多入力振動系に対する最適アクチュエータの設計[†]

田 中 正 吾*・沖 田 豪*

On the Synthesis of an Optimal Actuator for a Multi-Input Oscillatory System

Shogo TANAKA* and Tsuyoshi OKITA*

This paper discusses the synthesis of an optimal actuator of a multi-input oscillatory system, which is desirable from the viewpoint of a minimum energy control problem whose terminal time is not necessarily assumed to be very large.

That is, considering the situation such that a numerical approach has been adopted until now to the synthesis because of the high nonlinearity of a performance index, the paper derives a lower bound or an upper one for the optimal performance value in order that the optimality of the actuator can be checked in the execution of the numerical method. Three criteria named here as the determinant criterion, trace one, and min-max one are respectively used.

Furthermore, the paper shows that optimal actuator can be analytically solved even for the relatively small terminal time in the case where the terminal time satisfies a condition concerning the system natural angular frequencies and the degree of freedom of multi-input actuators.

Keyword: multi-input oscillatory system, optimal actuator placement, minimum-energy control problem, lower and upper bounds

1. ま え が き

アクチュエータの設計, 配置は制御性能を大きく左右することから考察されなければならない重要な問題の一つである. このようなことから Kalman 氏¹⁾らが最小エネルギー制御問題の観点からアクチュエータの性能指数なるものを提起したのを嚆矢として, 以後, Johnson²⁾, Müller³⁾氏らにより 1 入力あるいは多入力

系の最適アクチュエータの設計問題が考察されて来た.

しかしながら最適解は, 非線形固有値問題の解として定式化され, 解析的に求められるものではなかった^{2), 3)}. このような観点から Arbel⁴⁾氏は最近, 大規模な宇宙構造物の姿勢制御に関する研究の一環として, 終端時刻 T を十分大とした最小エネルギー制御問題の観点より多入力振動系の最適アクチュエータの設計を議論し, 解析解が得られることを示した. また筆者⁵⁾らは, 終端時刻 T を任意の大きさとした 1 入力振動系および非振動系に対し行列式規範 (後述) の観点から最適アクチュエータの設計を議論し, 解析解が得られることを示した. しかし, 終端時刻 T を任意の大きさとした多入力振動系および多入力非振動系に対する最適アクチュエータの設計については, これまで上記の数値解法^{2), 3)}による以外は何も報告されていない.

このようなことから本論文では, そのような未解決の問題の中, Arbel 氏の取り扱った多入力振動系に対し, 任意の大きさの終端時刻 T でアクチュエータの最適性がチェックできるよう三つの規範の下でそれぞれ最適評価値の上界・下界を導出する. 更に, システムの固有角周波数と多入力アクチュエータの自由度との関り合いで, T を十分大とせずとも比較的小さい時刻で最適解あるいは準最適解が解析的に求められることを示す.

2. 問題の記述

考察する多入力振動系は次式で定義される.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

ただし,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{I}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A} & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \vdots \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2)$$

であり, $\mathbf{x}(t) \in R^{2n}$ は $2n$ 次元状態値ベクトル, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ は m 次元操作量ベクトル, $\mathbf{A}$ は $n \times n$ 正値対

[†] 第 1 回計測自動制御学会九州支部学術講演会で発表 (昭 57・12)

* 山口大学工学部 宇部市常盤台 2557

* Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube (Received February 4, 1983)
(Revised July 23, 1983)

称行列, I_n は n 次単位行列, B は $n \times m$ アクチュエータ行列である. また, A の固有値は互いに異なるものとする.

このシステムに対し $x(T)=0$ (T は終端時刻) を実現する最小エネルギー制御問題を考えると, 最適制御方策および最小エネルギーは良く知られているように¹⁾,

$$u^*(t) = -B_0' \phi'(0, t) W^{-1}(0, T) x_0 \quad (3)$$

$$J^* = \min_u \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau \\ = x_0' W^{-1}(0, T) x_0 \quad (4)$$

で与えられる. ここに “ $'$ ” および “ -1 ” はそれぞれ行列の転置とインバースを, x_0 は初期状態値を表す. また, $\phi(0, t)$, $W(0, T)$ は

$$\phi(0, t) = \phi^{-1}(t, 0) = \exp(-A_0 t) \quad (5)$$

$$W(0, T) = \int_0^T \phi(0, \tau) B_0 B_0' \phi'(0, \tau) d\tau \quad (6)$$

で定義される遷移行列及び可制御行列である.

この制御問題を考えるに際し, もちろんシステムは可制御だと仮定している. つまり $W(0, T)$ は正則(したがって正値対称)であり, (4)式のインバースはとれるとしている. この制御問題の観点からみた望ましいアクチュエータ行列 B は(4)式を更に最小化するものであるが, アクチュエータの設計段階では初期状態値 x_0 は知られていないのが普通である. よって本論文でも, はかの文献¹⁾⁻⁵⁾ 同様アクチュエータの設計規範として x_0 の影響を除去したつぎの三つの規範を採用し, アクチュエータの最適性がチェックできるようそれぞれの規範に対し最適評価値の下界, 上界を導出する. もちろん下界, 上界は解析的あるいは数値的に簡単に求められるものでなくてはならない.

$$(1) \quad \det [W(0, T)] \longrightarrow \max_B \quad (7)$$

$$(2) \quad \text{tr} [W^{-1}(0, T)] \longrightarrow \min_B \quad (8)$$

$$(3) \quad \lambda \min [W(0, T)] \longrightarrow \max_B \quad (9)$$

ここに, $\det [\cdot]$, $\text{tr} [\cdot]$, $\lambda \min [\cdot]$ はそれぞれ行列式, トレース, 最小固有値を表す. (1), (2), (3) の規範を以下では行列式規範, トレース規範, ミニ・マックス規範と呼ぶ. これらの物理的意味については, 文献^{1), 3)} を参照されたい.

3. 可制御行列 $W(0, T)$ について

(2)式の A は正値対称行列なので

$$U'AU = A, \quad U'U = I_n \quad (10)$$

なる直交行列 U が存在する. ただし, A は

$$A = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}; \quad a_i > 0 \quad (11)$$

なる固有値行列である. いま,

$$T_0 = \begin{bmatrix} U^{-1} & O \\ O & U^{-1} \end{bmatrix}, \quad G = U^{-1}B \quad (12)$$

なる T_0 および G を定義する. このとき $W(0, T)$ はつぎのように書き表わされる⁴⁾ (詳細は略).

$$W(0, T) = T_0^{-1} W_z(0, T) (T_0^{-1})' \quad (13)$$

ただし,

$$W_z(0, T) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}' & W_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

であり,

$$W_{11} = \int_0^T \begin{bmatrix} G_{11}\beta_1^2 & G_{12}\beta_1\beta_2 & \dots & G_{1n}\beta_1\beta_n \\ & G_{22}\beta_2^2 & \dots & G_{2n}\beta_2\beta_n \\ \text{対称} & & & G_{nn}\beta_n^2 \end{bmatrix} dt \quad (15)$$

$$W_{12} = \int_0^T \begin{bmatrix} G_{11}\beta_1\alpha_1 & G_{12}\beta_1\alpha_2 & \dots & G_{1n}\beta_1\alpha_n \\ G_{21}\beta_2\alpha_1 & G_{22}\beta_2\alpha_2 & \dots & G_{2n}\beta_2\alpha_n \\ G_{n1}\beta_n\alpha_1 & \dots & \dots & G_{nn}\beta_n\alpha_n \end{bmatrix} dt \quad (16)$$

$$W_{22} = \int_0^T \begin{bmatrix} G_{11}\alpha_1^2 & G_{12}\alpha_1\alpha_2 & \dots & G_{1n}\alpha_1\alpha_n \\ & G_{22}\alpha_2^2 & \dots & G_{2n}\alpha_2\alpha_n \\ \text{対称} & & & G_{nn}\alpha_n^2 \end{bmatrix} dt \quad (17)$$

なお, G_{ij} , α_i , β_i ($i, j=1, 2, \dots, n$) はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ G_{n1} & \dots & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} = GG' \quad (18)$$

$$\alpha_i = \cos(\omega_i t) \quad (19)$$

$$\beta_i = -(1/\omega_i) \sin(\omega_i t); \quad \omega_i = \sqrt{a_i} \quad (20)$$

により定義されるスカラーおよびスカラー関数である. 上式の ω_i ($i=1, 2, \dots, n$) はシステムの固有角周波数である⁵⁾. (13)式により $W(0, T)$ と $W_z(0, T)$ は相似関係にあり (なぜなら $(T_0^{-1})' = T_0$), しかも上述したように $W(0, T)$ は正値対称行列だから $W_z(0, T)$ も正値対称行列となる. また, アクチュエータ行列 B は上式の展開から明らかなように G_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) を通して $W_z(0, T)$ あるいは $W(0, T)$ に反映される.

4. 最適評価値の下界, 上界の計算

4.1 行列式規範の場合

ここでは, $\max_B \det [W(0, T)]$ の上界 $C_1(T)$ を求める. まずつぎの補題を考える.

[補題 1] n 次行列 $P = [p_{ij}]$ が正値対称行列ならば

$$\det[P] \leq \prod_{i=1}^n p_{ii} \quad (21)$$

が成り立つ⁶⁾. ここに p_{ii} は P の対角成分であり, 等号が成り立つのは P が対角行列の場合である.

(証明) ここでは等号の成り立つ場合も含めて, 一般的な証明を行う. まず P は正値対称行列と仮定しているので, 適当な正則行列 (n 次)

$$Q=[q_1, q_2, \dots, q_n] \quad (22)$$

を用いて P は

$$P=Q'Q \quad (23)$$

と書き表わされる. ここで P が (i, j) 要素を (q_i, q_j) (q_i と q_j の内積) とする $q_1, q_2, \dots, q_n$ に関する Gram 行列になっていることに注意すると, Hadamard の不等式⁷⁾ よりつぎの関係が得られる.

$$\det [P]=G(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \leq \prod_{i=1}^n G(q_i)=\prod_{i=1}^n (q_i, q_i)=\prod_{i=1}^n p_{ii} \quad (24)$$

ここで, $G(\cdot)$ は Gram 行列式の意である. よって (21) 式が示せた. なお等号が成り立つのは, Hadamard の不等式の関係より $q_1, q_2, \dots, q_n$ が互いに直交する場合のみであり, これは P が対角行列となることを意味する (証明終り).

この補題によりつぎの定理が得られる.

《定理 1》 $\max_B \det [W(0, T)]$ の上界 $C_1(T)$ は次式により与えられる.

$$C_1(T)=\prod_{i=1}^n \left[\left(\int_0^T \alpha_i^2 dt \right) \left(\int_0^T \beta_i^2 dt \right) \right] \left(\max_B \prod_{i=1}^n G_{ii} \right)^2 \quad (25)$$

(証明) (13) 式により

$$\det [W(0, T)]=(1/\det [T_0])^2 \cdot \det [W_z(0, T)] \\ =\det [W_z(0, T)] \\ \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_0^T \alpha_i^2 dt \right) \left(\int_0^T \beta_i^2 dt \right) (G_{ii})^2 \quad (26)$$

が成り立つ. ここに

$$(\det [T_0])^2=1/(\det [U])^4=1 \quad (27)$$

および $W_z(0, T)$ が正値対称行列になることを利用した. (26) 式はすべての B について成り立つので, 求める上界は (25) 式となる (証明終り).

この $C_1(T)$ は $\det [W(0, T)]$ よりもはるかに解析的に計算をしやすい形になっている. それゆえ

$$C_1(T)=\max_B \det [W(0, T)] \quad (28)$$

が成り立つ T に対しては $C_1(T)$ を実現する B が最適な B となるので, 最適解あるいは準最適解が解析的に求まることが期待できる. このような T については定理 4 で述べる.

4.2 トレース規範の場合

まずつぎの補題を考える.

【補題 2】 n 次行列 $P=[p_{ij}]$ が正値対称行列ならば

$$\det [P] \leq p_{ii} P_{ii} \quad (29)$$

が成り立つ. ここに P_{ii} は p_{ii} の余因子 (cofactor) であり, 等号が成り立つのは $p_{ik}=p_{ki}=0$ ($k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) のときである.

(証明) 補題 1 のように $P=Q'Q$ と書き表わせば, Hadamard の不等式より

$$\det [P]=G(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \leq G(q_i) \cdot G(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, q_n) \\ =p_{ii} \cdot P_{ii} \quad (30)$$

が成り立つ. 等号が成立するのは q_i が $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n$ と直交するときであり, これは $p_{ik}=p_{ki}=0$ ($k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) であることを意味する. (証明終り)

この補題により, 更につぎの補題が得られる.

【補題 3】 n 次行列 $P=[p_{ij}]$ が正値対称行列ならば

$$\text{tr} [P^{-1}] \geq \sum_{i=1}^n p_{ii}^{-1} \quad (31)$$

が成り立つ. ここに等号が成立するのは P が対角行列の場合のみである.

(証明) 逆行列の定義より

$$P^{-1}=\text{adj}[P]/\det [P] \quad (32)$$

ただし, $\text{adj}[P]$ は P の余因子行列 (adjugate matrix) の意である. p_{ii} の余因子を P_{ii} とすれば, $\text{tr}[\text{adj}[P]]=\sum_{i=1}^n P_{ii}$ なので

$$\text{tr} [P^{-1}]=\sum_{i=1}^n P_{ii}/\det [P] \quad (33)$$

が成り立つ. ここで上記の補題 2 を適用すると

$$\text{tr} [P^{-1}] \geq \sum_{i=1}^n p_{ii}^{-1} \quad (34)$$

となり, (31) 式が示せる. 等号が成り立つのはすべての i について (29) 式の等号が成り立つ場合であって, これは P が対角行列に限定されることを意味する. (証明終り)

この補題によりつぎの定理が得られる.

《定理 2》 $\min_B \text{tr} [W^{-1}(0, T)]$ の下界 $C_2(T)$ は次式により与えられる.

$$C_2(T)=\min_B \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\int_0^T \alpha_i^2 dt \right)^{-1} \right. \\ \left. + \left(\int_0^T \beta_i^2 dt \right)^{-1} \right\} (1/G_{ii}) \quad (35)$$

(証明) まず $\text{tr} [W^{-1}(0, T)]$ は, $T_0 T_0' = I_{2n}$ と

ることから(13)式により

$$\begin{aligned}\text{tr}[W^{-1}(0, T)] &= \text{tr}[T_0' W_z^{-1}(0, T) T_0] \\ &= \text{tr}[T_0' T_0' W_z^{-1}(0, T)] \\ &= \text{tr}[W_z^{-1}(0, T)]\end{aligned}\quad (36)$$

と書き表わされる。よって、 $P = W_z(0, T)$ として補題3を適用すると

$$\begin{aligned}\text{tr}[W^{-1}(0, T)] &= \text{tr}[W_z^{-1}(0, T)] \\ &\geq \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\int_0^T \beta_i^2 dt \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^T \alpha_i^2 dt \right)^{-1} \right\} (1/G_{ii})\end{aligned}\quad (37)$$

が得られる。上式はすべての B について成り立つので、求める下界は(35)式となる(証明終り)。

この $C_2(T)$ は $\text{tr}[W^{-1}(0, T)]$ に比べてはるかに解析的計算をしやすい形になっている。よって

$$C_2(T) = \min_B \text{tr}[W^{-1}(0, T)] \quad (38)$$

を満たす T (定理4参照) については最適解あるいは準最適解を解析的に求めることができる。

4.3 ミニ・マックス規範の場合

まずつぎの補題を考える。

【補題4】 n 次行列 $P = [p_{ij}]$ が正値対称行列ならば

$$\lambda_{\min}[P] \leq \min\{p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn}\} \quad (39)$$

が成り立つ。ここで $\lambda_{\min}[P]$ は P の最小固有値の意であり、 P が対角行列のときには(39)式の等号が成り立つ。

(証明) $\lambda_{\min}[P]$ は良く知られているように、つぎの関係式を満たす⁶⁾。

$$\lambda_{\min}[P] = \min_{\|z\|=1} z' P z \quad (40)$$

よって、 $\lambda_{\min}[P]$ は z として $e_i (i=1, 2, \dots, n)$ なる自然基底 (natural basis) ベクトルをもってきたときの値 $e_i' P e_i = p_{ii} (i=1, 2, \dots, n)$ よりも小さく (あるいは等しく) なる。特に P が対角行列のときには対角成分が P の固有値に等しくなるので、(39)式の等号が成り立つ。(証明終り)

この補題によりつぎの定理が得られる。

【定理3】 $\max_B \lambda_{\min}[W(0, T)]$ の上界 $C_3(T)$ は次式により与えられる。

$$C_3(T) = \max_B \min\{\delta_{11}G_{11}, \delta_{22}G_{22}, \dots, \delta_{nn}G_{nn}\} \quad (41)$$

ただし、

$$\delta_{ii} = \min\left\{\int_0^T \alpha_i^2 dt, \int_0^T \beta_i^2 dt\right\} \quad (42)$$

(証明) (13)式により $W(0, T)$ と $W_z(0, T)$ とは互いに相似な関係にあり、それゆえ両者の固有値は一

致する。ゆえに、この事実と補題4により次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}[W(0, T)] &= \lambda_{\min}[W_z(0, T)] \\ &\leq \min\left\{\int_0^T \beta_1^2 dt G_{11}, \int_0^T \beta_2^2 dt G_{22}, \dots, \int_0^T \beta_n^2 dt G_{nn}, \int_0^T \alpha_1^2 dt G_{11}, \int_0^T \alpha_2^2 dt G_{22}, \dots, \int_0^T \alpha_n^2 dt G_{nn}\right\} \\ &= \min\{\delta_{11}G_{11}, \delta_{22}G_{22}, \dots, \delta_{nn}G_{nn}\}\end{aligned}\quad (43)$$

この $C_3(T)$ は行列式規範、トレース規範同様解析的計算に乗りやすい形をしており、

$$C_3(T) = \max_B \lambda_{\min}[W(0, T)] \quad (44)$$

を満たす T (定理4参照) については、最適解あるいは準最適解が解析的に求められる。

4.4 終端時刻について

ここでは、(28), (38), (44)式が成り立つ T および最適アクチュエータの設計方法について検討する。そのためまず、 $W_z(0, T)$ に現われる時間積分項をつぎのように書き換える。

$$\begin{aligned}\int_0^T \beta_i \beta_j dt &= -\frac{1}{2\omega_i \omega_j} \int_0^T \{\cos(\omega_i + \omega_j)t \\ &\quad - \cos(\omega_i - \omega_j)t\} dt\end{aligned}\quad (45)$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \alpha_i \alpha_j dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \{\cos(\omega_i + \omega_j)t \\ &\quad + \cos(\omega_i - \omega_j)t\} dt\end{aligned}\quad (46)$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \alpha_i \beta_j dt &= -\frac{1}{2\omega_j} \int_0^T \{\sin(\omega_i + \omega_j)t \\ &\quad - \sin(\omega_i - \omega_j)t\} dt \\ &; i, j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (47)$$

仮定により $\omega_i \neq \omega_j (i \neq j)$ なので、 $W_z(0, T)$ の非対角成分に現われる時間積分項は三角関数の時間積分である。ところが、 $W_z(0, T)$ の対角成分に現われる項は(定数+三角関数)の時間積分である。よって、 T を十分大とすると $W_z(0, T)$ の対角成分は非対角成分に比べて支配的となり、 $W_z(0, T)$ はほぼ対角行列となる。よって、この場合補題1, 3, 4において等号が成り立つことになり、(28), (38), (44)式が成り立つ。この場合 $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$ を実現する B が求める解となる。これは Arbel 氏の報告した結果と同じである⁴⁾が、もちろんそこでは $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$ などの(上界や下界としての)意味や意義については明らかにされていない。

さてつぎに、 T を十分大とせずとも比較的小さな T に対しても解析解が求められることを示そう。まず $W_z(0, T)$ の非対角成分に現われる時間積分項の被積

分関数に注意すると、これらは角周波数が $\{2\omega_i (i=1, 2, \dots, n), |\omega_i \pm \omega_j| (i, j=1, 2, \dots, n, i \neq j)\}$ の三角関数になっている。よって、 T がこれらの三角関数の周期の整数倍で与えられるならば、 $W_*(0, T)$ は厳密に対角行列となる。また仮に整数倍でなくてもそれに近い時刻であれば、 $W_*(0, T)$ は近似的に対角行列となり、(28), (38), (44) 式がほぼ満たされる。よって、 T が十分大でなくても上記のような T であれば、 $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$ を実現する B が解となり、これは前述したように解析的に求めやすいものである。

なお、これまでの議論は G_{ij} の項を無視し、時間積分項だけを考慮したが、つぎに、多入力の場合には、 $G_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ の自由度を利用することにより更に小さな T に対しても解析解が求めやすくなることを示そう。(25), (35), (41) 式をみると、 $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$ を実現する G (あるいは B) には $G_{ii} (i=1, 2, \dots, n)$ に関する規定しかない。ところが G_{ii} は、 $n \times m$ 行列 G の第 i 行の行ベクトルを $\mathbf{g}_i$ とすると $G_{ii} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i)$ と表わされる。つまり G の行ベクトルの大きさに関する規定がなく、異なった行ベクトル間の内積 $G_{ij} = (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) (i \neq j)$ の値については任意性がある。よって、 (i, j) のある集合 S に対し $G_{ij} = 0$ とできるのであれば、この分だけ $W_*(0, T)$ の非対角成分をゼロにする T の選択に自由度が生じる。よって $G_{ij} = 0$ を考慮しないときよりも更に小さな T に対し解析解が求められることが期待できる。

以上のことを定理にまとめて示す。

《定理 4》 評価関数 $\det[W(0, T)]$, $\text{tr}[W^{-1}(0, T)]$, $\lambda_{\min}[W(0, T)]$ の最適値が上下界 $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$

のおおのに一致する T としては、 T が $\left\{ \frac{2\pi}{|\omega_i \pm \omega_j|} (i, j=1, 2, \dots, n; \text{ただし, } \omega_i - \omega_j = 0 \text{ を除く}) \right\}$ の整数倍であることである。なお多入力で $G_{ij} = 0$ for $(i, j) \in S$

が許される場合には、うえの条件はその分だけ緩められる。

この定理を満たす T に対しては、上下界 $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$ を実現する B が最適な B となるので、最適アクチュエータ行列 B^* は解析的に比較的容易に求められる。しかし、その解はもちろん B に対する制約の種類によって異なる。したがって、ここでは B^* の陽表現を一般的に与えることはできないが、次章に $\|B\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij}^2 = \text{const.}$ とおいたときの解析

解の計算例を示す。なおここでは任意の T に対する上界、下界の有効性も調べるために $n=3, m=2$ としたが上記の T に対する解析解 B^* の計算に際しては任意の n, m に対して同様な議論が可能である。

最後に、 T が上記のような T でなく、 $W_*(0, T)$ が対角あるいは準対角行列にできないときの最適アクチュエータの設計について簡単に述べよう。このときの設計に際しては、まがきの箇所でもふれたように解析的アプローチはまず困難である。そこで数値解法に依らざるを得ないが、このようなときの局所解に収束せず、しかも計算コストを節約できる一つの有効な方法は、設定時刻 T の近くで $W_*(0, T)$ が対角あるいは準対角行列にできる T' なる時刻に対し解析解を求め、これを初期値に数値解法を行うことである。なおこのとき、 $C_1(T)$, $C_2(T)$, $C_3(T)$ のいずれかが各規範の下でそれぞれアクチュエータの最適性のチェックに利用され、得られた数値解が最適解にどれ程近いかの数学的保証を与える。もちろん初期値を任意の値にしても上述したことは有効である。

5. 数 値 例

$n=3, m=2, A=\text{diag}(4, 9, 16)$ の 2 入力振動系を考える。このシステムの固有角周波数は $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{2, 3, 4\}$ である。参考のため、このシステムの可制御

$$W_*(0, T) = \begin{bmatrix} \frac{G_{11}}{8} \left(T - \frac{1}{4} \sin 4T \right) & \frac{G_{12}}{12} \left(\sin T - \frac{1}{5} \sin 5T \right) & \frac{G_{13}}{32} \left(\sin 2T - \frac{1}{3} \sin 6T \right) & -\frac{G_{11}}{8} \sin^2 2T & \frac{G_{12}}{4} \left(-\cos T + \frac{1}{5} \cos 5T + \frac{4}{5} \right) & \frac{G_{13}}{8} \left(-\cos 2T + \frac{1}{3} \cos 6T + \frac{2}{3} \right) \\ \frac{G_{22}}{18} \left(T - \frac{1}{6} \sin 6T \right) & \frac{G_{23}}{24} \left(\sin T - \frac{1}{7} \sin 7T \right) & \frac{G_{21}}{6} \left(\cos T + \frac{1}{5} \cos 5T - \frac{6}{5} \right) & -\frac{G_{22}}{18} \sin^2 3T & \frac{G_{23}}{6} \left(-\cos T + \frac{1}{7} \cos 7T + \frac{6}{7} \right) \\ \frac{G_{33}}{32} \left(T - \frac{1}{8} \sin 8T \right) & \frac{G_{31}}{16} \left(\cos 2T + \frac{1}{3} \cos 6T - \frac{4}{3} \right) & \frac{G_{32}}{8} \left(\cos T + \frac{1}{7} \cos 7T - \frac{8}{7} \right) & -\frac{G_{33}}{32} \sin^2 4T & \frac{G_{12}}{2} \left(\sin T + \frac{1}{5} \sin 5T \right) & \frac{G_{13}}{4} \left(\sin 2T + \frac{1}{3} \sin 6T \right) \\ \frac{G_{11}}{2} \left(T + \frac{1}{4} \sin 4T \right) & \frac{G_{12}}{2} \left(\sin T + \frac{1}{5} \sin 5T \right) & \frac{G_{13}}{4} \left(\sin 2T + \frac{1}{3} \sin 6T \right) & \frac{G_{22}}{2} \left(T + \frac{1}{6} \sin 6T \right) & \frac{G_{23}}{2} \left(\sin T + \frac{1}{7} \sin 7T \right) & \frac{G_{33}}{2} \left(T + \frac{1}{8} \sin 8T \right) \end{bmatrix}$$

対 称

(48)

Fig. 1 On the deteriorations η_1, η_2 and η_3 (%)

行列 $W(0, T) = W_*(0, T)$ を掲げる.

いま, アクチュエータ行列 B に

$$\|B\|^2 = \text{tr}[BB'] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 b_{ij}^2 = 1 \quad (49)$$

なる制約を置き, 先に求めた $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$ の有効性を確かめてみる. まず $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$ の計算を行う. 本数値例の場合, A は対角行列なので U は単位行列となり, (12)式より $G=B$ となる. よって (49) 式の制約は

$$\sum_{i=1}^3 G_{ii} = \text{tr}[GG'] = 1 \quad (50)$$

と書き換えられる (なお A は正値対称行列なので, 任意の A に対しても (50) 式が成り立つ.).

まず行列式規範の場合の上界 $C_1(T)$ を求めよう. 相加平均・相乗平均の関係⁶⁾ および (50) 式により

$$\left(\prod_{i=1}^3 G_{ii}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 G_{ii} = \frac{1}{3} \quad (51)$$

等号が成り立つのは $G_{ii} = \frac{1}{3} (i=1, 2, 3)$ のときで, こ

のとき $C_1(T)$ は (27), (51) 両式により

$$C_1(T) = (1/3)^6 \prod_{i=1}^3 \left\{ \left(\int_0^T \alpha_i^2 dt \right) \left(\int_0^T \beta_i^2 dt \right) \right\} \quad (52)$$

となる. ただし, $\alpha_i, \beta_i (i=1, 2, 3)$ は $\omega_1=2, \omega_2=3, \omega_3=4$ とした (19), (20) 式で定義される.

つぎに, トレース規範の場合の下界 $C_2(T)$ を求め

よう. (37) 式の $\left(\int_0^T \beta_i^2 dt\right)^{-1} + \left(\int_0^T \alpha_i^2 dt\right)^{-1}$ は G とは無関係な定数なので, いまそれを簡潔さのため η_{ii} とおくと, $C_2(T)$ は

$$C_2(T) = \min_B \sum_{i=1}^3 \eta_{ii} / G_{ii} \quad (53)$$

と書き表わされる. (50) 式の制約の下での (53) 式の最小化は Lagrange の未定係数法によりなされ, G_{ii} が

$$G_{ii} = \sqrt{\eta_{ii}} / \left(\sum_{i=1}^3 \sqrt{\eta_{ii}} \right); i=1, 2, 3 \quad (54)$$

のときに最小値

$$C_2(T) = \left(\sum_{i=1}^3 \sqrt{\eta_{ii}} \right)^2 \quad (55)$$

をとる. 最後に, ミニ・マックス規範のときの上界 $C_3(T)$ を求めよう. (43) 式右辺の $\min\{\delta_{11}G_{11}, \delta_{22}G_{22}, \delta_{33}G_{33}\}$ を最大化する G は

$$\delta_{11}G_{11} = \delta_{22}G_{22} = \delta_{33}G_{33} \quad (56)$$

を満たす. よって, (50), (56) 式より G_{ii} が

$$G_{ii} = \delta_{ii}^{-1} / \sum_{i=1}^3 \delta_{ii}^{-1} \quad (57)$$

のときに最大値 $C_3(T)$ をとる. つまり

$$C_3(T) = \left(\sum_{i=1}^3 \delta_{ii}^{-1} \right)^{-1} \quad (58)$$

以上 $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$ を計算したが, つぎに最適評価値 $J_1(T) = \max_B \det[W(0, T)]$, $J_2(T) = \min_B \text{tr}[W^{-1}(0, T)]$, $J_3(T) = \max_B \lambda_{\min}[W(0, T)]$ のこれら

$$\text{からの劣化率 } \eta_j(T) = \left| \frac{C_j(T) - J_j(T)}{C_j(T)} \right| \times 100(\%) (j=1, 2, 3)$$

を調べてみる. そのため各 T に対し真の最適評価値を数値計算 (Powell 法) により求め, それらの劣化率を示したのが Fig. 1 のカーブ (実線) である.

図より, いずれの規範でも大体 $T=3$ 前後の時刻より $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$ による最適性のチェックが十分行えることがわかる. 特にトレース規範ではそれが顕著であり, $T=2.7$ 以降劣化率はほぼ 3.7%(大きい所で) 以下に抑えられている. また図より, いずれの規範でも $T=\pi$ および $T=2\pi$ の前後で劣化率はゼロ近くに落ちている. これは, 4.4 節で述べたように $T=2\pi$ では G_{ij} の値に拘わらず $W_*(0, T)$ が対角行列になり, 上界あるいは下界が最適評価値に一致し劣化率がゼロになるからである. また $T=\pi$ では, アクチュエータの自由度を利用することにより最適解が $W_*(0, T)$ の対角行列の範囲で求まるからである. なぜなら, アクチュエータの自由度を無視し, 非対角成分の時間積分項だけをゼロにする T を考えるならば, 角周波数が $\{2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3, |\omega_1 \pm \omega_2|, |\omega_1 \pm \omega_3|, |\omega_2 \pm \omega_3|\}$

$= \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ の周期の整数倍であり, $T=2k\pi(k=1, 2, \dots)$ が該当するが, いま 2 入力であるためたとえ $G_{12}=G_{23}=0$ としてみると $W_z(0, T)$ のゼロでない非対角成分をすべてゼロにする T は角周波数が $\{2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3, |\omega_1 \pm \omega_3|\} = \{2, 4, 6, 8\}$ の周期の整数倍, つまり, $T=k\pi(k=1, 2, \dots)$ を考えればよいからである. いずれの場合も, $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$ を実現する $B((51), (54), (57)$ 式参照) が解となる. 図では, この $T=\pi, 2\pi$ およびその整数倍の時刻で劣化率はちょうどゼロになり, しかもそのほかの時刻でもこれらに引きずり込まれるようにして全体的に劣化率は小さくなっている(ただし, T が小さいときを除いて). このようなことから, T が比較的小さいときにも本論で導出した上界, 下界は, 最適性のチェックに有効だと思われる.

参考のため, 固有角周波数の組を $(4, 5, 6)$ と $(2, 4, 6)$ に変えたときの劣化率を点線と一点鎖線で Fig. 1 に示す. 図より, 固有角周波数の全体を大きい方へ単純にシフトした場合よりも固有角周波数間の差を大きくしたほうが劣化率を小さくするうえで効果的であることがわかる. これは, 固有角周波数間の差が大きくなることは $W_z(0, T)$ の非対角成分に現われる三角関数の角周波数が一様に大きくなることに相当し, 非対角成分の時間積分値が T と共に急速にゼロに落ち着き, $W_z(0, T)$ が準対角行列になる(つまり, 最適評価値が上界, 下界に近づく)からである.

6. む す び

本論文では, 終端時刻を必ずしも十分大と仮定しない終端固定の最小エネルギー制御問題の観点から多入力振動系の望ましいアクチュエータの設計に際し最適

性の指針が得られるよう, 行列式規範, トレース規範, ミニ・マックス規範の三つの観点からそれぞれ最適評価値の下界, 上界を求めた. また, 多入力アクチュエータの自由度とシステムの固有角周波数との関係で比較的小さい終端時刻 T でも解析解が得られることを示した.

数値例により, 本論で導出した上界, 下界は, 比較的小さい終端時刻に対する最小エネルギー制御問題の観点からもアクチュエータの最適性のチェックに有効であることがわかった. 今後の課題は, 特に小さい T に対して改めて有効な上界, 下界を導出し直すことである.

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman, et al.: Controllability of Linear Dynamical Systems, Contributions to Differential Equ., 1-2, 189 (1962)
- 2) C. D. Johnson: Optimization of a Certain Quality of Complete Controllability and Observability for Linear Dynamical System, Trans. ASME, 91-D, 228 (1969)
- 3) P. C. Müller, et al.: Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamic Systems, Automatica, 8-3, 237 (1972)
- 4) A. Arbel: Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems, International J. of Control, 33-3, 565 (1981)
- 5) 田中ほか: スカラー入力をもつ振動系および非振動系に対する最適アクチュエータの設計, 電気学会誌, 102-C-6, 141 (1982)
- 6) R. E. Bellman: Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill (1960)
- 7) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices, Chelsea (1959)