むだ時間を含む系の離散時間モデル作成法†

島 崎 潤 也*

A Method of Making a Discrete-Time Model for Continuous System with Dead Time

Junya SHIMAZAKI*

1. はじめに

最近マイクロコンピュータを応用したデジタル制御¹⁾が急速に発達し、従来のアナログ制御では実現が困難あるいは不可能であった高級な制御（予測制御、適応制御、最短時間制御など）が可能となってきた。その際、制御則は離散時間モデルをもとにデジタル制御理論により設計されるので、離散時間モデルの開発が重要である。ここでは操作にむだ時間を含む系の離散時間モデル作成法を考察する。むだ時間がサンプリング時間の整数倍でない場合の取扱いは一般的な解析が今まで行われていなかったが、以下に述べる状態方程式を用いた方法が多変数系にも一般的に適用できる。例としては、プロセスの動特性を簡単なモデルで近似するために、むだ時間プラス1次、2次遅れ系に対する離散時間モデルを上記の方法により解析的に求める。

むだ時間系のパルス伝達関数は拡張 z 変換を用いて導くことが可能であるが、本論文の方法はより直接的で高次系に適用でき数値計算上すぐれている。最近の論文⁴⁾では、状態方程式と拡張 z 変換との関係を議論しており、状態方程式を利用している点では類似している。

2. 状態方程式を用いたむだ時間の処理方法

離散時間系のサンプリング時間を τ 、対象プラントのむだ時間を L とすると、 L が τ よりも長い場合には

$$L = m\tau + \tau_1, \quad 0 \leq \tau_1 < \tau, \quad m: \text{整数} \quad (1)$$

と表わされる。そこで離散時間モデルは m 個のむだ

時間要素と τ_1 の取扱いに分けて処理できる。 m 個のむだ時間要素は状態変数をその数だけ増やすことにより容易に処理できるので、 τ_1 の処理方法を考察する。操作変数 $u(t)$ は τ_1 の時間遅れにより、任意のサンプリング時間でFig. 1のように変化する（零次ホールドを仮定して）。ここで区間 $[k\tau, (k+1)\tau]$, $k=0, 1, 2, \dots$ における操作変数 $\tilde{u}(t)$ を

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_{k-1}, & k\tau \leq t < k\tau + \tau_1 \\ u_k, & k\tau + \tau_1 \leq t < (k+1)\tau \end{cases} \quad (2)$$

と表わすと、状態方程式 $\dot{x} = Ax + B\tilde{u}$ に対する離散時間モデルの状態変数 x_{k+1} は前の状態 x_k と入力 $\tilde{u}(t)$ からつぎのように求まる。

$$x_{k+1} = e^{A\tau} x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-t)} B \tilde{u}(t) dt \quad (3)$$

(3)式右辺の計算を実行し、新たな行列を定義して簡潔に表示すると、次式を得る。

$$x_{k+1} = F x_k + G_1 u_{k-1} + G_2 u_k \quad (4)$$

ここで、

$$F = e^{A\tau}, \quad G = \int_0^\tau e^{A t} dt \cdot B \quad (5)$$

$$G_1 = G - G_2, \quad G_2 = \int_0^{\tau_1} e^{A t} dt \cdot B, \quad \tau_2 = \tau - \tau_1 \quad (6)$$

また(4)式を z 変換で表わせば

$$X(z) = (zI - F)^{-1} (G_1/z + G_2) U(z) \quad (7)$$

τ_1 : dead time ($0 \leq \tau_1 < \tau$)

τ : sampling period

Fig. 1 Control variable between t_k and t_{k+1} in a discrete-time model with dead time

† 日本原子力研究所 茨城県那珂郡東海村白方白根 2-4

* Japan Atomic Energy Research Institute, Naka-gun, Ibaraki

(Received February 16, 1983)

(Revised May 24, 1983)

Keyword: discrete-time model, dead-time system, second order lag system with dead time, pulse transfer function

となる。(7)式に出力行列 $C(y=Cx)$ を作用させれば直ちにむだ時間を含む多変数系のパルス伝達関数が定まる。

$$Y(z)=G(z)U(z) \quad (8)$$

ここで、

$$G(z)=C(zI-F)^{-1}(G_1/z+G_2) \quad (9)$$

(9)式を用いれば、むだ時間 τ_1 を含む伝達関数 $G(s)$ から対応するパルス伝達関数 $G(z)$ を導くことができる。すなわち、まず $G(s)$ からむだ時間を除いた系に対して(可制御正準形、可観測正準などの)状態方程式表示を求め、つぎにその状態方程式の行列 A, B, C およびむだ時間 τ_1 から(5), (6)式を計算して、(9)式によって最終的に $G(z)$ を求める。

3. (むだ時間プラス1次, 2次遅れ) 系のパルス伝達関数

前章で述べた方法をむだ時間プラス1次遅れ系, 2次遅れ系に適用して、それぞれのパルス伝達関数を求める。工業プロセスの動特性モデルとして、これらを用いる近似は制御系設計などに有用であり、最近ではむだ時間プラス2次遅れ近似が使用されている³⁾。ここでは2次遅れ系に対して、非振動の場合(文献2)に本手法とは異なる方法が示されている)に加えて臨界制動と振動の場合について考察し、数値計算が直に行える形に結果を整理して与える。なお、むだ時間 L の扱いは前章と同様であるので、(1)式の τ_1 の処理だけを以下に述べる。

3.1 (むだ時間プラス1次遅れ) 系のパルス伝達関数

(むだ時間プラス1次遅れ)系の伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s)=e^{-\tau_1 s}/(1+Ts) \quad (10)$$

で表わされる。前章の方法によって、まずむだ時間を除いた系に対して状態方程式をたてる。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u \quad (11)$$

(5), (6)式によりパルス伝達関数の作成に必要な諸量を計算する。

$$F=e^{-\tau/T}, \quad G=1-e^{-\tau/T}, \quad G_2=1-e^{-\tau_2/T} \quad (12)$$

したがって、(9)式からパルス伝達関数はつぎのように求まる。

$$G(z)=\frac{b_0z+b_1}{z^2+a_1z} \quad (13)$$

ここで、

$$a_1=-p, \quad b_0=1-d, \quad b_1=d-p \quad (14)$$

$$p=e^{-\tau/T}, \quad d=e^{-\tau_2/T}, \quad \tau_2=\tau-\tau_1 \quad (15)$$

3.2 (むだ時間プラス2次遅れ) 系のパルス伝達関数

2次遅れ系が非振動、臨界制動、振動のそれぞれの場合について分けて考察する。

(1) 非振動の場合

この場合の伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s)=e^{-\tau_1 s}/\{(1+T_1s)(1+T_2s)\}, \quad T_1>T_2 \quad (16)$$

と表わされ、むだ時間を除いた状態方程式をつぎのように定める。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/T_1 & 0 \\ 0 & -1/T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{T_2-T_1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (17)$$

このようにすると、むだ時間を除いた $G(s)$ に対応する状態方程式の各行列 A, B, C はつぎようになる。

$$A = \begin{pmatrix} -1/T_1 & 0 \\ 0 & -1/T_2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{T_2-T_1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 1) \quad (18)$$

したがって、パルス伝達関数の計算に必要な諸量は(5), (6)式から

$$\left. \begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{T_2-T_1} \begin{pmatrix} -(1-p_1)T_1 \\ (1-p_2)T_2 \end{pmatrix} \\ G_2 &= \frac{1}{T_2-T_1} \begin{pmatrix} -(1-d_1)T_1 \\ (1-d_2)T_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= e^{-\tau/T_1}, \quad p_2 = e^{-\tau/T_2} \\ d_1 &= e^{-\tau_2/T_1}, \quad d_2 = e^{-\tau_2/T_2}, \quad \tau_2 = \tau - \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となり、パルス伝達関数 $G(z)$ はつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} G(z) &= (1, 1) \begin{pmatrix} 1/(z-p_1) & 0 \\ 0 & 1/(z-p_2) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -(d_1-p_1)T_1 \\ (d_2-p_2)T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(1-d_1)T_1 \\ (1-d_2)T_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{T_2-T_1} \\ &= \frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^3+a_1z^2+a_2z} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、

$$a_1=-(p_1+p_2), \quad a_2=p_1p_2 \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1-(d_1T_1-d_2T_2)/(T_1-T_2) \\ b_1 &= -(p_1+p_2)+\{d_1(1+p_2)T_1 \\ &\quad -d_2(1+p_1)T_2\}/(T_1-T_2) \\ b_2 &= p_1p_2-(d_1p_2T_1-d_2p_1T_2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(2) 臨界制動の場合

この場合の伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s)=e^{-\tau_1 s}/(1+Ts)^2 \quad (24)$$

となり、(1)の場合と同様に取扱う。まず連続系状態

方程式の各行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} -1/T & 1 \\ 0 & -1/T \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/T^2 \end{pmatrix}, C = (1, 0) \quad (25)$$

と定め, (19)式に対応する諸量を計算する.

$$F = \begin{pmatrix} p & \tau p \\ 0 & p \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 - (1 + \tau/T)p \\ (1 - p)/T \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 - (1 + \tau_2/T)d \\ (1 - d)/T \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$p = e^{-\tau/T}, d = e^{-\tau_2/T}, \tau_2 = \tau - \tau_1 \quad (27)$$

したがって, パルス伝達関数 $G(z)$ はつぎのように求まる.

$$G(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z}$$

ここで,

$$a_1 = -2p, a_2 = p^2 \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1 - (1 + \tau_2/T)d, \\ b_1 &= -2p + (1 + \tau_2/T)d + (1 - \tau_1/T)d p, \\ b_2 &= p^2 - (1 - \tau_1/T)d p \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(3) 振動の場合

この場合の伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = e^{-\tau_1 s} / (T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1) \\ = e^{-\tau_1 s} (\alpha^2 + \beta^2) / \{(s + \alpha)^2 + \beta^2\} \quad (30)$$

のように表わされ, 状態変数方程式は複素数領域での表現を用いる. A, B, C 各行列を

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - j\beta & 0 \\ 0 & -\alpha + j\beta \end{pmatrix}, B = \frac{j}{2\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$C = (1, -1), (j = \sqrt{-1})$$

と定め, (1)の場合と同様に計算すると, 最終的につぎのパルス伝達関数 $G(z)$ が求まる.

$$G(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z}$$

ここで,

$$a_1 = -p \cos \beta \tau, a_2 = p^2 \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1 - d \sin(\beta \tau_2 + \theta) / \sin \theta, \\ b_1 &= -2p \cos \beta \tau + d \sin(\beta \tau_2 + \theta) / \sin \theta \\ &\quad - p d \sin(\beta \tau_1 - \theta) / \sin \theta, \\ b_2 &= p^2 + p d \sin(\beta \tau_1 - \theta_1) / \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= e^{-\alpha \tau}, d = e^{-\alpha \tau_2}, \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}, \tau_2 = \tau - \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(32)~(34)式は(30)式の表現における α, β からパルス伝達関数を求めるものであるが, T, ζ から求めるためには以下の式を用いればよい.

$$a_1 = -p \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau / T), a_2 = p^2 \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1 - d \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_2 / T + \theta) / \sqrt{1 - \zeta^2}, \\ b_1 &= -2p \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau / T) \\ &\quad + d \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_2 / T + \theta) / \sqrt{1 - \zeta^2} \\ &\quad - p d \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_1 / T - \theta_1) / \sqrt{1 - \zeta^2}, \\ b_2 &= p^2 + p d \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \tau_1 / T - \theta_1) / \sqrt{1 - \zeta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= e^{-\zeta \tau / T}, d = e^{-\zeta \tau_2 / T}, \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}, \tau_2 = \tau - \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

4. 結 論

むだ時間を含む連続系に対し, その離散時間モデル(多変数のパルス伝達関数)を求める方法を開発した. その方法は状態方程式を用いており, むだ時間が離散時間系のサンプリング時間の整数倍でない場合に適用できる. 適用例ではプロセスの動特性近似において有用なむだ時間プラス1次, 2次遅れ系モデルに対して, それぞれのパルス伝達関数を解析的に求めた. この結果はプロセスのデジタル制御用モデルとして利用でき, 簡単な制御則を容易に定めたいような分散形デジタル制御に有用である.

参 考 文 献

- 1) 成田: デジタルシステム制御, 昭晃堂 (1981)
- 2) 高橋: システムと制御 第2版 上, 下, 岩波書店, 199/201 (1978)
- 3) 戸部, 高松: プロセスの2次遅れ+むだ時間近似とDDC系における制御パラメータの最適調整, 計測自動制御学会論文集, 16-3, 405/411 (1980)
- 4) 美多, ほか: 状態方程式の z 変換, 拡張 z 変換とサンプル間応答の一性質, 計測自動制御学会論文集, 18-9, 950/951 (1982)