ファジィ関数によるファジィ線形計画問題の定式化†

——台形のファジィ・パラメータの場合——

田 中 英 夫*・市 橋 秀 友*・浅 居 喜代治*

A formulation of Linear Programming Problem by Fuzzy Function

——The Case of Trapezoid Fuzzy Parameter——

Hideo TANAKA*, Hidetomo ICHIHASHI* and Kiyoji ASAI*

1. はじめに

線形計画問題における制約条件式や目標関数のパラメータが、意味論的にあいまいである場合に、このあいまいなパラメータをファジィ集合として表わし、拡張原理¹⁾を用いてファジィ線形計画問題(Fuzzy Linear Programming 問題, FLP 問題と略称)を定式化した²⁾。この問題においては、ファジィ集合のメンバーシップ関数を二等辺三角形に限定することにより通常の LP 問題に帰着できることを示した。本論文では、メンバーシップ関数を台形型に拡張し、ノンファジィな解を求める FLP 問題の定式化を行っている。二等辺三角形のメンバーシップ関数が、たとえば、“500 万円ぐらい”というようなあいまいな値を表現しているのに対して、台形型では、“500 万円から 600 万円ぐらい”というような、さらにあいまいな値も表現することができる。

2. FLP 問題の定式化

FLP 問題におけるファジィ・パラメータをつぎのように定義する。

《定義 1》ファジィ・パラメータとして、だいたい β から γ ぐらいであるというファジィ集合 $\tilde{A}$ を Fig. 1 のような台形型のメンバーシップ関数によって定義する。すなわち

$$\mu_{\tilde{A}}(a) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha - a| - c}{d} & ; c \leq |\alpha - a| \leq d + c \\ 1 & ; |\alpha - a| \leq c \\ 0 & ; \text{そのほか} \end{cases} \quad (1)$$

ただし、ファジィ・パラメータ $\tilde{A}$ は、台形の中心を

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

* College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai

(Received May 30, 1983)

(Revised August 24, 1983)

Keyword: fuzzy sets, fuzzy function, linear Programming

表わす α とあいまいさの広がりを表わす c, d によって表現されており、 $\beta = \alpha - c$, $\gamma = \alpha + c$ である。

$\tilde{A}$ は、定義 1 により、 α, c, d だけで表現できるので、以後ファジィ集合のベクトル表示として、 $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ を

$$\tilde{A} = \{\alpha, c, d\}; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t, \\ c = (c_1, \dots, c_n)^t, d = (d_1, \dots, d_n)^t \quad (2)$$

と表わす。ただし、 $c \geq 0, d \geq 0$ で t は転置を表わす。

[命題 1] ファジィ・パラメータを $\tilde{A} = \{\alpha, c, d\}$ とすると、拡張原理によりファジィ線形関数

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 + \dots + \tilde{A}_n x_n \triangleq \tilde{A}x \quad (3)$$

のメンバーシップ関数 $\mu_{\tilde{Y}}(y)$ は、

$$\mu_{\tilde{Y}}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha^t x - y| - c^t |x|}{d^t |x|}; \\ c^t |x| \leq |\alpha^t x - y| \leq d^t |x| + c^t |x| \\ 1 & ; |\alpha^t x - y| \leq c^t |x| \\ 0 & ; \text{そのほか} \end{cases} \quad (4)$$

となる。ただし、 $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^t$ である。

命題 1 は、文献 2) における命題 1 と同様の方法によって証明できる。

通常の多目的 LP 問題は、目標も満足度規準による制約条件とみなすと、つぎのように表わせる。

$$\begin{aligned} a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n &\geq b_0 && \text{目標} \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 && \text{制約} \\ \vdots &&& \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m && \text{制約} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、(5)式におけるパラメータがすべてあいまい

Fig. 1 Fuzzy parameter of trapezoid membership function

Fig. 2 Explanation of $\tilde{Y}_i \geq 0$

であるとし、これをファジィ集合で表わし、ファジィ線形関数によって書き直すと、

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= \tilde{B}_0 x_0 + \tilde{A}_{01} x_1 + \cdots + \tilde{A}_{0n} x_n \geq 0 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_m &= \tilde{B}_m x_0 + \tilde{A}_{m1} x_1 + \cdots + \tilde{A}_{mn} x_n \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ただし、 $x_0=1$ であり、正負の符号を考慮して、 $\tilde{b}_i, \tilde{a}_{ij}$ をファジィ集合 $\tilde{B}_i, \tilde{A}_{ij}$ で表わしている。またファジィ不等号 ≥ 0 は、 $\tilde{Y}_i$ がだいたい正であることを意味しており、つぎのように定義する。

《定義 2》 定義 1 によるファジィ・パラメータをもつ (3) 式の線形関数において、

$$\tilde{Y}_i \geq 0 \iff \mu_{\tilde{Y}_i}(0) \leq 1-h, \quad \alpha^t x \geq 0 \quad (7)$$

ただし、 h は $\tilde{Y}_i \geq 0$ の度合を表わし、 h が大きいほど正の意味が強くなる (Fig. 2 参照)。

(6) 式を、ファジィ集合のベクトル表示

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = (\tilde{B}_i, \tilde{A}_{i1}, \dots, \tilde{A}_{in}) = \{\alpha_i, \mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i\} \quad (8)$$

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}), \quad \mathbf{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}),$$

$$\mathbf{d}_i = (d_{i1}, \dots, d_{in}) \quad (i=0, \dots, n)$$

で表わすと、

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= \tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{x} \geq 0 \\ \vdots \\ \tilde{Y}_m &= \tilde{\mathbf{A}}_m \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となり、定義 2 を用いて $\tilde{Y}_i \geq 0$ の条件を求めると、(4) 式より、

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Y}_0}(0) &= 1 - \frac{\alpha_0^t \mathbf{x} - \mathbf{c}_0^t \mathbf{x}}{\mathbf{d}_0^t \mathbf{x}} \leq 1-h \\ \vdots \\ \mu_{\tilde{Y}_m}(0) &= 1 - \frac{\alpha_m^t \mathbf{x} - \mathbf{c}_m^t \mathbf{x}}{\mathbf{d}_m^t \mathbf{x}} \leq 1-h \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ただし、 $\mathbf{x} \geq 0$ と仮定している。

ここで定義する FLP 問題は、(9) 式において $\tilde{Y}_i \geq 0$ の条件を最も満足する解 $\mathbf{x}$ を求めることであり、(10) 式から

$$\text{目標} \quad \max_{0 \leq h \leq 1} h \quad (11)$$

$$\text{制約} \quad (\alpha_i - \mathbf{c}_i - h \cdot \mathbf{d}_i)^t \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad (i=0, \dots, n)$$

と表わされる非線形計画問題に帰着できる。

この非線形計画問題を解くための近似解法として、

h を Δh ずつ増大させるアルゴリズムにより、実行可能解が無くなる直前の解 $\mathbf{x}^*$ を近似解として求める方法が考えられる。

3. 数 値 例

上述の FLP 問題とその解の性質を示すために、つぎの数値例を考える。

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 &\geq 29; \quad \tilde{Y}_0 = -29 + 8x_1 + 6x_2 \geq 0 \\ 0x_1 + 6x_2 &\leq 47; \quad \tilde{Y}_1 = 47 - 0x_1 - 6x_2 \geq 0 \\ 10x_1 - 7x_2 &\leq 45; \quad \tilde{Y}_2 = 45 - 10x_1 + 7x_2 \geq 0 \\ -3x_1 + 0x_2 &\leq 15; \quad \tilde{Y}_3 = 15 + 3x_1 - 0x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式をベクトル表示すると、

$$\tilde{Y}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{x} \geq 0, \quad (i=0, 1, 2, 3) \quad (13)$$

ただし、 $x_0=1$ であり、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_0 &= \{\alpha_0 = (-29, 8, 6), \quad \mathbf{c}_0 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{d}_0 = (6, 2, 1)\} \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 &= \{\alpha_1 = (47, 0, -6), \quad \mathbf{c}_1 = (2, 2, 3), \quad \mathbf{d}_1 = (8, 2, 3)\} \\ \tilde{\mathbf{A}}_2 &= \{\alpha_2 = (45, -10, 7), \quad \mathbf{c}_2 = (1, 1, 2), \quad \mathbf{d}_2 = (4, 2, 1)\} \\ \tilde{\mathbf{A}}_3 &= \{\alpha_3 = (15, 3, 0), \quad \mathbf{c}_3 = (3, 1, 3), \quad \mathbf{d}_3 = (4, 1, 2)\} \end{aligned} \quad (14)$$

である。(13) 式は、(11) 式の非線形計画問題となり、

$$\begin{aligned} -30 - 6h + (6 - 2h)x_1 + (5 - h)x_2 &\geq 0 \\ 45 - 8h - (2 + 2h)x_1 - (9 + 3h)x_2 &\geq 0 \\ 44 - 4h - (11 + 2h)x_1 + (5 - h)x_2 &\geq 0 \\ 12 - 4h + (2 - h)x_1 - (3 + 2h)x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。このとき、 h を 0 から 0.1 ずつ増大させていくと $h=0.6$ で可能解がなくなり、最適解は、

$$\mathbf{x}^* = (4.48, 2.62); \quad h=0.5$$

となる。このときの $\tilde{Y}_i$ を Fig. 3 に示す。図からわかるように $\tilde{Y}_i \geq 0$ の条件を最も満たす状態では、 $\tilde{Y}_0, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ が制限になっていて、 $\tilde{Y}_3$ には余裕がある。

Fig. 3 Fuzzy sets of $\tilde{Y}_i \geq 0$ with $h=0.5, i=0, \dots, 3$

4. おわりに

ファジィ集合の拡張原理に基づく演算から、ファジィ LP 問題を定式化した。これによってパラメータのあいまいさを考慮した、多目的計画問題を取扱うことができる。特に、あいまいなパラメータのメンバーシップ関数を台形型に拡張しても、解を得ることができることを示した。これによって、現実の意思決定問

題に、さらに汎用的に応用可能であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) L. A. Zadeh: The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning-I, *Information Science*, **8**, 199/249 (1975)
- 2) 田中・浅居: ファジィ関数による線形計画問題の定式化, システムと制御, **25**-6, 351/357 (1981)