最適レギュレータのゲイン行列をスカラー倍した制御則†

伊 藤 智 康*・小 林 尚 登*・早 勢 実*

Optimal Regulator with Scalar Multiplier

Tomoyasu Ito*, Hisato KOBAYASHI* and Minoru HAYASE*

1. はじめに

PID 制御をはじめとする古典制御においては、ゲイン調整による応答改善を現場で行うことができた。しかし、現代制御論での最適レギュレータにおいて、応答改善の為にゲイン調整を行うには、評価関数の重み係数までさかのぼって考えなければならない。よって、シミュレーションなどによる試行錯誤が必要となり、現場での調整は容易ではない。

本稿では、ある重みで LQ 問題を解いて制御則を設計した後、それを単にスカラー倍した新しいフィードバックマトリクスを考える。そしてそれが、制御入力大きさに制限がある実的な系に対して、つぎのような性質をもつことを示す。

- (a) 制御対象が線形の場合
 - i) 原点への漸近領域(注1)は不変
 - ii) 収束性がある意味で向上する
- (b) 制御対象に2次以上の非線形項が存在する場合
 - iii) 原点への漸近領域(注1)が拡大する

2. 制 御 則

次式で表わされるシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + bu + g(x) \quad (2.1)$$

$$A \in R^{n \times n}, b \in R^n, x \in R^n$$

$$g(x) \in R^n, g(0) = 0$$

ここで A, b は定係数行列であり、 $g(x) = 0$ でシステムが線形の場合と、 $g(x)$ が2次以上の非線形項の場合を考える。

まず、(2.1)式において $g(x) = 0$ の時に、LQ 問題

を解くことによって制御則を得る。次式の評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + r u^2) dt \quad (2.2)$$

$$Q > 0, Q \in R^{n \times n}, r > 0$$

を最小にする入力は、

$$u = -\frac{1}{r} b^T \pi x = -f x \quad (2.3)$$

$$\pi > 0, \pi \in R^{n \times n}, f = \frac{1}{r} b^T \pi$$

となる。ここで π は、Riccati 方程式

$$\pi A + A^T \pi - \frac{1}{r} \pi b b^T \pi + Q = 0 \quad (2.4)$$

の解である。(2.3)式の制御則は、入元に制限があるという仮定から次式のように表わせる。(Fig. 1)

$$u_1 = -N(fx)$$

ただし $N(\sigma)$ は飽和を表わす関数で

$$N(\sigma) = \begin{cases} \sigma & , |\sigma| \leq m \\ m \cdot \text{sign}(\sigma), & |\sigma| > m \end{cases}$$

とする。このときフィードバック部分の等価ゲイン

Fig. 1 Closed loop by using U_1 Fig. 2 Closed loop by using U_2

* 第21回計測自動制御学会学術講演会で発表(昭57・7)

* 東京農工大学工学部 小金井市中町 2-24-16

* Faculty of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology, Koganei
(Received February 21, 1983)

(Revised August 17, 1983)

Keyword: control system, optimal regulator, input saturation asymptotic stability, nonlinear term

(注1) Lyapunov 関数として $V(x) = x^T \pi x$ を用いた時漸近安定性が保証される領域を意味する。ただし π は LQ 問題より得られる正定行列である。

$k_1(x)$ は

$$k_1(x) = \begin{cases} 1, & |fx| \leq m \\ \frac{m}{|fx|}, & |fx| > m \end{cases} \quad (2.5)$$

本稿では (2.5) 式の線形フィードバックの部分に乗数倍して、次式の制御則を考える。(Fig. 2)

$$u_2 = -N(c \cdot fx)$$

このときの等価ゲイン $k_2(x)$ は

$$k_2(x) = \begin{cases} c, & |fx| \leq \frac{m}{c} \\ \frac{m}{|fx|}, & |fx| > \frac{m}{c}, \quad (c > 1) \end{cases} \quad (2.6)$$

3. u_1 と u_2 の比較

(a) 制御対象が線形の場合 ($g(x)=0$)

i) 入力大きさに制限があるので、制御系が不安定の場合は、安定化できる領域は原点の近傍に限定される。漸近安定となる初期値の範囲は $V(x) = x^T \pi x$ という Lyapunov 関数を用いることにより推定できるが、ここではこの領域が定数 c に依存しないことを示そう。

つぎの正値 2 次関数を考える。

$$V(x) = x^T \pi x \quad (3.1)$$

また、 x の領域をつぎの二つに分けて考える。

$$A_1 = \{x \mid |fx| \leq m\} \quad (3.2)$$

$$A_2 = \{x \mid |fx| > m\} \quad (3.3)$$

① $x \in A_1$ のとき

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, u_1) &= x^T \left(A^T \pi + \pi A - \frac{2}{r} \pi b b^T \pi \right) x \\ &= x^T \left(-Q - \frac{1}{r} \pi b b^T \pi \right) x \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, u_2) &= x^T \left(A^T \pi + \pi A - \frac{2k_2(x)}{r} \pi b b^T \pi \right) x \\ &= x^T \left(-Q - \frac{2k_2(x)-1}{r} \pi b b^T \pi \right) x \\ &< 0 \quad (\because k_2(x) > 1, x \in A_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

② $x \in A_2$ のとき

$c > 1$ から、 $|fx| > \frac{m}{c}$ の領域は A_2 に含まれ、 u_1, u_2

とも飽和入力の状態になり全く同様の制御則となる。よって次式がいえる。

$$\{x \mid \dot{V}(x, u_1) < 0\} = \{x \mid \dot{V}(x, u_2) < 0\} \quad (3.6)$$

以上、①の場合は両制御則とも $\dot{V} < 0$ となり、②の場合は $\dot{V} < 0$ となる領域が等しいことから、Lyapunov の安定論より漸近安定性を保証する領域が定数 c に依

存しないことが示された。

ii) 収束性がある意味で向上することを示す。

(3.1) 式を用いてつぎの評価関数を考える。

$$\tilde{J}(x) = \int_0^\infty V dt \quad (3.7)$$

ここでは、状態が A_1 のみを通過し原点に収束する場合に初期値の範囲を限定し、二つの入力に対する評価関数値を比較する。この時 $\dot{V}$ に関して

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, u_1) - \dot{V}(x, u_2) &= x^T \left\{ \frac{2(k_2(x)-1)}{r} \pi b b^T \pi \right\} x \\ &> 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

が成り立つ。よって初期値が等しいと仮定すると、 $V, \tilde{J}$ に対して、

$$V(x, u_1) > V(x, u_2) \quad (3.9)$$

$$\tilde{J}(x, u_1) > \tilde{J}(x, u_2) \quad (3.10)$$

がいえる。結局 (3.7) 式の評価関数値は、原点近傍のある限定された領域において、 u_1 を用いた場合より u_2 を用いた場合の方が小さいことが示された。

[例題]

つぎの 2 次系を考える。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ |u| &\leq 10 \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここで制御則は、

$$u_1 = -k_1(x)(x_1 + x_2) = -k_1(x)fx \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \begin{cases} 1, & |fx| \leq 10 \\ \frac{10}{|fx|}, & |fx| > 10 \end{cases} \\ u_2 &= -k_2(x)(x_1 + x_2) = -k_2(x)fx \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$k_2(x) = \begin{cases} 30, & |fx| \leq \frac{10}{30} \\ \frac{10}{|fx|}, & |fx| > \frac{10}{30} \end{cases}$$

これらの入力を用いてつぎの評価関数値を計算する。

$$\tilde{J}(x) = \int_0^{10} x^T \pi x dt, \quad \pi = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

初期点を $x_1=10, x_2=0$ とすると、

$$\tilde{J}(x, u_1) = 181.0 \quad (3.15)$$

$$\tilde{J}(x, u_2) = 144.1 \quad (3.16)$$

となる。

(b) 制御対象に 2 次以上の非線形項 ($g(x)$) が存在する場合

iii) 漸近安定保証領域が拡大することを示そう。

(3.1) 式の Lyapunov 関数を考える。

① $x \in A_1$ のとき

$$\dot{V}(x, u_1) = x^T \left(A^T \pi + \pi A - \frac{2}{r} \pi b b^T \pi \right) x$$

$$\begin{aligned}
 &+2g^T(x)\pi x \\
 &=x^T\left(-Q-\frac{1}{r}\pi b b^T\pi\right)x+2g^T(x)\pi x \\
 &\quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, u_2) &=x^T\left(-Q-\frac{2k_2(x)-1}{r}\pi b b^T\pi\right)x \\
 &\quad +2g^T(x)\pi x \\
 &\quad (3.18)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 |fx| \leq \frac{m}{c} \text{ のとき} \\
 k_2(x) = c > 1 \\
 \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$|fx| > \frac{m}{c} \text{ のとき} \quad (3.20)$$

$$k_2(x) = \frac{m}{|fx|} > 1 \quad (\because x \in A_1)$$

であるから

$$k_2(x) = k_2^*(x) + 1 \quad (k_2^*(x) > 0) \quad (3.21)$$

となり，結局 (3.18) 式は，

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, u_2) &=x^T\left(-Q-\frac{1}{r}\pi b b^T\pi\right. \\
 &\quad \left.-\frac{2k_2^*(x)}{r}\pi b b^T\pi\right)x+2g^T(x)\pi x \\
 &=-x^T P_1 x - x^T P_2 x + 2g^T(x)\pi x \\
 &\quad (3.22)
 \end{aligned}$$

$$\left(P_1 = Q + \frac{1}{r}\pi b b^T\pi, \quad P_2 = \frac{2k_2^*(x)}{r}\pi b b^T\pi\right)$$

となる。さて，(3.17) 式と (3.22) 式がそれぞれ $\dot{V} < 0$ とする x の領域を考える。

$$LS_{11} = \{x | 2g^T(x)\pi x < x^T P_1 x, x \in A_1\} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 LS_{12} &= \{x | 2g^T(x)\pi x < x^T P_1 x + x^T P_2 x, \\
 &\quad x \in A_1\} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

これらの領域を定める不等式の右辺を比較すると， P_2 が正定であることから，後者のほうが任意の x に対して第 2 項分だけ大きい。さらに左辺が同じ関数であることから

$$LS_{11} \subset LS_{12} \quad (3.25)$$

② $x \in A_2$ のとき

u_1, u_2 とも飽和入力の状態で等しい制御則となる。

よって

$$LS_{21} = LS_{22} \quad (3.26)$$

$$LS_{21} = \{x | \dot{V}(x, u_1) < 0, x \in A_2\}$$

$$LS_{22} = \{x | \dot{V}(x, u_2) < 0, x \in A_2\}$$

となる。

以上，(3.25) 式，(3.26) 式より， $|fx|$ の大きさに関係なく，

$$LS_1 \subset LS_2 \quad (3.27)$$

$$LS_1 = \{x | \dot{V}(x, u_1) < 0\}$$

$$LS_2 = \{x | \dot{V}(x, u_2) < 0\}$$

Fig. 3 Asymptotic stable domains of initial-value

が成立する。よって上式から，Lyapunov の安定定理より， u_2 を用いた場合の漸近安定性を保証する領域が， u_1 の場合より大きいことが示された。

〔例題〕

つぎの 2 次系を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$|u| \leq 14.164$$

ここで制御則は，

$$u_1 = -0.236k_1(x)(x_1 + x_2) = -k_1(x)fx$$

$$k_1(x) = \begin{cases} 1, & |fx| \leq 14.164 \\ \frac{14.164}{|fx|}, & |fx| > 14.164 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$u_2 = -0.236k_2(x)(x_1 + x_2) = -k_2(x)fx \quad (3.30)$$

$$k_2(x) = \begin{cases} 10, & |fx| \leq \frac{14.164}{10} \\ \frac{14.164}{|fx|}, & |fx| > \frac{14.164}{10} \end{cases}$$

u_1, u_2 を用いた場合に，系を漸近安定とする初期値の領域を計算機シミュレーションより求め，Fig. 3 に示す。

4. おわりに

最適レギュレータを単に乗数倍するという簡単な作業のみで i) ~ iii) の利点が得られることを述べた。また本稿で扱った制御対象は，入力制限や 2 次以上の非線形項が存在することなど一般の制御によく見られるものなので，本結果が現場において良い指針になると期待できる。また，ここでは 1 入力系のみを取り扱ったが，多入力系に対しても全く同様に説明できる。

参考文献

- 1) B. D. O. Anderson and J. B. Moore: Linear Optimal Control, 70/76, Englewood Cliffs NJ, Prentice-Hall, (1971)
- 2) R. E. Kalman and J. E. Bertram: Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov. I Continuous-Time Systems, Trans. ASME, Basic Eng. 82, 371/393 (1960)