlinear difference equation, maximum likelihood principle

1. 緒 言

本論文の目的は、非定常性および非線形性を考慮すべきであると認められる不規則データに対してよくあてはまる非線形非定常モデルを提案することである。非定常性および非線形性を有するデータの例としては、たとえば Fig. 1 のように、短時間だけ大きく変動した後に比較的長時間微小な変動を持続するという非定常性と、散発的にピーク値を生ずという非線形性を共に有している、地震などの地球物理学的データをあげることができる。

非線形定係数モデル、あるいは非定常線形モデルに

Fig. 1 A typical example of the earthquake data

限定すれば、最近の研究としてはつぎのようなものがある。Ozaki and Oda¹⁾ は一種の非線形 AR 形モデルを用いて船舶の横揺れのデータに対してあてはめることを試みている。また Poznyak²⁾ は非線形回帰モデルに含まれる未知パラメータを最小 2 乗法によって求め、その一貫性について論じている。また、非定常線形モデルを用いたモデリングに関する研究としては、Lee³⁾, Kozin and Nakajima⁴⁾ らがそれぞれ最尤法あるいは最小 2 乗法を用いて未知パラメータの一貫推定量を求めている。

本論文ではシステム・モデル内の未知パラメータを含む非線形関数を展開し、その有限項で近似することによりパラメータに関しては線形であるような離散形の非定常非線形差分方程式を数学モデルとして採用し、そのモデル内に含まれる未知パラメータの推定法ならびに推定値の漸近的性質について考察する。

以下原則として、マトリクスは大文字で、ベクトルおよびスカラー量は小文字で表現し、“ $'$ ” は転置を表す。ベクトル x のノルム $\|x\|$ は通常のユークリッド・ノルムを表し、マトリクス A に対するノルム $\|A\|$ は $A'A$ の最大固有値の平方根で定義する。 $\mathcal{E}\{\cdot\}$ は期待値演算を表し、 $\mathcal{E}\{\cdot|\cdot\}$ は $\cdot$ によって条件付けられた条件付期待値を表すものとする。さらに $c_i (i=1, 2, \dots)$ は正の定数を、 I_m は m 次元単位マトリクスを表すものとする。

2. 数学モデルおよび問題の記述

本論文では、つぎのような非定常非線形モデルを採用する。

† 第 26 回システムと制御研究発表講演会で発表 (昭 57・5)

* 京都工芸繊維大学工芸学部 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

** (株)日立製作所中央研究所 国分寺市東恋ヶ窪 1-280

* Faculty of Polytechnic Sciences, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

** Central Research Laboratory, Hitachi Ltd., Kokubunji

(Received November 19, 1982)

(Revised May 11, 1983)

$$\begin{cases} y_{k+1}-y_k=\phi_k(\hat{\theta}, y_k)+B_{k+1}e_{k+1} \\ y_0=c \text{ (初期値)} \end{cases} \quad (1)$$

ここで y_k は n 次元観測過程, B_{k+1} は

$$B_{k+1}=\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{rank } \bar{B}_{k+1}=m) \quad (2)$$

で表される既知の $n \times m$ マトリクス, $\{e_k\}$ は m 次元未知入力雑音過程で, B_{k+1} および $\{e_k\}$ はつぎの仮定を満たすものとする.

[A-1] $\|B_{k+1}\| < c_1$ を満足する.

[A-2] $\mathcal{F}_k$ を $\{e_1, \dots, e_k\}$ から生成される最小 σ 代数とすると

$$\begin{cases} \mathcal{E}\{e_{k+1}|\mathcal{F}_k\}=0 \\ \mathcal{E}\{e_{k+1}e_{k+1}'|\mathcal{F}_k\}=\sigma^2 I_m \quad (\text{w. p. } 1) \\ \mathcal{E}\{(e_{k+1}e_{k+1}')^2|\mathcal{F}_k\} \leq c_2 I_m \end{cases}$$

を満足する.

さらに(1)式における $\phi_k(\hat{\theta}, y_k)$ がつぎのように表現できるものとする.

[A-3] $\phi_k(\hat{\theta}, y_k)$ は

$$\phi_k(\hat{\theta}, y_k) \triangleq \phi_{0,k}(y_k) + \sum_{i=1}^M \hat{\theta}_i \phi_{i,k}(y_k)$$

に展開可能である(注1). ただしここで $\hat{\theta} \triangleq [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_M]'$ は未知の定数パラメータであり, $\{\phi_{i,k}(y_k): i=1, 2, \dots, M\}$ は既知の関数とする.

したがって問題は, (i) 観測データ $Y_N \triangleq \{y_1, \dots, y_N\}$ から, 未知パラメータ $\{\hat{\theta}_i\}$ および入力雑音の分散の推定値を得ること, (ii) その推定値の統計学的性質を調べること, に帰着される.

3. パラメータ同定

未知パラメータ $\hat{\theta}$ および σ^2 を同定するための評価関数として

$$\begin{aligned} L_N(\theta, \sigma^2) &\triangleq Nm \log \sigma^2 \\ &+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^N \{y_{k+1}-y_k-\phi_k(\theta, y_k)\}' \\ &\times \tilde{B}_{k+1}^2 \{y_{k+1}-y_k-\phi_k(\theta, y_k)\} \end{aligned} \quad (3)$$

を採用する. ただしここで

$$\tilde{B}_{k+1} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\bar{B}_{k+1} \bar{B}_{k+1}')^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

である. この評価関数は入力雑音系列が独立な正規形確率変数であるときには近似最尤推定法に一致する. $\hat{\theta}$ および σ^2 の推定値 $\hat{\theta}_N, \hat{\sigma}_N^2$ は, (3) 式の評価関数が θ に関して2次形式であることから θ に関して偏微分することにより容易に求めることができ, その結

果はつぎのようになる.

$$\hat{\theta}_N = \Gamma_N s_N \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^2 &= -\frac{1}{mN} \sum_{k=0}^N \{y_{k+1}-y_k-\phi_k(\hat{\theta}_N, y_k)\}' \\ &\times \tilde{B}_{k+1}' \tilde{B}_{k+1} \{y_{k+1}-y_k-\phi_k(\hat{\theta}_N, y_k)\} \end{aligned} \quad (6)$$

ただしここで

$$\Gamma_N \triangleq \left\{ \sum_{k=0}^N F_k(y_k) F_k(y_k)' + \rho I_M \right\}^{-1} \quad (7)$$

$$s_N \triangleq \sum_{k=0}^N F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} (y_{k+1}-y_k-\phi_{0,k}(y_k)) \quad (8)$$

$$F_k(y_k) \triangleq [\tilde{B}_{k+1} \phi_{1,k}(y_k), \dots, \tilde{B}_{k+1} \phi_{M,k}(y_k)]' \quad (9)$$

であり, ρ は Γ_N の非正則性による数値上の問題をさけるために導入した微小な正数である. さらに Matrix Inversion Lemma⁵⁾ を用い, $\phi_k(\hat{\theta}_N, y_k)$ を $\phi_k(\hat{\theta}_k, y_k)$ で代用すると, (5), (6) 式は, つぎのような逐次形で表すことができる.

$$\begin{cases} \hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + \Gamma_{N-1} F_N(y_N) \\ \quad \times \{I_n + F_N(y_N)' \Gamma_{N-1} F_N(y_N)\}^{-1} \\ \quad \times \{\tilde{B}_{N+1} (y_{N+1}-y_N-\phi_{0,N}(y_N)) \\ \quad - F_N(y_N)' \hat{\theta}_{N-1}\}, \hat{\theta}_0 = \Gamma_0 s_0 \end{cases} \quad (10. a)$$

$$\begin{cases} \Gamma_N = \Gamma_{N-1} - \Gamma_{N-1} F_N(y_N) \{I_n + F_N(y_N)' \\ \quad \times \Gamma_{N-1} F_N(y_N)\}^{-1} F_N(y_N)' \Gamma_{N-1}, \\ \Gamma_0 = (Q_0 + \rho I_M)^{-1} \gg 0 \end{cases} \quad (10. b)$$

$$\begin{cases} (\hat{\sigma}_k^2)^* = (\hat{\sigma}_{k-1}^2)^* + \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{m} (y_{k+1}-y_k-\phi_k(\hat{\theta}_k, y_k))' \right. \\ \quad \times \tilde{B}_{k+1}^2 (y_{k+1}-y_k-\phi_k(\hat{\theta}_k, y_k)) - (\hat{\sigma}_{k-1}^2)^* \left. \right\} \\ (\hat{\sigma}_0^2)^* = \frac{1}{m} (y_1-y_0-\phi_0(\hat{\theta}_0, y_0))' \\ \quad \times \tilde{B}_1^2 (y_1-y_0-\phi_0(\hat{\theta}_0, y_0)) \end{cases} \quad (11)$$

ここで $(\hat{\sigma}_k^2)^*$ は分散 σ^2 の逐次推定値である.

4. 推定値の漸近的性質

4.1 推定値の一致性

まず未知パラメータ $\hat{\theta}$ の推定値 $\hat{\theta}_N$ の推定誤差 $\tilde{\theta}_N$ をつぎのように定義する.

$$\tilde{\theta}_N \triangleq \hat{\theta}_N - \theta_N \quad (12)$$

ところで(1)式および[A-3]より, (8)式で定義された s_N は

$$s_N = (\Gamma_N^{-1} - \rho I_M \hat{\theta}) + \sum_{k=0}^N F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} B_{k+1} e_{k+1} \quad (13)$$

と表現できる. したがって(13)式を(5)式に代入することにより, (12)式は

$$\tilde{\theta}_N = \rho \Gamma_N \hat{\theta} - \Gamma_N \sum_{k=0}^N F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} B_{k+1} e_{k+1} \quad (14)$$

と表すことができる. 本節では $\hat{\theta}_N$ の一致性, すなわち $N \rightarrow \infty$ のとき確率1で $\tilde{\theta}_N$ が零に収束することを

(注1) 実際問題として, どのように M を決定するかは非常に難しい問題である. そこで本論文では, 一応 M は既知があると仮定したうえで議論を先にすすめ, 未知の場合の対応法については別の機会に譲ることとする.

示すが、どのような条件下で一致性が保証できるかをより精密に考察するため、未知パラメータの個数が 1 個、したがって $\hat{\theta}$ がスカラー ($M=1$) の場合と、複数個、すなわち $\hat{\theta}$ がベクトル ($M \geq 2$) の場合の二つの場合に分けて考察することにする。

(i) $\hat{\theta}$ がスカラー ($M=1$) の場合: $M=1$ の場合、2, 3 章で定義された $\phi_k(\hat{\theta}, y_k)$, $F_k(y_k)$, Γ_N はそれぞれ

$$\phi_k(\hat{\theta}, y_k) = \phi_{0,k}(y_k) + \hat{\theta} \phi_{1,k}(y_k) \quad (n \text{ 次元ベクトル}) \quad (15)$$

$$F_k(y_k) = \phi_{1,k}(y_k)' \tilde{B}_{k+1} \quad (n \text{ 次元ベクトル}) \quad (16)$$

$$\Gamma_N = \left\{ \sum_{k=0}^N \phi_{1,k}(y_k)' \tilde{B}_{k+1}^2 \phi_{1,k}(y_k) + \rho \right\}^{-1} \quad (\text{スカラー}) \quad (17)$$

となる。このときつぎの定理を得る。

《定理 1》 つぎの条件 (C-1) を満足するものとする。

$$(C-1) \text{ 任意の } \kappa \in R^n \text{ に対して} \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} P\{\|\tilde{B}_{k+1} \phi_{1,k}(\kappa + B_k e_k)\|^2 > \varepsilon\} > 0$$

を満たす ε が存在する。

このとき

$$\hat{\theta}_N \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (18)$$

(証明は付録 A.1 参照)

定理 1 において留意すべき点は、システムが何らかの意味で安定であるという、通常必要とされる条件が課せられていないことにある。また条件 (C-1) については、たとえば、 $B_{k+1} = I_n (n=m)$ のときは入力雑音 $\{e_k\}$ の確率密度関数 $p(e_k)$ が $p(e_k) < p^+$ を満足すれば

$$P\{\|\phi_{1,k}(\kappa + e_k)\|^2 > \varepsilon\} \\ > 1 - p^+ \int \chi\{\|\phi_{1,k}(z)\|^2 \leq \varepsilon\} dz \quad (19)$$

($\chi\{\cdot\}$ は事象 $\cdot$ の特性関数)

となるから、任意の $\varepsilon_0 < \varepsilon$ に対して

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int \chi\{\|\phi_{1,k}(z)\|^2 < \varepsilon_0\} dz < \frac{1}{p^+} \quad (20)$$

を満たせばよいことがわかる。したがって、 $\phi_{1,k}(z)$ が k に依存せず $\phi_{1k}(z) = \phi_{1,k}(z)$ と表現できるならば $\|\phi_{1,k}(z)\| = 0$ において不感帯をもたなければ常に満たされることがわかる。

(ii) $\hat{\theta}$ がベクトル ($M \geq 2$) の場合: まず

$$\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z) \triangleq z + \phi_k(\hat{\theta}, z) \quad (21)$$

と定義する。このときつぎの (C-2)~(C-4) の条件が満たされるものとする。

(C-2) 任意の $z \in R^n$ に対して

$$\|\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z)\| \leq c_3 \|z\| + c_4$$

を満たす、ただしここで $c_3 < 1$ である(注 2)。

(C-3) 任意の $z \in R^n$ に対して

$$\|\phi_{i,k}(z)\| \leq c_5 \|z\| + c_6 \quad (i=0, 1, 2, \dots, M)$$

を満足する。

$$(C-4) \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \mathcal{E}\{F_k(y_k) F_k(y_k)' | \mathcal{F}_{k-1}\} \geq c_7 I > 0$$

w. p. 1

《定理 2》 条件 (C-2) および (C-4) を満たすものとする。このとき、

$$\hat{\theta}_N \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty. \quad (22)$$

また入力雑音の分散 σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}_N^2$ についても

$$\hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (23)$$

が成立する。(証明は付録 2 参照)

条件 (C-2) において $\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z)$ が

$$\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z) = A_k(\hat{\theta}, z) z \quad (24)$$

と表わすことができる場合には、(C-2) はつぎのように置き換えることができる。

$$(C-2)' \quad A_k(\hat{\theta}, z) \text{ の固有値を } \lambda_i(\hat{\theta}, z) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

とすると、

$$\max |\lambda_i(\hat{\theta}, z)| < 1 \quad (25)$$

を任意の $z \in R^n$ に対して満足する。

4.2 推定値の漸近的正規性

まず P_N と U_N をそれぞれつぎのように定義する。

$$P_N \triangleq \Gamma_N^{-1} / N \quad (26)$$

$$U_N \triangleq \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=0}^N \mathcal{E}\{F_k(y_k) F_k(y_k)'\} \quad (27)$$

このとき、 $\hat{\theta}$ の推定値 $\hat{\theta}_N$ に対する漸近的正規性に対してつぎの定理を得る。

《定理 3》 条件 (C-4) およびつぎの条件を満たすものとする。

(C-5) $\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z)$, $\phi_{i,k}(z)$ は一様リプシッツ条件、

$$\|\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z_1) - \tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z_2)\| \leq c_3 \|z_1 - z_2\|$$

(ただし $c_3 < 1$)

$$\|\phi_{i,k}(z_1) - \phi_{i,k}(z_2)\| \leq c_5 \|z_1 - z_2\|$$

($i=0, 1, \dots, M$)

および

$$\|\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, 0)\| \leq c_5$$

$$\|\tilde{\phi}_{i,k}(\hat{\theta}, 0)\| \leq c_5 \quad (i=0, 1, \dots, M)$$

を満足する。

このとき、

(注 2) $\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z)$ が一様リプシッツ条件

$$\|\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z_1) - \tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, z_2)\| \leq c_3 \|z_1 - z_2\|$$

および

$$\|\tilde{\phi}_k(\hat{\theta}, 0)\| \leq c_4$$

を満たすならば条件 (C-2) を満足する。また $c_3 < 1$ はシステムが b. i. b. o. (bounded inputs bounded outputs) の意味において安定であることにほかならない。

$$\sqrt{N} U_N^{-1/2} P_N \tilde{\theta}_N \xrightarrow{\text{law}} N(0, I) \text{ as } N \rightarrow \infty \quad (28)$$

が成立する．ここで $\xrightarrow{\text{law}}$ は法則収束を表す．(証明は付録3を参照)

5. デジタル・シミュレーション

本章では数値的な局面より未知パラメータの推定値の漸近的な性質を検討する．対象としたシステムはつぎの2階の確率微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + \beta(1 + \gamma x(t)^2)x(t) = v(t) \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (29)$$

で表されるシステムであり，文献1)によれば船舶の横揺れを表すモデルとして知られているものである．ここで $v(t)$ は正規性白色雑音過程である．(29)式において， $x_1(t) = x(t)$ ， $x_2(t) = dx_1(t)/dt$ と設定し， $v(t)dt = dw(t)$ と同定すれば(29)式をつぎのように状態空間表示することができる．

$$\begin{cases} d \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(1 + \gamma x_1(t)^2) & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dw(t) \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (30)$$

さらにサンプリング時刻を $t_k (k=0, 1, 2, \dots)$ ，サンプリング時間間隔を $\delta \triangleq t_{k+1} - t_k$ ，また

$$\begin{cases} y_k = [y_{1,k}, y_{2,k}]' \triangleq [x_1(t_k), x_2(t_k)]' \\ b \triangleq [0, 1]' \\ e_{k+1} \triangleq \sqrt{\delta} (w(t_{k+1}) - w(t_k)) \end{cases} \quad (31)$$

と定義すると，(30)式の離散近似モデルを得ることができる．

$$y_{k+1} - y_k = \delta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(1 + \gamma y_{1,k}^2) & -\alpha \end{bmatrix} y_k + b e_{k+1} \quad (32)$$

本論文で取り扱っているシステムは離散時間システムであるので，以後(29)式の代わりに(32)式を考察の対象とする(注3)．

(i) 未知パラメータが1個 ($M=1$) の場合：まず非線形項の係数 β のみが未知の場合について考察する(注4)．未知パラメータ $\hat{\theta}$ を

$$\hat{\theta} = -\beta \quad (33)$$

と定義し，さらに

$$\begin{cases} \phi(\hat{\theta}, y_k) \triangleq \phi_0(y_k) + \hat{\theta} \phi_1(y_k) \\ \phi_0(y_k) \triangleq \begin{bmatrix} \delta y_{2,k} \\ -\delta \alpha y_{2,k} \end{bmatrix}, \phi_1(y_k) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(1 + \gamma y_{1,k}^2) y_{1,k} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (34)$$

と定義すると，(32)式は

$$y_{k+1} - y_k = \phi(\hat{\theta}, y_k) + b e_{k+1} \quad (35)$$

と表現される．(35)式で表わされるシステム・モデルが，4章の定理1の条件(C-1)を満たしていることは

$$\begin{aligned} \|\phi_{1,k}(y_k)\|^2 &= \phi_{1,k}(y_k)' \phi_{1,k}(y_k) \\ &= \delta^2 (1 + \gamma y_{1,k}^2)^2 y_{1,k}^2 \end{aligned}$$

となり，(20)式の導出と同様にして $\|\phi_{1,k}(y_k)\|$ が不感帯をもたなければよいことがわかる，したがって，未知パラメータ $\hat{\theta}$ の一致推定値 $\hat{\theta}_N$ は(10)式より

$$\begin{cases} \hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + \frac{(1 + \gamma y_{1,N}^2) y_{1,N}}{1 + \Gamma_{N-1} (1 + \gamma y_{1,N}^2) y_{1,N}^2} \\ \quad \times (y_{2,N+1} - y_{2,N} + \alpha y_{2,N} - (1 + \gamma y_{1,N}^2) y_{1,N} \hat{\theta}_{N-1}) \\ \Gamma_N = \Gamma_{N-1} - \frac{(1 + \gamma y_{1,N}^2)^2 y_{1,N}^2 \Gamma_{N-1}}{1 + \Gamma_{N-1} (1 + \gamma y_{1,N}^2) y_{1,N}^2} \end{cases} \quad (36)$$

を逐次計算することにより得られる．

シミュレーション実験においては，離散時間間隔 δ は， $\delta = 0.01$ ，未知パラメータの真値は $\hat{\theta} = -\beta = -8.0$ ，およびそのほかの既知パラメータはおのおの， $\alpha = 4.0$ ， $\sigma^2 = 1.0$ ， $\gamma = 5.0$ と設定した．上述のような設定のもとで，(35)式を計算機でシミュレートすることにより観測データ $\{y_k\}$ を得た．Fig. 2 に入力雑音過程 $\{e_k\}$ と出力過程 $\{y_k\}$ の見本過程の一例を示す．

Fig. 3 は $\hat{\theta}_N$ の定量的な精度を示すために一つの尺度として

$$C_N(\hat{\theta}) = \frac{1}{100} \sum_{l=1}^{100} [\hat{\theta}_N^{(l)} - \hat{\theta}]^2 \quad (37)$$

を図示したものである．ただしここで $\hat{\theta}_N^{(l)}$ は(35)式における $\{e_k\}$ を異った母集団より発生させてパラメ

(a) the e_k -process

(b) the $y_{1,k}$ -process

(c) the $y_{2,k}$ -process

Fig. 2 Typical sample runs of the input noise e_k and the observation process y_k

(注3) より精度よく離散近似モデルを得るためには，Runge Kutta 法などを用いるべきであるが，ここでは簡単のため単純なオイラー法を用いることにする．

(注4) 入力雑音 $\{e_k\}$ の分散 σ^2 は未知でも構わないが，推定の対象とはしない．

Fig. 3 Monte Carlo experiment for the $\hat{\theta}_N$

ータ推定を行ったもので、第 l 番目の $\hat{\theta}$ の見本推定過程を意味するものとする。

(ii) 未知パラメータが複数個 ($M \geq 2$) の場合:

(i) と同じ (32) 式で表わされるシステムにおいて、その係数 α, β がともに未知の場合について考察する。この場合非線形関数 $\phi_k(\hat{\theta}, y_k)$ は (i) の (34) 式とは異なり、つぎのように表わすことができる;

$$\phi_k(\hat{\theta}, y_k) = \phi_{0,k}(y_k) + \hat{\theta}_1 \phi_{1,k}(y_k) + \hat{\theta}_2 \phi_{2,k}(y_k) \quad (38)$$

ここで未知パラメータ・ベクトル $\hat{\theta}$ は

$$\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]' \triangleq [-\alpha, -\beta]' \quad (39)$$

であり、 $\phi_{0,k}(y_k)$, $\phi_{1,k}(y_k)$ および $\phi_{2,k}(y_k)$ は、おのおの

$$\begin{cases} \phi_{0,k}(y_k) = \delta \begin{bmatrix} y_{2,k} \\ 0 \end{bmatrix}, & \phi_{1,k}(y_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta g(y_{1,k}) y_{1,k} \end{bmatrix} \\ \phi_{2,k}(y_k) = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ y_{2,k} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (40)$$

で与えられる。ただし (40) 式において $g(y_{1,k})$ は定理 2 における条件 (C-2)' と (C-3) を満足するように非線形関数 $(1 + \gamma y_{1,k}^2)$ を

$$g(y_{1,k}) = \begin{cases} 1 + \gamma \mu & \text{for } y_{1,k}^2 \geq \mu \\ 1 + \gamma y_{1,k}^2 & \text{for } y_{1,k}^2 < \mu \end{cases} \quad (41)$$

で置き換えたものであり、また μ は十分大きな値をあらかじめ設定しておくものとする。以上のような設定のもとでは条件 (C-2)' は

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 < 0 \\ 2\delta\hat{\theta}_2 + 4 > \delta^2\hat{\theta}_1 g(z) \\ \delta g(z)\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2 \end{cases} \quad (z \text{ は任意の実数}) \quad (42)$$

を満足すればよいことが容易に導出できる⁶⁾。さらに $\gamma > 0$ と設定し

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N y_{1,k}^2 > 0 \quad \text{w. p. 1} \quad (43)$$

であることを用いると、条件 (C-4) も満たされていることを示すことができる。したがって定理 2 のすべての条件が満たされているので、(5), (6) 式より未知パラメータ $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]'$ および入力雑音の分散 σ^2 の一致推定値を求めることができる。シミュレーション実験においては $\mu = 10$ と設定し、ほかのパラメータ

(a) Monte Carlo experiment for the $\hat{\theta}_{1N}$ (b) Monte Carlo experiment for the $\hat{\theta}_{2N}$ (c) Monte Carlo experiment for the $\hat{\sigma}_N^2$

Fig. 4 Monte Carlo experiment for the estimators

Fig. 5 Cumulative frequency curve of $\hat{\theta}_{1N}$

は (i) の $M=1$ の場合と全く同じ値に設定した。

Fig. 4 に $\hat{\theta}$ と σ^2 の定量的な精度を示すために行ったモンテ・カルロ実験の結果を示す。また 100 本の見本過程より推定値 $\hat{\theta}_{1,N}$ の $N=3000$ における累積度数を求め、それを正規確率紙にプロットした結果を Fig. 5 に示した。

6. 結 言

非常定性および非線形性を有すると思われる不規則データに対して、少ないパラメータ数でより良いあて

はめが期待できるモデルとして一種の非線形非定常モデルを提案した。提案したモデルの特徴は、モデル内に含まれる非線形項が [A-3] に示されたような未知定係数をもつ級数に展開でき、その最初の M 項でよく近似できると仮定したことにある。

上述の仮定のもとで近似最尤法の概念に基づいて未知パラメータは容易に推定することができ、さらに推定値の一致性ならびに漸近的正規性については、マルチンゲールの収束定理および独立でない確率変数の和に対する中心極限定理を用いることにより証明することが可能となった。特に未知パラメータの個数が 1 個の場合には、通常必要とされる b. i. b. o. の意味における安定性を仮定することなしに、その一致性を保証できた。

参考文献

- 1) T. Ozaki and H. Oda: Nonlinear Time Series Model Identification by Akaike's Information Criterion, Proc. of IFAC Workshop on "Information and Systems", Compiègne, France, Oct. (1977) (ed. B. Dubuisson, Pergamon Press)
- 2) A. S. Poznyak: Estimating the Parameters of Autoregression Processes by Method of Least Squares, Int. J. Systems Sci., **11**-5, 577/588 (1980)
- 3) T. Lee: Consistent Estimators for a Class of Nonstationary Models, Ph. D. Thesis, Polytechnic Institute of New York (1976)
- 4) F. Kozin and F. Nakajima: The Order Determination Problem for Linear Time-Varying AR Models, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-25**-2, 250/257 (1980)
- 5) A. P. Sage and J. L. Melsa: Estimation Theory with Applications to Communications and Control, Mc Graw-hill, New York (1971)
- 6) 福田得夫：確率システム理論 I，基礎編（砂原善文編），6 章，朝倉書店（1981）
- 7) M. Loève: Probability Theory, 3rd. ed., D. van Nostrand, Princeton, N. J. (1963)
- 8) R. Z. Khasminskii: Stability of Systems of Differential Equation under Random Disturbances of Their Parameters, Nauka, Moscow (1969)
- 9) T. W. Anderson: On Asymptotic Distributions of Estimates of Parameters of Stochastic Difference Equations, Ann. Math. Stat. **30**, 676/687 (1959)
- 10) B. Rosen: On the Central Limit Theorem for Sums of Dependent Random Variables, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **7**, 48/82 (1967)

《付 録》

〈付録 1〉（定理 1 の証明）

確率変数 h_N を

$$h_N \triangleq \begin{cases} \sum_{k=0}^N \Gamma_k F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} B_{k+1} e_{k+1} & (N=0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (N=-1, -2, \dots) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

と定義すると、 $\{h_N, \mathcal{F}_N\}$ が 2 乗可積分なマルチンゲールであることを容易に示すことができる。したがって 2 乗可積分なマルチンゲールに対する収束定理⁷⁾ より

$$h_N \rightarrow h \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (\text{A.2})$$

であることがわかる。ここで h は、 $\mathcal{E}\{h^2\} < +\infty$ を満たす確率変数である。(A.1) 式より (14) 式は

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_N = & - \sum_{k=1}^N \Gamma_N F_k(y_k) F_k(y_k)' (h - h_{k-1}) \\ & - (h_N - h) - (\Gamma_0^{-1} h - \rho \tilde{\theta}) \Gamma_N \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と変形することができる。(A.3) 式の右辺第 2 項は (A.2) 式より、また第 3 項は、もし

$$\Gamma_N \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (\text{A.4})$$

であれば、おのおの零に収束する。さらに第 1 項については

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |\Gamma_N F_k(y_k) F_k(y_k)'| &= \sum_{k=1}^N \frac{F_k(y_k) F_k(y_k)'}{\sum_{k=1}^N F_k(y_k) F_k(y_k)' + \rho} \\ &< 1 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となるから、Toeplitz の補題⁷⁾ より、(A.4) 式が成立するのであれば零に収束することがわかる。したがって残る問題は、(A.4) 式が成立することを示せばよいことになる。ところが (17) 式および条件 (C-1) より、任意の $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} P\{\sup_{t \leq N} |\Gamma_{N+1}^{-1} - \Gamma_N^{-1}| > \delta\} \\ \leq 1 - \limsup_{N \rightarrow \infty} P\{\|\tilde{B}_{N+2} \phi_{1, N+1}(k + B_{N+1} e_{N+1})\|^2 > \delta\} < 1 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる。ただし、 $\kappa \triangleq y_N + \phi_N(\tilde{\theta}, y_N)$ とした。コーシーの収束に対する判定法⁷⁾ を用いると上式は Γ_N^{-1} が確率 1 で収束しないことを意味していることがわかるから、逆に Γ_N はその単調減少性より零に収束することがわかる。

〈付録 2〉（定理 2 の証明）

まず、確率変数 α_N および β_N を

$$\alpha_N \triangleq \sum_{k=0}^N x' F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} B_{k+1} e_{k+1} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \beta_N \triangleq & \sum_{k=0}^N x' [F_k(y_k) F_k(y_k)' \\ & - \mathcal{E}\{F_k(y_k) F_k(y_k)' | \mathcal{F}_{k-1}\}] x \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

と定義する。ここで x は零でない任意の確定ベクトルである。上式で定義した α_N, β_N は条件 (C-2), (C-3) のもとでは

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\alpha_N^2\} &\leq c_8 N \\ \mathcal{E}\{\beta_N^2\} &\leq c_9 N \end{aligned}$$

と評価できるマルチンゲールであることが容易に証明できる。したがって、Khasminskii の定理⁸⁾ より

$$\frac{1}{N}\alpha_N \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (\text{A. 9})$$

$$\frac{1}{N}\beta_N \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (\text{A. 10})$$

となることがわかる。さらにここで (A. 10) 式に対して条件 (C-4) を用いると、十分大きい N に対して

$$N\Gamma_N < c_{10}I \quad \text{w. p. 1} \quad (\text{A. 11})$$

であることがわかる。したがって、(A. 9)~(A. 11) 式より (14) 式で与えられる $\tilde{\theta}_N$ は

$$\tilde{\theta}_N \rightarrow 0 \quad \text{w. p. 1 as } N \rightarrow \infty \quad (\text{A. 12})$$

となる。

また、入力雑音の分散の推定値 $\hat{\sigma}_N^2$ は、三つの確率過程 ν_k , ζ_k および ξ_k を

$$\begin{cases} \nu_k \triangleq \frac{1}{m} e'_{k+1} e_{k+1} \\ \zeta_k \triangleq \frac{1}{m} \tilde{\theta}'_N F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} B_{k+1} e_{k+1} \\ \xi_k \triangleq \frac{1}{m} \tilde{\theta}'_N F_k(y_k) F_k(y_k)' \tilde{\theta}_N \end{cases} \quad (\text{A. 13})$$

と定義すると

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \nu_k + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \zeta_k + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \xi_k \quad (\text{A. 14})$$

と表わすことができる。ここで (A. 14) 式の右边第 1 項、2 項については、 α_N に対する手法と同じ手法によりそれぞれ σ^2 および 0 に確率 1 で収束することが示される。したがって $\hat{\sigma}_N^2$ の一致性を保証するためには、(A. 14) 式の右边第 3 項が零に収束することを示せばよい。(A. 14) 式の右边第 3 項については、(7)、(14) 式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \xi_k &= \frac{1}{m} \left[\eta'_N N \Gamma_N \eta_N - \frac{2}{N} \rho \tilde{\theta} N \Gamma_N \eta_N \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \rho \eta'_N (N \Gamma_N)^2 \eta_N + \frac{2}{N^2} \rho^2 \tilde{\theta}' (N \Gamma_N)^2 \eta_N \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N^3} \rho \tilde{\theta}' (N \Gamma_N)^2 \tilde{\theta} + \frac{1}{N^2} \rho \tilde{\theta} N \Gamma_N \tilde{\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

と表わすことができる。ただしここで

$$\eta_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N F_k(y_k) \tilde{B}_{k+1} B_{k+1} e_{k+1} \quad (\text{A. 16})$$

である。したがって (A. 9) および (A. 11) 式を用いれ

ば、(A. 15) 式の右边の各項はすべて確率 1 で 0 に収束することがわかる。

〈付録 3〉 (定理 3 の証明)

現在時刻 k より l ステップ前の時刻を初期時刻として、(1) 式により生成される出力過程を $\{y_k(l)\}$ とする。このとき

$$\begin{cases} \alpha_{lN} \triangleq \sqrt{N} U_N^{-1/2} P_N(l) [(I - \rho \Gamma_N(l)) \tilde{\theta} - \Gamma_N(l) s_N(l)] \\ \beta_{lN} \triangleq \sqrt{N} U_N^{-1/2} P_N \tilde{\theta}_N - \alpha_{lN} \\ P_{lN} \triangleq \mathcal{E} \{\alpha_{lN} \alpha_{lN}'\} \end{cases} \quad (\text{A. 17})$$

と定義すると、(28) 式の左辺は

$$\sqrt{N} U_N^{-1/2} P_N \tilde{\theta}_N = P_{lN}^{-1/2} \alpha_{lN} + (I - P_{lN}^{-1/2}) \alpha_{lN} + \beta_{lN} \quad (\text{A. 18})$$

と表わすことができる。ただし、(A. 17) 式において $P_N(l)$, $\Gamma_N(l)$, $s_N(l)$ は、それぞれ (26)、(7)、(8) 式において y_k を $y_k(l)$ でおきかえたものである。(A. 18) 式における右边第 2 項と第 3 項は、 $l \rightarrow \infty$ においてその 2 乗モーメントが零に収束することが証明できる。

たとえば第 2 項は

$$\mathcal{E} \{ \| (I - P_{lN}^{-1/2}) \alpha_{lN} \| \} \leq M \| I - P_{lN} \|$$

と評価でき、さらに $s_N(l)$ が (13) 式における Γ_N , y_k をそれぞれ $\Gamma_N(l)$, $y_k(l)$ で置きかえたものにより表わすことができることを用いると、

$$\begin{aligned} \| I - P_{lN} \| &\leq \frac{\sigma^2}{N} \| U_N^{-1/2} \|^2 \sum_{k=0}^N \mathcal{E} \{ \| F_k(y_k) F_k(y_k)' \\ &\quad - F_k(y_k(l)) F_k(y_k(l))' \| \} \end{aligned}$$

と評価できる。ここで条件 (C-4) のもとでは十分大きい N に対しては $\| U_N^{-1/2} \| < c_{11}$ であること、および条件 (C-5) のもとでは

$$\| F_k(y_k) F_k(y_k)' - F_k(y_k(l)) F_k(y_k(l))' \| \leq c_{11} c_{12}^l \quad (c_{12} < 1)$$

が容易に証明できることを用いると

$$\| I - P_{lN} \| \leq \sigma^2 c_{11}^3 c_{12}^l \rightarrow 0 \quad \text{as } l \rightarrow \infty$$

となる。 β_{lN} についても同様である。

したがって Anderson⁹⁾ の定理に従えば、 $\sqrt{N} U_N^{-1/2} P_N \tilde{\theta}_N$ の漸近分布は (A. 18) 式の右边第 1 項 $P_{lN}^{-1/2} \alpha_{lN}$ の漸近分布に一致する。ところが $P_{lN}^{-1/2} \alpha_{lN}$ は Rosen¹⁰⁾ の独立でない確率変数の和に対する中心極限定理を用いることにより、その漸近分布は正規形の分布に収束することがわかる。