等高線アルゴリズムを用いた根軌跡作図法†

兼 田 雅 弘*・赤 堀 一 郎**

A Drawing Method of Root Locus Using Equi-Contour Algorithm

Masahiro KANEDA* and Ichiro AKAHORI**

1. ま え が き

根軌跡は、閉ループ制御系の安定性と過渡特性に関する定量的性質を、注目するパラメータの変化に対応して、図的に表現するものである。これを用いた根軌跡法は1入出力系に対する有力な実用的設計法として確立されている。

ところで、古典的な根軌跡作図法¹⁾はいわゆる位相条件とゲイン条件および、いくつかの根軌跡の性質をたよりに、定規とコンパスを用いて、その概略図を試行錯誤的に求める方法である。したがって、これが適用できるのは、ループ巡伝達関数が分母、分子共に容易に因数分解できる比較的低次の系に限られている。最近手軽に利用できるようになった計算機、特に、マイコンなどに対しても、この作図法をそのまま適用するのは得策とは考えられない。また、変化させるパラメータの値をつぎつぎと指定して、特性方程式を繰返し解く方法も、計算時間の点やパラメータの値の指定法などに問題があり、実用的とは思われない。

本稿では、等高線アルゴリズムを用いる計算機向きの新しい根軌跡作図法²⁾を提案している。これは、複素変数 s に関する特性方程式を、変化させるパラメータに関する方程式と考えて解析的に解くと、その虚数部 $=0$ の等高線が根軌跡であるという発想に基づいている。この方法によれば、純粋遅れ要素のように s に関する超越関数をその伝達関数に含む系とか、かなり高次な系に対しても根軌跡は簡単に得られる。

2. 本作図法の原理

閉ループ系の特性方程式を一般的に(1)式で表わ

† 第12回制御理論シンポジウムで発表(昭58・5)

* 詫間電波工業高等専門学校情報工学科 香川県三豊郡 詫間町大字香田 551

** 日本電装(株) 刈谷市昭和町 1-1

* Takuma Radio Technical College, Mitoyo-gun, Kagawa

** Nippon-Denso, Corp., Kariya

(Received July 9, 1983)

(Revised August 22, 1983)

Keyword: drawing method of root locus, equi-contour, computer oriented algorithm

す。

$$F(s; k) = 0 \quad (1)$$

ここで、 s : 複素変数、

k : 変化させる実数値パラメータ

(1)式を解析的に、 $s=g(k)$ という形に変形することは一般に困難であるが、

$$k=f(s) \quad (2)$$

の形に変形することはやさしい。これは、複素変数 s に関する特性方程式(1)を逆転の発想で、 k に関する方程式と考えて、解析的に解いたことになる。(2)式の右辺は s が複素数であるから一般に複素数となり、これを(3)式のように表わすと、(2)式は(4)式となる。

$$f(\sigma + j\omega) = f_r(\sigma, \omega) + j f_i(\sigma, \omega), j \triangleq \sqrt{-1} \quad (3)$$

$$k = f_r(\sigma, \omega), \quad (4.a)$$

$$0 = f_i(\sigma, \omega) \quad (4.b)$$

いま、 s 平面の任意の領域があるメッシュで分割され、その各格子点における $f(s)$ 、すなわち、 $f_r(\sigma, \omega)$ 、 $f_i(\sigma, \omega)$ の値が計算されているものとする。このとき、まず、 $f_i(\sigma, \omega)$ に関して、高さ0の等高線を描けば、これが根軌跡であって、(4.b)式は丁度、古典的方法の位相条件に対応しているといえる。

つぎに、 $f_r(\sigma, \omega)$ に関して、任意の実数値 k を高さとする等高線を描き、 $f_r(\sigma, \omega)=0$ の等高線との交点を求めると、これがパラメータ k における特性根の分布を与えることになり、(4.a)式は丁度、古典的方法のゲイン条件に対応しているといえる。

実際には、 $f_r(\sigma, \omega)=k$ の等高線は $f_i(\sigma, \omega)=0$ の等高線のごく近傍のみを描けばよいので、探索領域が本質的に一次元となり、一つのパラメータ値 k に対する計算時間はきわめてわずかで済む。

この原理を直感的に解釈する説明図を Fig. 1 に示す。

3. アルゴリズムと特徴

3.1 本作図法のアルゴリズム

- (i) (1)式の特性方程式 $F(s; k)=0$ を(2)の $k=f(s)$ の形に変形する。
- (ii) 根軌跡を考える s 平面の矩形領域を指定し、そ

Fig. 1 Intuitive explanation of drawing method of root locus using equi-contour algorithm

れを適当なメッシュで分割して、各格子点における $f(s)$, すなわち, $f_r(\sigma, \omega)$, $f_i(\sigma, \omega)$ の値を計算する。

(iii) $f_i(\sigma, \omega)=0$ の等高線を等高線アルゴリズム^{2), 3)}にしたがって描く。

(iv) いくつかの実数値 k について, $f_r(\sigma, \omega)=k$ の等高線を $f_i(\sigma, \omega)=0$ のごく近傍のみ描き, $f_i(\sigma, \omega)=0$ との交点に印をつける。

3.2 本作図法の特徴

- (i) ルーパー-巡伝達関数の分母, 分子をそれぞれ因数分解する必要がない。
- (ii) 純粋遅れ要素のように複素変数 s に関する超越関数を伝達関数に含む系にも適用可能である。
- (iii) 計算および作図に要する時間は、高々次数に比例する程度であるので、高次系にも適用可能である。
- (iv) 根軌跡を考える s 平面の領域と、そのメッシュの分割数が任意に指定可能であるため、 s 平面の任意の部分の根軌跡を任意の精度で描くことが原理的に可能である。
- (v) パラメータ k の負の値に対応する根軌跡も同時に描かれてしまうので注意が必要である。
- (vi) k に関して不定あるいは不能となる $f(s)$ の極は、すべての k に対する根軌跡上の点として、3.1 のステップ(iv)で印がつけられるので注意が必要である。

4. 例 題

特性方程式が(5)式で与えられる2次系において、パラメータ k に関する根軌跡を考える。

Fig. 2 Root locus of a second order system with characteristic equation (5)

$$1 + \left(1 + \frac{s}{6}\right) \cdot \frac{25k}{s(s+2.5)} = 0 \quad (5)$$

これを k について解くと、(6)式が得られる。

$$k = -\frac{6}{25} \frac{s(s+2.5)}{s+6} = f(s) \quad (6)$$

Fig. 2(a)は、3.で示したアルゴリズムに従って、プロッタに出力した例である。また、(b)はゲイン条件に対応する $f_r(\sigma, \omega)=k$ の等高線も全領域にわたって描いたものである。図中の P 点が3.2の特徴(vi)で指摘した(6)式の k の極である。

この例題は三菱 MULTI 16 パーソナルコンピュータを用い、メッシュの分割数を s 平面の実部、虚部共に 69 として、倍精度演算で行った。このとき、各格子点における(6)式の計算に約 34 秒、根軌跡の作図(プロッタ出力)に約 200 秒(CRT 出力では約 50 秒)要した。また、ゲイン条件による印付には、一つの k に対し約 1 秒であった。

5. 結 び

等高線アルゴリズムを用いる計算機向きの新しい根軌跡作図法を提案した。これは、複素変数 s に関する特性方程式を、逆転の発想で、変化させるパラメータ k に関する方程式と考えて解析的に解き、 s 平面の任意の領域でその値を計算するとき、その虚数部=0 の等高線が根軌跡であるという原理に基づいている。

この方法は、純粋遅れを含む系とか、高次系にも適

用できるなど、いくつかの優れた特徴をもっている。

今後は、この新しい根軌跡作図法の特徴を生かした新しい根軌跡法、特に、多変数系への拡張を考えたい。

参 考 文 献

- 1) たとえば, Richard C. Dorf : Modern Control Systems, Addison-Wesley Pub. Comp. 165/213 (1980)
 - 2) 兼田, 赤堀 : 等高線を用いた根軌跡計算法, “第 12 回 SICE 制御理論シンポジウム資料, 133/136 (1983)
 - 3) たとえば, G. Cottava and G. Le Moli : Automatic Contour Map, Communication of the ACM, **12**-7, 386/391 (1969)
-