直接法による適応サーボ系の設計†

新 誠一*・北 森 俊 行*

Design of Direct Adaptive Servo System

Seiichi SHIN* and Toshiyuki KITAMORI*

1. 緒 言

モデル規範形適応制御系 (MRACS) の研究が進むにつれて、この制御系の応用上の制約も明らかになってきた。その一つは制御対象の零点が安定でなければならないということである。現在、この制約を回避するために極配置のみを目的とする適応制御系の研究が盛んにおこなわれている^{1), 2)}。Wellstead・Zanker³⁾はこの考え方にサーボ系の構造をとりいれた適応サーボ系を提案している。けれども、この設計はフィード・フォワード型の構成をしているため頑健ではないこと⁴⁾、ならびに間接法を用いているため推定値から制御装置のパラメータを計算する過程が複雑なことなどの問題がある。

本論文は以上の点を考慮して、いわゆるフィード・バック型⁴⁾の頑健なサーボ補償器内のパラメータを制御対象の入出力信号のみから直接推定する適応サーボ系を Elliott の安定化器⁵⁾をサーボ系に拡張することにより構成する。

2. 系の記述

制御対象は (1) 式で表わされる既約かつプロパーな一入出力離散時間線形系とする。

$$y(z) = b(z)a^{-1}(z)u(z) \quad (1)$$

ただし、 $u(z)$ と $y(z)$ はそれぞれ時刻 t における入力、出力であり、 $a(z)$ と $b(z)$ は進み演算子 z の多項式である。 $a(z)$ はモニックとし、その次数 $\partial a(z)$ (注 1) は n とする。

制御の目標は制御対象の入出力のみを観測して (2) 式の線形自由系の出力 $r(t)$ に $y(t)$

を追従させるサーボ問題とする。

$$c(z)r(t) = 0 \quad (2)$$

ただし、 n 次以下の多項式 $b(z)$ とモニックな n_c 次の多項式 $c(z)$ は互いに素とする。また、閉ループ系の可制御な極はモニックで安定な $n+n_c$ 次の多項式 $a^*(z)$ の零点と一致させるものとする。

$c(z)$ と $b(z)$ が互いに素であるので、(3) 式を満たす多項式 $d(z)$ およびモニック多項式 $a_A(z)$ が存在する⁶⁾。

$$a^*(z) = a_A(z)c(z) + b(z)d(z) \quad (3.1)$$

$$\partial a_A(z) = n, \quad \partial d(z) \leq n_c - 1 \quad (3.2)$$

また、 $a(z)$ と $b(z)$ も互いに素であるので、(4) 式を満たす多項式 $h(z)$ と $k(z)$ が存在する⁶⁾。

$$\{a_A(z) - a(z)\}q_A(z) = a(z)h(z) + b(z)k(z) \quad (4.1)$$

$$\partial h(z), \partial k(z) \leq n - 1 \quad (4.2)$$

ただし、 $q_A(z)$ はモニックな n 次の安定多項式であり、状態変数フィルタ (s. v. f.)、すなわちオブザーバ多項式に相当するものである。

以上より、Fig. 1 に示すフィード・バック型のサーボ系を構成すると、(1)～(4) 式より誤差方程式は (5) 式となる。

$$q_A(z)a^*(z)e(t) = q_A(z)a_A(z)c(z)r(t) = 0 \quad (5)$$

ただし、 $e(t)$ は出力誤差：

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (6)$$

である。よって、 $q_A(z)$ と $a^*(z)$ が安定なことより、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (7)$$

となり、制御目的を達している。また、(5) 式からわ

Fig. 1 Servo control system with observer

† 第 5 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 57・12)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received July 4, 1983)

(Revised September 22, 1983)

Keyword: adaptive control, servo mechanism, direct method, non-minimum phase, tracking

(注 1) 多項式 $x(z)$ の次数を $\partial x(z)$ と表わす。以下、多項式一般を表わすのに $x(z)$ を用いる。

かるように閉ループ系の可制御な極は $a^*(z)$ の零点に一致している。

3. 適用サーボ系

前節での結果をもとに、直接法による適応サーボ系を構成する。具体的には Fig. 1 中の未知である $d(z)$, $h(z)$, および $k(z)$ の係数を逐次推定して制御入力 $u(z)$ を合成する制御系を構成する。ここでは制御対象の次数 n のみを既知とし、 $a(z)$ と $b(z)$ の係数は未知とする。また、 $q_A(z)$, $c(z)$, $a^*(z)$ および後出の $p_A(z)$, $p_B(z)$ は事前に決定されているものとする。

さて、(1)式、(3)式、および(4)式より、(8)式と(9)式の関係が成立する。

$$\begin{aligned} a^*(z)y(t) &= b(z)\{d(z)y(t) + c(z)u(t) \\ &\quad + h(z)q_A^{-1}(z)c(z)u(t) \\ &\quad + k(z)q_A^{-1}(z)c(z)y(t)\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a^*(z)u(t) &= a(z)\{d(z)y(t) + c(z)u(t) \\ &\quad + h(z)q_A^{-1}(z)c(z)u(t) \\ &\quad + k(z)p_A^{-1}(z)c(z)y(t)\} \end{aligned} \quad (9)$$

また、制御対象が既約であるので、次数が $2n-1$ 次の任意の安定多項式 $p_A(z)$ に対し、(10)式を満たす $n-1$ 次以下の多項式 $f(z)$, $g(z)$ が存在する⁶⁾。

$$f(z)b(z) + g(z)a(z) = -p_A(z) \quad (10)$$

よって、(8)式に $f(z)$ を乗じ、(9)式に $g(z)$ を乗じて、両者の和をとり、両辺を n_c 次の安定多項式 $p_B(z)$ で割り、変形すると、(11)式となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= d(z)p_B^{-1}(z)y(t) + h(z)q^{-1}(z)c(z)u(t) \\ &\quad + k(z)q^{-1}(z)c(z)y(t) + g(z)a^*(z)p^{-1}(z)y(t) \\ &\quad + f(z)a^*(z)p^{-1}(z)u(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、

$$\begin{aligned} v(t) &= -c(z)p_B^{-1}(z)u(t), \quad q(z) = q_A(z)p_B(z), \\ p(z) &= p_A(z)p_B(z) \end{aligned} \quad (12)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{i=0}^{n_c-1} d_i p_B^{-1}(z)y(t+n_c-1-i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} h_i q^{-1}(z)c(z)u(t+n-1-i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} k_i q^{-1}(z)c(z)y(t+n-1-i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} g_i a^*(z)p^{-1}(z)y(t+n-1-i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} f_i a^*(z)p^{-1}(z)u(t+n-1-i) \\ &= \theta^T \xi(t) \end{aligned} \quad (13)$$

となる(注2)。ただし、 θ は d_i , h_i , k_i , g_i および f_i

を要素とする列ベクトルであり、 $\xi(t)$ は係数に対応する変数を要素とする列ベクトルであり、 T は転置を表わす。(13)式よりわかるように $\xi(t)$ は時刻 t で利用可能な値である。

(13)式の表現に対し(14)式の同定モデルを考える。

$$\hat{v}(t) = \hat{\theta}^T(t) \xi(t) \quad (14)$$

ただし、 $\hat{v}(t)$ と $\hat{\theta}(t)$ はそれぞれ時刻 t における $v(t)$ と θ の推定量である。 $\hat{\theta}(t)$ の更新則としては θ^* を有界な定ベクトルとして、(15)式の特性をもち適応則を用いる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{v(t) - \hat{\theta}^T(t+1)\xi(t)\} = 0 \quad (15.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta^* \quad (15.2)$$

たとえば、よく使われる適応則：

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) - (1 + \xi^T(t)\xi(t))^{-1}(v(t) - \hat{v}(t))\xi(t) \quad (16)$$

も(15)式の特性をもっている。

制御則としては

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{d}_i(z)c^{-1}(z)\{r(t) - y(t)\} - \hat{h}_i(z)q_A^{-1}(z)u(t) \\ &\quad - \hat{k}_i(z)q_A^{-1}(z)y(t) \end{aligned} \quad (17)$$

を用いる。ただし、 $\hat{\theta}(t)$ から再構成される多項式 $\hat{x}_i(z)$ の推定値に対応するものを $\hat{x}_i(z)$ とする。

4. 特性

サーボ系においては(2)式の $c(z)$ として安定でないものを考えるので、 $r(t)$ が発散する場合もある⁴⁾。よって全変数の有界性を対象とする MRACS で用いられている安定解析法^{1), 2)}は適応サーボ系においては有効ではない。ここでは、線形サーボ理論⁴⁾で用いられている安定性の定義に準拠して、最終的に配置される極のみに着目して安定性を考える。前節で設計した適応サーボ系の誤差方程式の(1)式、(13)式、(15)式、および(17)式より、 $t \rightarrow \infty$ とともに(18)式に収束する。

$$\begin{aligned} q_A(z)l(z)a^*(z)e(t) &= -[\{h^*(z)a(z) + k^*(z)b(z) \\ &\quad + a(z)q_A(z)\}p_A(z)c(z)r(t) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、各推定多項式 $\hat{x}_i(z)$ の $t \rightarrow \infty$ の極限を x^* (z) とする。また、

$$l(z) = f^*(z)a(z) + g^*(z)b(z) \quad (19)$$

である。(18)式より $l(z)$ の安定性が全系の安定性を左右することがわかる。もし、 $\hat{f}_i(z)$ と $\hat{g}_i(z)$ が真値 $f(z)$ と $g(z)$ に収束すれば、 $l(z) = -p_A(z)$ となるので $l(z)$ は安定となる。また $l(z)$ が安定になれば、(18)式の誤差方程式において、(20)式がなりたつ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (20)$$

(注2) 多項式 $x(z)$ 中の z^{n_c-1-i} の係数を x_i とする。

本制御系は Elliott の安定化器⁵⁾と同様に余分なパラメータとして $f(z)$, $g(z)$ の係数を推定している。つまり (13) 式の表現は非最小な表現である。よって、 $r(t)$ が十分リッチ^{1), 2)}であっても、かならずしも推定値が真値に収束するとは限らない。このため、本制御系においては現在のところ真値の近くの局所的な安定性しか保証できない。

5. 数値実験

構成した適応サーボ系の有効性を確認するために数値実験を行った。制御対象として、(21)式に示す離散時間の2次系を考えた。この系の分子は不安定である。

$$y(t) = \frac{z+1.2}{z^2+0.5z} u(t) + w(t) \quad (21)$$

また、 $w(t)$ は外乱であり、ここでは、

$$w(t) = 0.3 \quad (22)$$

という定常外乱を考える(注3)。事前に決定すべき多項式を(23)式のように決定した。

$$\begin{aligned} c(z) &= z-1, \quad q_A(z) = z^2, \quad \alpha^*(z) = z^3, \\ p_A(z) &= -z^3, \quad p_B(z) = z \end{aligned} \quad (23)$$

適応則としては(15)式の特徴をもつ最小2乗型の適応則⁷⁾

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F(t+1)(s(t) - R(t)\hat{\theta}(t)) \quad (24.1)$$

$$R(t+1) = \lambda R(t) + \xi(t)\xi^T(t), \quad R(0) = 0 \quad (24.2)$$

$$s(t+1) = \lambda s(t) + v(t)\xi(t), \quad s(0) = 0 \quad (24.3)$$

$$\begin{aligned} F(t+1) &= \frac{1}{\lambda} \{ F(t) - F(t)\xi(t)\xi^T(t)F(t) \\ &\quad \times [\lambda + \xi^T(t)F(t)\xi(t)]^{-1} \}, \\ F(0) &= F^T(0) > 0 \end{aligned} \quad (24.4)$$

$$0 < \lambda \leq 1 \quad (24.5)$$

を $\lambda=1$ として用い、各推定多項式の初期値を

$$\hat{d}_0(z)=1, \quad \hat{h}_0(z)=\hat{k}_0(z)=\hat{f}_0(z)=\hat{g}_0(z)=0 \quad (25)$$

とした。(23)式で示した $c(z)$ は定値信号に対応するものであるが、ここでは適応の過程をみるために(25)式の方角波を採用した。

$$r(t) = \frac{1}{2} \text{sign} [\sin (2\pi t/30)] + \frac{1}{2} \quad (26)$$

この結果が Fig. 2 である。時刻 60 以降、目標信号が定値になっている部分では $y(t)$ が追従していることがわかる。制御対象の出力 $y(t)$ が適応の初期の段階で比較的荒れているけれども、これは(24)式の初期値で与えられる閉ループ系の極が、0.75, -0.8, -

Fig. 2 Simulation result of the proposed adaptive servo system

2.05と不安定なものであるためと考えられる。最終的に配置された閉ループの極は $-0.79, 0.645 \pm 1.05i$ と安定なものになっているが、(23)式で与えた $\alpha^*(z)$ の零点(0の三重根)とは一致していない。これは、 $r(t)$ が実質的に十分リッチではないことおよびこの制御系で用いられている表現が非最小な表現であることに起因していると考えられる。

6. 結 言

以上、直接法による適応サーボ系を構成した。制御ループ内にサーボ補償器を含んでいることと、制御装置のパラメータを制御対象の入出力データから直接推定する構造をとっているため、サーボ系の頑健性と適応系の柔軟性を合わせもっているため実用上の意義は大きいと思う。しかしながら、第4節で述べたように同定モデルが非最小な表現となっているので、局所的安定性しか保証できない。よって、今後の課題の一つは、推定すべきパラメータ数の削減であると思う。以上の点から、本論文の手法はサーボ系の制御パラメータの微調整に特に有効だと考えられる。

参 考 文 献

- 1) 藤井：適応制御における最近の動向，システムと制御，25-12, 715/726 (1981)
- 2) 鈴木：適応制御理論—今後の展開は，システムと制御，26-3, 172/181 (1982)
- 3) P. E. Wellstead and P. Zanker: Servo Self-Tuners, International J. of Control, 30-1, 27/36 (1979)
- 4) 木村, 井上：多変数制御系の理論と応用—Ⅶ, Ⅷ, システムと制御, 22-11, 22-12, 683/692, 743/751 (1978)
- 5) H. Elliott: Direct Adaptive Pole Placement with Application to Nonminimum Phase System, IEEE Trans. on Automatic Control AC-27-3, 720/722 (1982)
- 6) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag (1974)
- 7) 新, 北森：最小2乗型推定による Self-Tuning Controller の構成，第一回適応制御シンポジウム資料, 17/20 (1981)

(注3) 本文中では言及しなかったが、この制御系は Fig. 1 のような構造をしているので、 $c(z)w(t)=0$ なる外乱 $w(t)$ に対し耐性がある。