一般化パラメータ適応則の拡張とその性質[†]

新 中 新 二*・鈴木 隆*

Extension of the Generalized Adaptive Law and Its Properties

Shinji SHINNAKA* and Takashi SUZUKI*

The purpose of this paper is to generalize various adaptive algorithms and to give a unified analysis on their properties.

The performance of an adaptive system is generally dominated by the adaptive algorithm implemented in it. Therefore it is extremely important in designing such a system to well understand the properties of the various algorithms and to select the one meeting design specifications best. This paper is written from this point of view, taking the following organization. First, a general adaptive law is presented that includes not only the generalized adaptive law proposed by Landau et al. but also the recursive least squares algorithm in general form. Next, an elegant analysis on the properties of the presented law is given. This analysis results in a unified one on the properties of a variety of algorithms. Finally, it is shown that an attractive algorithm, enabling us to control the rate of convergence, can be obtained from the presented general adaptive law.

Keyword: adaptive system, adaptive law, exponential convergence

1. ま え が き

適応システムの性能は、使用されるパラメータ調整アルゴリズムによって著しく左右される場合が少なくない。設計要求を満足するようなシステム設計を行うためには、アルゴリズムの性質、振舞いを踏まえたうえで、設計要求に見合うアルゴリズムを選定することが必要である。このためには、従来提案されてきた種々のアルゴリズムを個別的・独立的に把握するよりも、これらを統一的に解析し、さらに個々のアルゴリズムの相互の関係を明らかにしておくことが望ましい。

パラメータ調整アルゴリズムの統一的解析は Landau らによって始めてなされた^{1),2)}。彼らは、従来の固定ゲイン方式、漸減ゲイン方式などのアルゴリズムを包含するような一般性のある適応則を提案するとともに、この適応則の漸近的な諸性質を明らかにしている。また、この一般化された適応則より新たに固定トレースゲインアルゴリズムが得られることも示している。

しかしながら、Landau らの一般化適応則は、従来よりしばしば用いられている最小2乗法形の逐次アルゴリズムを必ずしも包含するものではない³⁾⁻⁵⁾。このために、この種のアルゴリズムに関しては、一般化適応則が提案された後も引き続き個別・独立的に考察されている³⁾。一般化適応則と最小乗法形アルゴリズムの両者を包含するような、より一般性のある適応則の導出とその性質、振舞いの解析は、個々の具体的なアルゴリズムおよびその関連を統一的に理解する上で望まれるが、これはいまだに明らかにされていない。

本論文では、上述の要求を満足するようなより一般性に富む適応則を提案するとともに、この適応則の有する漸近的な諸性質を明らかにする。また、この適応則によって調整されたパラメータの各サンプリング時点での振舞いについても検討を加える。さらに、本論文では、Landau 形のアルゴリズムには見受けられない、最小2乗法形アルゴリズムに特有の有益な性質についても、一般性のある形でこれを明らかにし、この一般形の一応用として、収束速度などの制御が可能なアルゴリズムが得られることも示す。

2. 拡張されたパラメータ適応則

2.1 適応則とその漸近的性質

適応システムに用いられる誤差方程式として、つぎの形のものを考える。

$$\varepsilon(k) = \zeta^T(k) \phi(k+1) \quad (1)$$

ただし、 $\varepsilon(k)$ はスカラー誤差、 $\zeta(k)$ は p 元信号ベクトル、 $\phi(k)$ は p 元パラメータ誤差ベクトルである。

[†] 第 25 回自動制御連合講演会で発表 (昭57・11)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka

(Received September 29, 1982)

(Revised July 25, 1983)

上の誤差方程式に対しては、つぎの定理が成り立つ。

《定理 1》

(1) 式の誤差方程式において、 $\phi(k)$ がつぎのアルゴリズム

$$\phi(k+1) = \phi(k) - \mu(k) \Gamma(k) \zeta(k) \varepsilon(k) \quad (2)$$

$$\Gamma^{-1}(k+1) = \lambda_1(k) \Gamma^{-1}(k) + \lambda_2(k) \zeta(k) \zeta^T(k) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{-1}(0) > 0, \Gamma(0) > 0 \\ 0 < \lambda_1(k) \leq 1, 0 \leq \lambda_2(k) \leq 2\mu(k) - \delta \end{aligned} \right\} \quad (4) \quad (\text{注}^1)$$

により調整されるならば、すべての有界な $\phi(0)$ に対して、 $\zeta(k)$ の有界、非有界にかかわらず $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ となる。

(証明)

(3) 式はつぎのように書き改められる。

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(k+1) &= \tilde{\lambda}_1(k) \Gamma^{-1}(0) \\ &+ \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=i+1}^k \lambda_1(j) \right) \lambda_2(i) \zeta(i) \zeta^T(i) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\tilde{\lambda}_1(k) = \prod_{i=0}^k \lambda_1(i) \quad (6)$$

(4), (5) 式より明らかのように、 $\Gamma^{-1}(k)$ はすべての k に対して $\Gamma^{-1}(k) \geq 0$ となっている。ここで、非負関数 $V(k) = \phi^T(k) \Gamma^{-1}(k) \phi(k)$ を考える ($\Gamma^{-1}(k) \geq \delta I$ のときは $V(k)$ は正定関数となる、 $V(k)$ の選定については次節で詳しく考察する)。このとき、 $V(k)$ の増分 $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ は (3), (1) 式を用いて

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \phi^T(k+1) \Gamma^{-1}(k) \phi(k+1) - \phi^T(k) \Gamma^{-1}(k) \phi(k) \\ &- (1 - \lambda_1(k)) \phi^T(k+1) \Gamma^{-1}(k) \phi(k+1) \\ &+ \lambda_2(k) (\zeta^T(k) \phi(k+1))^2 \\ &= (\phi(k+1) - \phi(k))^T \Gamma^{-1}(k) (\phi(k+1) + \phi(k)) \\ &- (1 - \lambda_1(k)) \phi^T(k+1) \Gamma^{-1}(k) \phi(k+1) \\ &+ \lambda_2(k) \varepsilon^2(k) \end{aligned}$$

さらに、(2) 式を用いて

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= -\mu(k) \varepsilon(k) \zeta^T(k) (2\phi(k+1) \\ &+ \mu(k) \Gamma(k) \zeta(k) \varepsilon(k)) \\ &- (1 - \lambda_1(k)) \phi^T(k+1) \Gamma^{-1}(k) \phi(k+1) \\ &+ \lambda_2(k) \varepsilon^2(k) \\ &= -(2\mu(k) - \lambda_2(k)) \varepsilon^2(k) \\ &- \Delta \phi^T(k) \Gamma^{-1}(k) \Delta \phi(k) \\ &- (1 - \lambda_1(k)) \phi^T(k+1) \Gamma^{-1}(k) \phi(k+1) \end{aligned} \quad (7)$$

と書き表わすことができる。ただし、

$$\Delta \phi(k) = \phi(k+1) - \phi(k)$$

(4), (5), (7) 式より明らかのように $\Delta V(k) \leq 0$ であ

(注 1) 以下では、 δ は $\delta > 0$ なる微小な定数を一般的に意味するものとして用いる。 δ' も同様である。

る。ここで、 $V(k) \geq 0$, $V(0) < \infty$ なることを考慮すると、これは $\lim_{k \rightarrow \infty} V(k) = \text{const.}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta V(k) = 0$ を意味する。したがって、(7) 式の右辺各項は $k \rightarrow \infty$ で 0 となる。同式第 1 項より $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ を得る。 ■

定理 1 の適応則は Landau らの一般化適応則と従来の種々の最小 2 乗法形のアルゴリズムを包含する一般性の高い形となっている。すなわち、この適応則は、 $\mu(k) = \mu$ ($= \text{const.}$) と選ぶ場合には $\mu \Gamma(k) = \Gamma'(k)$ と置き換えることにより Landau らの一般化適応則となり、また、 $\mu(k)$ を $\mu(k) = \lambda_2(k) / \lambda_1(k)$ と選ぶ場合にはつぎの $J(k)$

$$J(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=i+1}^{k-1} \lambda_1(j) \right) \lambda_2(i) (\zeta^T(i) \phi(k))^2 \quad (8)$$

を最小とする最小 2 乗法の逐次アルゴリズムとなる。

後者の場合は、Astrom らによって用いられたアルゴリズム ($\lambda_1(k) = \lambda_1 < 1$, $\lambda_1 = \text{const.}$, $\lambda_2(k) = 1$ の場合に相当)⁴⁾、Goodwin らのアルゴリズム ($\lambda_1(k) = 1$ の場合に相当)⁵⁾、Lozano のアルゴリズム ($\lambda_2(k) / \lambda_1(k) = \text{const.}$, $\lambda_1(k) < 1$ の場合に相当)³⁾ などを包含するような一般性のある最小 2 乗法形アルゴリズムとなっている。

定理 1 に示した適応則は、上の証明より明らかのように、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ のみならず、つぎのような漸近的性質も有する。

[系 1-1]

- (a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi^T(k) \Gamma^{-1}(k) \phi(k)$
 $= \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{\lambda}_1(k-1) \phi^T(k) \Gamma^{-1}(0) \phi(k) + J(k))$
 $= \text{const.}$
- (b) $\phi^T(k) \Gamma^{-1}(k) \phi(k) \leq \phi^T(0) \Gamma^{-1}(0) \phi(0) < \infty$
- (c) $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi^T(k) \Gamma^{-1}(k) \Delta \phi(k) = 0$
- (d) $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \lambda_1(k)) \phi^T(k+1) \Gamma^{-1}(k) \phi(k+1) = 0$

[系 1-2]

- (a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \phi (= \text{const.})$ ならば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} J(k) = J (= \text{const.})$.
- (b) $\Gamma^{-1}(k) \geq \delta I$ ならば、
 $\|\phi(k)\|^2 \leq \phi^T(0) \Gamma^{-1}(0) \phi(0) / \delta$.
- (c) $\Gamma^{-1}(k) \geq \delta I$ ならば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$ 。このと

き、 $\zeta(k)$ が persistently spanning (P.S.)⁶⁾ ならば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = 0$ 。

(d) $\Gamma^{-1}(k) \geq \delta I$ であり、 $1 - \lambda_1(k) < \delta'$; $k \geq k'$ となるような k' が存在しなければ、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = 0$ 。 ■

上述の性質は、一般化適応則とともに Landau らに

よって示された性質と同様なものであり、モデル規範形適応システム (MRAS) の漸近安定性を証明するうえで有用であることが指摘されている^{1), 2)}。また、つぎに示す性質は、Goodwin らにより示された補助定理⁵⁾ を MRAS の漸近安定性の証明に応用する際に有用となるものである。

《定理 2》

(2)～(4) 式の適応則において、 $\mu(k) < \infty$ (または、 $\mu(k) \geq \lambda_2(k)$)、 $\Gamma^{-1}(k) \geq \delta \mathbf{I}$ が保たれるならば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\zeta^T(k)\phi(k))^2}{\frac{1}{\mu(k)} + \frac{1}{\delta} \|\zeta(k)\|^2} = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。

(証明)

(1) 式の $\varepsilon(k)$ は、(2) 式を用いると、つぎのように書き改められる。

$$\varepsilon(k) = \frac{\zeta^T(k)\phi(k)}{1 + \mu(k)\zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} \quad (10)$$

$\Gamma^{-1}(k) > \delta \mathbf{I}$ なる条件および $\varepsilon(k)$ に関する上の表現を用いると、つぎの不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{(\zeta^T(k)\phi(k))^2}{\frac{1}{\mu(k)} + \frac{1}{\delta} \|\zeta(k)\|^2} &\leq \frac{(\zeta^T(k)\phi(k))^2}{\frac{1}{\mu(k)} + \zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} \\ &= \mu(k)(1 + \mu(k)\zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k))\varepsilon^2(k) \\ &= \mu(k)\varepsilon^2(k) + \Delta\phi^T(k)\Gamma^{-1}(k)\Delta\phi(k) \end{aligned}$$

上式の右辺は、定理 1 の証明より明らかのように、 $\mu(k) < \infty$ または $\mu(k) \geq \lambda_2(k)$ であれば $k \rightarrow \infty$ とともに 0 に漸近する。したがって、(9) 式が成り立つ。 ■

上述の諸性質により明らかのように、誤差 $\varepsilon(k)$ 、 $\phi(k)$ の収束にはゲイン行列 $\Gamma(k)$ が重要な役割を演ずる。つぎに、 $\Gamma(k)$ の二、三の性質を明らかにする。

(3) 式に逆行列の補助定理を用いると、

$$\Gamma(k+1) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[\Gamma(k) - \frac{\Gamma(k)\zeta(k)\zeta^T(k)\Gamma(k)}{\frac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)} + \zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} \right] \quad (11)$$

上式で定められた $\Gamma(k)$ はつぎの性質をもつ。

《定理 3》

(a) ゲイン行列 $\Gamma(k)$ が (4)、(11) 式に基づいて更新されるならば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}(k) = \tilde{\Gamma} (= \text{const.}) \quad (12)$$

ただし、

$$\tilde{\Gamma}(k) = \begin{cases} \Gamma(0) & ; k=0 \\ \frac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)} \Gamma(k) & ; k \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

(b) このとき、 $\lambda_2(k) \geq \delta$ かつ信号ベクトル $\zeta(k)$ が P.S. ならば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}(k) = 0 \quad (14)$$

(証明)

(a) 準正定行列 $\tilde{\Gamma}(k)$ の変化分を $\Delta\tilde{\Gamma}(k) = \tilde{\Gamma}(k+1) - \tilde{\Gamma}(k)$ と定義すると、(6)、(11)、(13) 式より

$$\Delta\tilde{\Gamma}(k) = -\lambda_1(k-1) \frac{\Gamma(k)\zeta(k)\zeta^T(k)\Gamma(k)}{\frac{\lambda_1(k)}{\lambda_2(k)} + \zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} \leq 0$$

したがって、任意の有界なベクトル x に対し、 $x^T \Delta\tilde{\Gamma}(k)x \leq 0$ が成り立つ。このとき、 $x^T \tilde{\Gamma}(k)x \geq 0$ であるので次式が成り立つ。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^T \tilde{\Gamma}(k)x = \text{const.} \quad (15)$$

上式は任意の $k' \geq 0$ に対し次式が成り立つことを意味する。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^T \tilde{\Gamma}(k)x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^T \tilde{\Gamma}(k+k')x = \text{const.} \quad (16)$$

ここで、 $k \rightarrow \infty$ で $\tilde{\Gamma}(k)$ が収束しないと仮定すると、この仮定は、 k が十分に大きい場合にも k に応じてつぎのような k' が常に存在することを意味する。

$$\tilde{\Gamma}(k+k') - \tilde{\Gamma}(k) \neq 0$$

したがって、 $k \rightarrow \infty$ の場合にもつぎのようなベクトル x' が存在する。

$$x'^T (\tilde{\Gamma}(k+k') - \tilde{\Gamma}(k)) x' \neq 0$$

上式は (16) 式に矛盾する。よって、仮定は誤りであり、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}(k) = \text{const.}$ である。

(b) 逆行列 $\tilde{\Gamma}^{-1}(k)$ は (5)、(6)、(13) 式を用いてつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{-1}(k) &= \frac{1}{\lambda_1(k-1)} \Gamma^{-1}(k) \\ &= \Gamma^{-1}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_2(i)}{\prod_{j=0}^i \lambda_1(j)} \zeta(i)\zeta^T(i) \end{aligned} \quad (17)$$

$\tilde{\Gamma}(k)$ の最大固有値を $\rho_p[\tilde{\Gamma}(k)]$ とし、これに対応する正規化された固有ベクトルを $\tilde{\mathbf{v}}_p(k)$ とすると、 $\rho_p[\tilde{\Gamma}(k)]$ は (17) 式を用いてつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \rho_p[\tilde{\Gamma}(k)] &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{v}}_p^T(k) \tilde{\Gamma}^{-1}(k) \tilde{\mathbf{v}}_p(k)} \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{v}}_p^T(k) \Gamma^{-1}(0) \tilde{\mathbf{v}}_p(k) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_2(i)}{\prod_{j=0}^i \lambda_1(j)} (\zeta^T(i) \tilde{\mathbf{v}}_p(k))^2} \end{aligned}$$

$\lambda_2(k)$ が $\lambda_2(k) \geq \delta$ であり、 $\zeta(k)$ が P.S. であれば、上式右辺の分母第 2 項は $k \rightarrow \infty$ で無限大となる。したがって、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_p[\tilde{\Gamma}(k)] = 0$ 。これは $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}(k) = 0$ を意

味する。 ■

上の定理およびその証明よりつぎの性質も明らかである。

[系 3]

(a) 行列 $\tilde{\mathbf{F}}(k)$ の p 個の固有値 $\rho_i[\tilde{\mathbf{F}}(k)]$, $i=1, 2, \dots, p$ を $\rho_i[\tilde{\mathbf{F}}(k)] \leq \rho_{i+1}[\tilde{\mathbf{F}}(k)]$ とすると次式が成り立つ⁷⁾。

$$\rho_i[\tilde{\mathbf{F}}(k+1)] \leq \rho_i[\tilde{\mathbf{F}}(k)]; \quad i=1, 2, \dots, p \quad (18)$$

(b) $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_1(k) = \tilde{\lambda}_1(= \text{const.}, \text{ただし } 0 \text{ を除く})$ ならば, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{F}(k) = \mathbf{F}(\text{const.})$. このとき, $\lambda_2(k) \geq \delta$ かつ p 元信号ベクトル $\zeta(k)$ が q 次元空間を継続的に張るならば, $\mathbf{F}(k)$ の q 個の固有値は 0 へ漸近する⁸⁾. ■

これまでで示した性質は, $\mu(k) = \mu(= \text{const.})$ とするような Landau らの一般化適応則においても見出すことのできる性質であり, $\mu(k)$ を時変の重み係数とすることにより得られる特徴は特に現われていない。つぎに, $\phi(k)$ の収束に及ぼす時変な $\mu(k)$ の効果について考察する。

《定理 4》

重み係数が $2\mu(k) \geq \lambda_2(k)/\lambda_1(k)$ を満たすように選定されるならば, $\mathbf{F}^{-1}(k) \geq 0$ なる場合にも次式が成り立ち, パラメータ誤差 $\phi(k)$ は有界となる。

$$\|\phi(k)\|^2 \leq \frac{\rho_r[\mathbf{F}(0)]}{\rho_l[\mathbf{F}(0)]} \|\phi(0)\|^2$$

ただし, $\rho_l[\mathbf{F}(0)]$, $\rho_r[\mathbf{F}(0)]$ は $\mathbf{F}(0)$ の最小, 最大固有値である。

(証明)

非負関数 $\tilde{V}(k) = \phi^T(k) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(k) \phi(k)$ を考える。この $\tilde{V}(k)$ に関しては, 定理 1 の証明より明らかのように, つぎの不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k+1) - \tilde{V}(k) &= \phi^T(k+1) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(k) \phi(k+1) - \phi^T(k) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(k) \phi(k) \\ &\quad + \frac{\lambda_2(k)}{\lambda_1(k)} (\zeta^T(k) \phi(k+1))^2 \\ &= -\frac{1}{\tilde{\lambda}_1(k-1)} \left[\left(2\mu(k) - \frac{\lambda_2(k)}{\lambda_1(k)} \right) \varepsilon^2(k) \right. \\ &\quad \left. + \Delta \phi^T(k) \mathbf{F}^{-1}(k) \Delta \phi(k) \right] \leq 0 \end{aligned}$$

系 3 および上式を用いると, つぎの不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \|\phi(k)\|^2 &\leq \frac{\rho_r[\mathbf{F}(0)]}{\rho_r[\tilde{\mathbf{F}}(k)]} \|\phi(k)\|^2 \\ &\leq \rho_r[\mathbf{F}(0)] \phi^T(k) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(k) \phi(k) \\ &\leq \rho_r[\mathbf{F}(0)] \phi^T(0) \mathbf{F}^{-1}(0) \phi(0) \\ &\leq \frac{\rho_r[\mathbf{F}(0)]}{\rho_l[\mathbf{F}(0)]} \|\phi(0)\|^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

上の定理においては, 系 1-2 で用いられた $\mathbf{F}^{-1}(k) \geq \delta \mathbf{I}$ なる条件は特に用いられておらず, 逆に $2\mu(k) \geq \lambda_2(k)/\lambda_1(k)$ なる条件が付け加えられている。これは, 重み係数 $\mu(k)$ を $\lambda_2(k)/\lambda_1(k)$ を考慮に入れて選定することにより, パラメータ誤差 $\phi(k)$ の収束特性が改善されることを示唆するものである。 $\mu(k)$ に関するこのような選定法は, $\mu(k) = \lambda_2(k)/\lambda_1(k)$ とする最小 2 乗法形のアルゴリズムに見ることができる。この種のアルゴリズムについては, 次章で詳しく考察する。

(注意 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$ は, 有限な l に対しては $\lim_{k \rightarrow \infty} (\phi(k+l) - \phi(k)) = 0$ を意味するが, $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \phi(= \text{const.})$ を必ずしも意味するものではない。

(注意 2) $\|\phi(k)\| < \infty$ かつ $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$ ならば, 有限の l および $\varepsilon_1(k) = \zeta^T(k)(\phi(k) - \phi(k-l))$ に対し次式を満足する $0 < K < \infty$ が存在する。

$$|\varepsilon_1(k)| \leq K e(k) \max_{k' \leq k} \|\zeta(k')\|$$

ただし, $e(k) \geq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$ 。

(注意 3) $\mathbf{F}^{-1}(k) \geq \delta \mathbf{I}$ なる条件は, $\mathbf{F}(k)$ の各成分を有界に保つためにも必要とされる。この条件は, 信号ベクトル $\zeta(k)$ が P.S. ならば一般に確保される。 $\zeta(k)$ が P.S. でない場合には, たとえば, $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ をつぎのように選ぶことによりこれを確保することができる。

$$(a) \quad \lambda_1(k) = 1; \quad \forall k$$

$$(b) \quad \text{tr } \mathbf{F}(k) = \text{tr } \mathbf{F}(0); \quad \forall k$$

$$(注意 4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_1(k) = \tilde{\lambda}_1(= \text{const.}, \text{ただし } 0 \text{ を除く})$$

なる性質は, P.S. でない $\zeta(k)$ に対し, $\mathbf{F}(k)$ を有界に保とうとする場合に起る。

2.2 パラメータ誤差に関する幾何学的考察

前節では, 適応則の漸近的性質を中心に考察したが, ここでは時点 $k \sim k+1$ におけるパラメータ誤差 $\phi(k)$ の振舞いについて幾何学的観点から考察を行う。このため, (10) 式を用いて (2) 式をつぎのように書き改める。

$$\phi(k+1) = \mathbf{A}(k) \phi(k) \quad (19)$$

ただし,

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{I} - \frac{\mu(k) \mathbf{F}(k) \zeta(k) \zeta^T(k)}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}(k) \zeta(k)} \quad (20)$$

この $\mathbf{A}(k)$ はつぎのような固有値 $\rho_i[\mathbf{A}(k)]$ をもつ。

$$\rho_i[\mathbf{A}(k)] = \begin{cases} \frac{1}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{F}(k) \zeta(k)}; & i=1 \\ 1 & ; i=2, 3, \dots, p \end{cases} \quad (21)$$

固有値 $\rho_1[\mathbf{A}(k)]$ が $\rho_1[\mathbf{A}(k)] = 1$ となる場合には,

Fig. 1 Geometric relationship between $\phi(k)$ and $\phi(k+1)$

$A(k)=I$ となり、任意のベクトルが $A(k)$ の固有ベクトルとなりうるが、 $\rho_1[A(k)] \neq 1$ となる場合には、つぎのようなベクトルが固有ベクトル $v_i(k)$ となる。

$$v_i(k) = \begin{cases} \Gamma(k)\zeta(k) & ; i=1 \\ \zeta(k) \text{ に直交しかつ互いに直交な } (p-1) \text{ 個のベクトル} & ; i=2, 3, \dots, p \end{cases} \quad (22)$$

行列 $A(k)$ が $A(k)=I$ の場合には $\phi(k+1)=\phi(k)$ は明らかであるので、以下では $A(k) \neq I$ の場合について $\phi(k)$ の挙動を考察する。この場合には、 $\phi(k)$ は、固有ベクトル $v_1(k)$ に対応する成分 $\phi_1(k)$ と他の固有ベクトル $v_i(k)$, $i=2, 3, \dots, p$ に対応する成分 $\phi_2(k)$ とに分けて、つぎのように表現することができる。

$$\phi(k) = \phi_1(k) + \phi_2(k) \quad (23)$$

上式の $\phi_1(k)$ は、 $\zeta^T(k)\phi_2(k)=0$ の関係より、次式で与えられる。

$$\phi_1(k) = \frac{\Gamma(k)\zeta(k)\zeta^T(k)}{\zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} \phi(k) \quad (24)$$

上記の関係を用いて、 $\phi(k+1)$, $\varepsilon(k)$ はつぎのように表わすことができる。

$$\phi(k+1) = \rho_1[A(k)]\phi_1(k) + \phi_2(k) \quad (25)$$

$$\varepsilon(k) = \rho_1[A(k)]\zeta^T(k)\phi(k) \quad (26)$$

(21)~(26)式の関係は **Fig. 1(a)** のように図示されるが、これらよりつぎのことが容易に理解される。

(a) $\rho_1[A(k)]$ の減少は $\varepsilon(k)$ の減少を意味するが、必ずしも $\|\phi(k)\|$ の縮小 (contraction) を意味するものではない。一般に、 $\|\phi(k+1)\|$ はつぎのような

下限および上限をもつ。

$$\|\phi_2(k)\|(1-\phi_{12}(k))^{1/2} \leq \|\phi(k+1)\| \leq \max(\|\phi(k)\|, \|\phi_2(k)\|)$$

ただし、

$$\phi_{12}(k) = \begin{cases} \frac{(\phi_1^T(k)\phi_2(k))^2}{\|\phi_1(k)\|^2 \cdot \|\phi_2(k)\|^2} ; \|\phi_1(k)\| \|\phi_2(k)\| \neq 0 \\ 0 ; \|\phi_1(k)\| \|\phi_2(k)\| = 0 \end{cases}$$

(b) $\varepsilon(k)=0$; $\forall k$ とするような適応則は、一般に次式で与えられる。

$$\phi(k+1) = \phi_2(k) = \left[I - \frac{\Gamma(k)\zeta(k)\zeta^T(k)}{\zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} \right] \phi(k)$$

(c) $\Gamma(k)=\gamma I$ ($=\text{const.}$) の場合には、 $\mu(k)$ のいかんにかかわらず $\phi_1(k)$ と $\phi_2(k)$ は直交し、 $\|\phi(k)\|$ は単調に縮小する (注意 5 参照)。

$\Gamma(k) \neq \gamma I$ なる場合には、 $\phi_1(k)$ と $\phi_2(k)$ は一般には直交しない。しかし、線形写像を通じ、これらの直交化を図ることは可能である。このような直交化は、 $\phi(k)$ の振舞いに関する単純な理解を促し、さらには、漸近的性質を解析するうえで有用な単調減少非負関数を選定するための目安を与える。以下、これを示す。

つぎのような $G^{-1}(k)$

$$G^{-T}(k)G^{-1}(k) = \Gamma^{-1}(k) \quad (27)$$

を $\phi_1(k)$, $\phi_2(k)$ に用い

$$\phi_1'(k) = G^{-1}(k)\phi_1(k)$$

$$\phi_2'(k) = G^{-1}(k)\phi_2(k)$$

とすると、この $\phi_1'(k)$ と $\phi_2'(k)$ は (27), (24) 式および $\zeta^T(k)\phi_2(k)=0$ の関係より、つぎに示すように直交する。

$$\begin{aligned} \phi_1'^T(k)\phi_2'(k) &= \phi_1^T(k)\Gamma^{-1}(k)\phi_2(k) \\ &= \frac{\zeta^T(k)\phi(k)\zeta^T(k)\phi_2(k)}{\zeta^T(k)\Gamma(k)\zeta(k)} = 0 \end{aligned}$$

(23), (25) 式に (27) 式で定義された $G^{-1}(k)$ を用いると、次式が得られる。

$$G^{-1}(k)\phi(k) = \phi_1'(k) + \phi_2'(k) \quad (28)$$

$$G^{-1}(k)\phi(k+1) = \rho_1[A(k)]\phi_1'(k) + \phi_2'(k) \quad (29)$$

(28), (29) 式の関係は **Fig. 1(b)** のように図示される。

これらより、つぎの不等式が明らかである。

$$\phi^T(k+1)\Gamma^{-1}(k)\phi(k+1) \leq \phi^T(k)\Gamma^{-1}(k)\phi(k) \quad (30)$$

$\tilde{\Gamma}^{-1}(k) = \Gamma^{-1}(k)/\tilde{\lambda}_1(k-1)$ であるので、上式よりまた次式も明らかである。

$$\phi^T(k+1)\tilde{\Gamma}^{-1}(k)\phi(k+1) \leq \phi^T(k)\tilde{\Gamma}^{-1}(k)\phi(k) \quad (31)$$

前節で用いた非負関数 $V(k)$, $\tilde{V}(k)$ は、直交化によって明らかにされた (30), (31) 式の不等式に基づいて選定されたものである。

(注意 5) (c) 項は、可変ベクトルをある超平面の

正射影として求めようとするプロジェクションアルゴリズム⁵⁾の簡単な別解釈を与えるものといえる。

3. 最小 2 乗法形アルゴリズムの性質と応用

本章では、Landau 形のアルゴリズムには一般的には見られないが、最小 2 乗法形のアルゴリズムには共通して見られる興味ある性質を一般性のある形で明らかにするとともに、この一般形の一応用として収束速度の制御機能を有するアルゴリズムが得られることを示す。

3.1 アルゴリズムの性質

(2)~(4), (11) 式の適応則は、(20) 式および $\mu(k) = \lambda_2(k)/\lambda_1(k)$ なる関係を用いると、つぎのように書き改められる。

$$\phi(k+1) = \mathbf{A}(k)\phi(k) \quad (32)$$

$$\mathbf{\Gamma}(k+1) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \mathbf{A}(k) \mathbf{\Gamma}(k) \quad (33)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1}(0) > 0, \mathbf{\Gamma}(0) > 0, 0 < \lambda_1(k) \leq 1, \lambda_2(k) \geq \delta \quad (34)$$

(32)~(34) 式に従って定められた $\phi(k)$ はつぎのように表わすことができる (付録 A 参照)。

$$\phi(k) = \tilde{\mathbf{F}}(k) \mathbf{\Gamma}^{-1}(0) \phi(0) \quad (35)$$

上式は、パラメータ誤差 $\phi(k)$ は $\mathbf{\Gamma}(0)$, $\phi(0)$ の初期値指定後は $\tilde{\mathbf{F}}(k) (= \tilde{\lambda}_1(k-1) \mathbf{\Gamma}(k))$ のみに比例して収束することを意味しており、 $\phi(k)$ の振舞いを考察するうえで極めて有用な表現法となっている。この表現を用いることにより、二、三の有益な性質が容易に導かれることをつぎに示す。

《定理 5》

(32)~(34) 式に基づき $\phi(k)$ が定められるならば、以下のことが成り立つ。

$$(a) \quad \|\phi(k)\| \leq \frac{\rho_p[\mathbf{\Gamma}(0)]}{\rho_i[\mathbf{\Gamma}(0)]} \|\phi(0)\| \quad (36)$$

$$(b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \phi (= \text{const.}) \quad (37)$$

このとき、 $\zeta(k)$ が P. S. ならば、 $\phi = 0$ 。

(証明)

(a) (35) 式の両辺にノルムをとり、系 3 を用いると、

$$\begin{aligned} \|\phi(k)\| &= \|\tilde{\mathbf{F}}(k) \mathbf{\Gamma}^{-1}(0) \phi(0)\| \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{F}}(k)\| \|\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)\| \|\phi(0)\| \\ &= \frac{\rho_p[\tilde{\mathbf{F}}(k)]}{\rho_i[\mathbf{\Gamma}(0)]} \|\phi(0)\| \leq \frac{\rho_p[\mathbf{\Gamma}(0)]}{\rho_i[\mathbf{\Gamma}(0)]} \|\phi(0)\| \end{aligned}$$

(b) (35) 式に定理 3 を用いれば、直ちに得られる。

上の定理は Goodwin ら ($\lambda_1(k)=1$ の場合に相当)⁶⁾ や Lozano ($\lambda_2(k)/\lambda_1(k)=\text{const.}$ $\lambda_1(k)<1$ の場合に相

当)⁹⁾ によって示された $\|\phi(k)\| < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$ なる性質を包含する形となっている。性質 (b) は最小 2 乗法形のアルゴリズム特有の性質としてここで新たに得られた性質であり、この性質は適応極配置系において Persistently Exciting (P. E.) な外部入力より P. E. なプラント入力を発生するために必要とされるものである⁶⁾。なお、証明より明らかのように、これらの性質は $\mathbf{\Gamma}^{-1}(k) \geq \delta \mathbf{I}$ なる条件を特に必要とするものではない。これは、Landau らの一般化適応則には一般的には見受けられない特徴である。

3.2 可変重みつき固定トレースゲインアルゴリズム

(2)~(4), (11) 式の適応則は、 $\mu(k) = \lambda_2(k)/\lambda_1(k)$ なる関係を用いて $\lambda_2(k)$ を消去すると、つぎのように書き改められる。

$$\phi(k+1) = \phi(k) - \mu(k) \mathbf{\Gamma}(k) \zeta(k) \varepsilon(k) \quad (38)$$

$$\mathbf{\Gamma}(k+1) = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[\mathbf{\Gamma}(k) - \frac{\mu(k) \mathbf{\Gamma}(k) \zeta(k) \zeta^T(k) \mathbf{\Gamma}(k)}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{\Gamma}(k) \zeta(k)} \right] \quad (39)$$

$$\mathbf{\Gamma}(0) > 0, \mathbf{\Gamma}^{-1}(0) > 0, 0 < \lambda_1(k) \leq 1, \delta \leq \mu(k) < \infty \quad (40)$$

このとき、 $\text{tr } \mathbf{\Gamma}(k) = \text{tr } \mathbf{\Gamma}(0)$, $\forall k$ となるように $\lambda_1(k)$ を

$$\lambda_1(k) = 1 - \frac{\mu(k) \|\mathbf{\Gamma}(k) \zeta(k)\|^2}{1 + \mu(k) \zeta^T(k) \mathbf{\Gamma}(k) \zeta(k)} \cdot \frac{1}{\text{tr } \mathbf{\Gamma}(0)} \quad (41)$$

と決めるならば、 $\mu(k)$ により (38) 式の $\mu(k) \mathbf{\Gamma}(k)$ のトレースの調整が可能となる。この場合の $\lambda_1(k)$, $\mathbf{\Gamma}(k)$ に関しては、従来の固定トレースゲインアルゴリズムの性質⁹⁾ が適用され、

$$0 < \rho_i[\mathbf{A}(k)] \leq \lambda_1(k) \leq 1$$

が保証される。

(38)~(41) 式のアルゴリズムは、定理 5 の性質に併せて、さらに適応則として有用な性質をもつ。

(a) ゲイン行列 $\mathbf{\Gamma}(k)$ はオーバフローもアンダフローも起さない。

オーバフローは $\mathbf{\Gamma}^{-1}(k)$ が準正定行列へ漸近する場合に、アンダフローは $\mathbf{\Gamma}(k)$ が零行列へ漸近する場合に発生する。

(b) $\mu(k)$ の調整により $\phi(k)$ の収束速度を制御できる^{9)~11)}。

(35) 式についてノルムをとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \|\phi(k)\| &\leq \|\tilde{\mathbf{F}}(k)\| \|\mathbf{\Gamma}^{-1}(0) \phi(0)\| \\ &= \tilde{\lambda}_1(k-1) \rho_p[\mathbf{\Gamma}(k)] \|\mathbf{\Gamma}^{-1}(0) \phi(0)\| \\ &\leq \left(\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_1(i) \right) \text{tr } \mathbf{\Gamma}(0) \|\mathbf{\Gamma}^{-1}(0) \phi(0)\| \quad (42) \end{aligned}$$

上式より明らかのように、 $\|\phi(k)\|$ の上界は $\lambda_1(k)$ の積

に比例して減少する。この $\lambda_1(k)$ は、 $\zeta(k)$ が P.S. ならば、(41)式を通じ $\mu(k)$ により調整することができる。この場合には、 $\phi(k)$ は指数減衰する（注意 6 参照）。なお、 $\zeta(k)$ が P.S. でない場合には、 $\mu(k)$ のいかににかかわらず $\lambda_1(k) \rightarrow 1$ となり⁸⁾、 $\phi(k)$ の収束速度の制御はできない。しかしながら、この場合の $\phi(k)$ はつぎの $J(k)$ を最小とする値となる。

$$J(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \lambda_1(j) \right) \mu(i) (\zeta^T(i) \phi(k))^2$$

(c) 推定パラメータによる除算が必要な場合、 $\mu(k)$ を適切に選定することにより 零割りを避けることができる^{3), 5), 11)}。

上述の重み係数 $\mu(k)$ の上下限は、(40)式では $\delta \leq \mu(k) < \infty$ と示されているが、具体的にはコンピュータの語長によって定められる。なお、 $\mu(k)$ を $\mu(k) = \mu$ (=const.) と定める場合には、(38)~(41)式のアルゴリズムは従来の固定トレースゲインアルゴリズムとなり、ある種の適応系においてはすぐれた特性をもつことが実験的に確かめられている⁶⁾。

(注意 6) (35)式は、 $\lambda_1(k)=1$, $\lambda_2(k) \geq \delta$; $\forall k$ とするようなアルゴリズムでは、 $\zeta(k)$ が P.S. なる場合にも $\phi(k)$ は必ずしも指数減衰するとは限らないということを意味している。

4. む す び

本論文では、従来の種々のアルゴリズムの統一的解析を目的として、より一般性に富む適応則の提案を行うとともに、この性質、振舞いに関する解析を行った。また、提案の適応則より、ロバスト性に富み、適応システムの最適化に資すると思われるアルゴリズムが得られることも示した。このアルゴリズムのみならず、提案の適応則より、好ましい性質を有する新たなアルゴリズムが導出されることが推測されるが、これらの導出とその実際的应用は今後の課題として残された。なお、本論の適応則のバリエーションを付録 B に示した。

参 考 文 献

- 1) Landau, 富塚：適応制御システムの理論と実際，オーム社(1981)
- 2) I. D. Landau and R. Lozano: Unification of Discrete Time Explicit Model Reference Adaptive Control Designs, Automatica, **17**-4, 593/611 (1981)
- 3) R. Lozano: Adaptive Control with Forgetting Factor, Preprints of IFAC VIII, Vol. **VIII**, 83/88 (1981)
- 4) K. J. Åström and B. Wittenmark: Self-Tuning Controllers Based on Pole-Zero Placements, IEE Proceedings, **127**-3, 120/130 (1980)
- 5) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines:

Discrete-Time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-25**-3, 449/456 (1980)

- 6) 鈴木, 新中, 田中: 適応極配置系の一構成法, 計測自動制御学会論文集, **19**-1, 28/35 (1983)
- 7) R. Bellman: Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill (1970)
- 8) 鈴木, 新中, 田中: 一般化適応則の証明と固定トレースアルゴリズムの諸性質, 計測自動制御学会論文集, **18**-11, 1074/1079 (1982)
- 9) 市川, 武藤: 新しい適応法則をもつ適応観測器, 第 2 回適応制御シンポジウム資料, 35/38 (1982)
- 10) G. Kreisselmeier and D. Joos: Rate of Convergence in Model Reference Adaptive Control, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-27**-3, 710/713 (1982)
- 11) B. D. O. Anderson and C. R. Johnson, Jr.: Exponential Convergence of Adaptive Identification and Control Algorithms, Automatica, **18**-1, 1/13 (1982)

《 付 録 》

A: (35)式の証明

まず、 $\phi(k)$ が準正定行列 $\Gamma(k)$ (したがって、 $\Gamma(k)$ は必ずしも正則ではない) によって、一般につぎのように表現されることを、帰納法を用いて示す。

$$\phi(k) = \Gamma(k) \tilde{\phi}(k) \quad (\text{A. 1})$$

ここに

$$\tilde{\phi}(k) = \lambda_1(k-1) \tilde{\phi}(k-1) \quad (\text{A. 2})$$

k 時点では (A. 1) 式が成立したとすると、(32), (33) 式より

$$\begin{aligned} \phi(k+1) &= A(k) \phi(k) = A(k) \Gamma(k) \tilde{\phi}(k) \\ &= \Gamma(k+1) (\lambda_1(k) \tilde{\phi}(k)) \\ &= \Gamma(k+1) \tilde{\phi}(k+1) \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

$\tilde{\Gamma}(0) (= \Gamma(0))$ は正則であるので、 $k=0$ で (A. 1) 式は成立する。これは、すべての時点で (A. 1) 式が成立することを意味する。この場合、(A. 2) 式はつぎのように書き改められる。

$$\tilde{\phi}(k) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_1(i) \right) \tilde{\phi}(0) = \tilde{\lambda}_1(k-1) \Gamma^{-1}(0) \phi(0) \quad (\text{A. 4})$$

(A. 1), (A. 4) 式は、(35) 式を意味する。

B: 適応則のバリエーション

(B. 1) バリエーション I

(1) 式の誤差方程式に対しては、 $\|\zeta(k)\| < \infty$ ならば、つぎの適応則

$$\phi(k+1) = A(k) \phi(k)$$

$$A(k) = I - \frac{\mu_1(k) \Gamma(k) \zeta(k) \zeta^T(k)}{1 + \mu_2(k) \zeta^T(k) \Gamma(k) \zeta(k)}$$

$$\Gamma > 0, \Gamma^{-1} > 0, \delta' \leq \mu_1(k) \leq 2\mu_2(k)$$

を用いることにより、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$ とすることができ

る。この適応則は従来の固定ゲインアルゴリズムを拡張したものであり、 $\mu_1(k) = \mu_2(k)$ と選ぶ場合には (2)

～(4)式の特別の場合となり、 $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{I}$, $\alpha(k)=\mu_1(k)/\mu_2(k)$, $\mu_2(k)\rightarrow\infty$ と選定する場合には市川らにより再導出されたアルゴリズム⁹⁾となる。上記の適応則に関しては、系 1-1, 系 1-2 の(a)～(c)と同様な性質が成り立つ。また、 $\delta'\leq\mu_1(k)\leq\mu_2(k)$, $\mathbf{\Gamma}^{-1}\geq\delta\mathbf{I}$ ならば、次式も成り立つ。

$$\lim_{k\rightarrow\infty} \frac{(\zeta^T(k)\phi(k))^2}{\frac{1}{\mu_1(k)} + \frac{1}{\alpha(k)\delta} \|\zeta(k)\|^2} = 0$$

(B-2) バリエーション II

誤差方程式が次式

$$\varepsilon(k)=G(z^{-1})(\zeta^T(k)\phi(k+1))$$

$$G(z^{-1})=\frac{1+\beta_1 z^{-1}+\cdots+\beta_m z^{-m}}{1+\alpha_1 z^{-1}+\cdots+\alpha_n z^{-n}}$$

で与えられる場合にも、(2), (3)式のアルゴリズムを用いることにより $\lim_{k\rightarrow\infty} \varepsilon(k)=0$ とすることができ。ただし、(4)式に代ってつぎの条件が用いられるものとする。

(a) $G'(z^{-1})=G(z^{-1})-\lambda/2$ が強正実

(b) $\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)>0$, $\mathbf{\Gamma}(0)>0$,

$$0<\lambda_1(k)\leq 1, \quad 0\leq\lambda_2(k)\leq\lambda\mu(k)<2\mu(k),$$

$$\mu(k+1)\leq\mu(k)$$

$$(\text{または}, \mu(k)\leq\mu(k+1)<\infty)$$

なお、この場合にも、系 1.1, 系 1.2 と同様な性質が成り立つ。