Smith 法の外乱に対する制御特性の改善[†]

渡 部 慶 二*・伊 藤 正 美**

Disturbance Rejection of Smith Predictor Control System

Keiji WATANABE* and Masami ITO**

Smith predictor control system can not yield desired responses to disturbances. This paper presents a method which can decay the output error to disturbances as fast as desired without change of the input-output transfer characteristics. This method uses a dynamical compensator. The design of the compensator and the mechanism of the disturbance rejection are discussed in detail. Illustrative examples are given to demonstrate the availability.

Keyword: time delay system, Smith predictor control, disturbance rejection, disturbance compensator, complete unobservability

1. ま え が き

大きなむだ時間をもつ系に通常のフィードバック制御を行っても、閉ループ系の安定性のため開ループゲインを十分大きくとることができず望みの制御特性を得ることが難しい。このような系に対する簡単なむだ時間対策として Smith 法¹⁾が知られている。Smith 法は目標入力の変化に対し良好な制御特性を与えることができるものの、加的外乱があるとその影響が長時間出力に残ったり²⁾、定常偏差を生ずることがある³⁾。Smith 法の外乱に対する制御特性の改善の試みがいくつかなされてきたが³⁾⁻⁵⁾、対症療法的で外乱の影響を補償するために Smith 法の特長の入出力伝達特性（むだ時間を取り去って設計したときの制御応答をむだ時間分だけ遅らせたものが実際の応答となる）や閉ループ系の特性方程式（むだ時間要素を含

ない）を損う場合があった。

本稿では、Smith 法の入出力伝達特性、閉ループ系の特性方程式をかえずに、外乱に対する欠陥を根本的に取り除く方法を提案する。また、その制御構造も明確にする。

2. Smith 法

伝達関数が $G(s)e^{-sL}$ ($G(s)$ は安定かつ $s=0$ にゼロ点をもたないとする) である制御対象を考える。この系に Smith 法を適用すると Fig. 1 の系が得られる。ただし、 $G_c(s)$ は制御器で $G_c(s)$ と $G_c(s)$ との間で極—ゼロ点消去がないとする。Fig. 1 の系で目標入力 r から制御出力 y までの伝達関数は次式で与えられる。

$$G_r(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_c(s)G(s)e^{-sL}}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (1)$$

これより Fig. 1 の系は目標入力 r に関して Fig. 2 の系に等価である。 $G_c(s)$ 、 $G(s)$ のつくる閉ループ系にむだ時間が含まれないから通常の方法で望みの応答を得るようにできる。その応答を時間 L だけ遅らせたものが制御出力 y である。これより、Fig. 1 の系では目標入力印加後、時間 L 以降の制御応答を $G_c(s)$ をもって任意に調整できることがわかる。

しかし、Smith 法は目標入力に対して考案された方法であり、外乱に対してはいくつか問題がある。Fig.

Fig. 1 Smith predictor control system

Fig. 2 Equivalent control system as to reference input

[†] 第2回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭54・12)

第9回制御理論シンポジウムで発表 (昭55・5)

* 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

** 名古屋大学工学部 名古屋千種区不老町

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa

** Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya (Received July 27, 1982)

(Revised November 22, 1982)

1 の系で制御対象の入力端にステップ外乱 $d(s) = -1/s$ が加わったとしよう. この外乱に対する出力偏差 $e_d(s)$ ($e_d(s) = r(s) - y(s)$, $r(s) = 0$ とする) は次式で与えられる.

$$e_d(s) = \frac{G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} \frac{1}{s} + \frac{G_c(s)G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} \{G(s) - G(s)e^{-sL}\} \frac{1}{s} \quad (2)$$

外乱に対する制御応答は, $1+G_c(s)G(s)=0$ の根と $G(s)$ の極によって支配されることがわかる. 前者は $G_c(s)$ で調節できるが, 後者はできない. したがって, 制御対象 $G(s)e^{-sL}$ が原点の近くに極をもっていると, 外乱の影響が長時間制御出力に残ることになり望ましくない.

また, 定常偏差 e_{ds} は次式で与えられる.

$$e_{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} s e_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} + \frac{G_c(s)G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} \{G(s) - G(s)e^{-sL}\} \right] \quad (3)$$

$G(s)$ が定位形 (すべての極が s 平面の左半平面にある) であれば

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{G(s) - G(s)e^{-sL}\} = 0 \quad (4)$$

が成立するので, $G_c(s)$ が積分器をもっていて閉ループが安定なら定常偏差を 0 にできる. しかし, $G(s)$ が無定位形 (原点に極をもつ) であれば (4) 式が成立しないので, $G_c(s)$ に積分器をもたせてもステップ外乱に対する定常偏差を 0 にできない³⁾.

3. Smith 法の外乱補償

Smith 法の入出力伝達特性 ((1) 式) を変えずに外乱に対する制御特性を改善するため Fig. 3 に示す系を考える. ここで, $M(s)$ は外乱の影響を補償するための動的補償器であり, 以下, 外乱補償器と呼ぶ.

Fig. 3 の系で目標入力 r から制御出力 y までの伝達関数は

$$\bar{G}_r(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_c(s)G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} \quad (5)$$

Fig. 3 Modified Smith predictor control system

で与えられ (1) 式に等しい. すなわち, Smith 法の制御系に外乱補償器 $M(s)$ を Fig. 3 に示すように挿入しても, Smith 法の入出力伝達特性を損なわないことがわかる. 一方, 外乱 $d(s) = -1/s$ に対する出力偏差 $e_d(s)$ は次式で与えられる.

$$e_d(s) = \frac{G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} \frac{1}{s} + \frac{G_c(s)G(s)e^{-sL}}{1+G_c(s)G(s)} \{G(s) - M(s)G(s)e^{-sL}\} \frac{1}{s} \quad (6)$$

前章で問題になった (2) 式右辺第 2 項の $G(s) - G(s)e^{-sL}$ が $M(s)$ の挿入によって $G(s) - M(s)G(s)e^{-sL}$ となる. いま, $1+G_c(s)G(s)=0$ の根はすべて s 平面の左半平面にあり, $G_c(s)$ は積分器をもっているとしよう. このとき, $M(s)$ の極を任意に設定でき,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{G(s) - M(s)G(s)e^{-sL}\} = 0 \quad (7)$$

を満たし, かつ, $G(s)$ の任意の極 $-s_0$ に対し

$$(s+s_0)\{G(s) - M(s)G(s)e^{-sL}\} |_{s=-s_0} = 0 \quad (8)$$

を満たせば, 外乱に対する制御特性を改善できる. すなわち, (8) 式は $1 - M(s)e^{-sL}$ のゼロ点が $G(s)$ の極 $-s_0$ を消去していることを意味する. したがって, (6) 式の応答は, 任意に指定できる $1+G_c(s)G(s)=0$ の根と $M(s)$ の極だけで決まる.

制御対象が

$$G(s)e^{-sL} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s + \alpha_i} e^{-sL} \quad (9)$$

$$\alpha_i > 0, \beta_i \neq 0, \alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$$

で表わされているとしよう. このとき外乱補償器 $M(s)$ を

$$M(s) = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s + w_i} \quad (10)$$

と置くと (7) 式から

$$a_0 + \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{w_i} = 1 \quad (11)$$

(8) 式から

$$a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{w_i - \alpha_j} = e^{-\alpha_j L} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

が得られる. したがって, w_i ($i=1, 2, \dots, n$) を任意の正の実数に設定したとき, それらの w_i に対して

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/w_1 & \dots & 1/w_n \\ 1 & 1/(w_1 - \alpha_1) & \dots & 1/(w_n - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1/(w_1 - \alpha_n) & \dots & 1/(w_n - \alpha_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\alpha_1 L} \\ \vdots \\ e^{-\alpha_n L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

を満たす $a_0, \dots, a_n$ が存在すれば, (7), (8) 式を満たす外乱補償器が得られ, 外乱に対する制御特性を改善できる. $w_i \neq w_j$ ($i \neq j$), $w_i \neq \alpha_j$ ($j=1, 2, \dots, n$) であれ

ば(13)式を満たす $a_0, \dots, a_n$ を求めることができる(4章).

もし, (9)式が

$$G(s)e^{-sL} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s + \alpha_i} e^{-sL} + \sum_{i=n_1+1}^n \frac{\beta_i}{s + \alpha_i} e^{-sL} \quad (14)$$

に分けられ, $-\alpha_i$ ($i=1, 2, \dots, n_1$) は原点に近い極で, $-\alpha_i$ ($i=n_1+1, \dots, n$) は原点から十分離れた極とする. この場合, (6)式に $-\alpha_{n_1+1}, \dots, -\alpha_n$ が含まれていても制御特性に悪影響しないから, $-\alpha_1, \dots, -\alpha_{n_1}$ だけを消去すればよく低次の外乱補償器に間に合せることができる. すなわち, 外乱補償器 $M(s)$ を

$$M(s) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{a_i}{s + \omega_i} \quad (15)$$

と置き, 任意の $\omega_i > 0$ ($i=1, \dots, n_1$) に対して

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/\omega_1 & \dots & 1/\omega_{n_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1/(\omega_1 - \alpha_{n_1}) & \dots & 1/(\omega_{n_1} - \alpha_{n_1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ e^{-\alpha_{n_1}L} \end{bmatrix} \quad (16)$$

を満たす $a_0, \dots, a_{n_1}$ を求めればよい. やはり, $\omega_i \neq \omega_j$ ($i \neq j$), $\omega_i \neq \alpha_j$ ($j=1, \dots, n_1$) であれば $a_0, \dots, a_{n_1}$ を求めることができる(4章).

4. 外乱補償器

上記の外乱補償器の構造をより明確にするため状態方程式を用いて検討する. また, これによって重極や複素極をもつ制御対象に対しても同様な外乱補償器を設計できることがわかる.

Fig. 3 の系で制御器 $G_c(s)$ が積分器をもち, Fig. 4(a) のようになっているとする. $G_c(s)$ 中の積分器とモデルを取り出すと Fig. 4(b) に示すサブシステムが得られる. (7), (8)式は Fig. 4(b) のサブシステムで $G(s)$ および積分器の極に対応するダイナミカル・モード¹⁰⁾をモデルの出力 y_L からみて不可観測にすることに他ならない. したがって, これを満たす外乱補償器は以下のように考えられる.

Fig. 4(b) の $G(s)$ の部分の状態方程式を

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \bar{y}(t) = cx(t) \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (17)$$

とする. ただし, $x \in R^{n \times 1}$, $u, y \in R$, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^{n \times 1}$, $c \in R^{1 \times n}$ で次式を満たすとする.

$$\text{rank}[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n \quad (18)$$

$$\text{rank}[c', A'c', \dots, A'^{n-1}c'] = n \quad (19)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = n+1 \quad (20)$$

Fig. 4(b) の $1/s$ 部分の状態方程式を次式とする.

$$\begin{cases} \dot{x}_I(t) = 0 \\ u(t) = x_I(t) \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (21)$$

(a) Controller

(b) Augmented model and integrator

Fig. 4

ただし, 可観測性のみが問題になるので入力省略. (17), (21)式からの Fig. 4(b) の $G(s)$, $1/s$ の部分は次式で記述される.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) \\ \bar{y}(t) = \hat{c}\hat{x}(t) \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (22)$$

ただし,

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = [c \ 0]$$

外乱補償器 $M(s)$ の状態方程式記述を

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = D z(t) + E \bar{y}(t-L) \\ \bar{y}(t) = C z(t) + H \bar{y}(t-L) \end{cases} \quad t \geq L \quad (23)$$

とする. ただし, $z \in R^{m \times 1}$, $D \in R^{m \times m}$, $E \in R^{m \times 1}$, $F \in R^{1 \times m}$, $H \in R$ である. D の固有値は $\hat{A}$ の固有値と異なるとする. (22), (23)式から Fig. 4 のサブシステムは次式で記述される.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \hat{c} e^{-\hat{A}L} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \\ y_L(t) = \bar{y}(t) - \hat{y}(t) \end{cases} \quad t \geq L \quad (24)$$

$$= [-F, \hat{c} - H \hat{c} e^{-\hat{A}L}] \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

上式に正則変換

$$\begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & -T \\ 0 & I_{(n+1) \times (n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$T \in R^{m \times (n+1)}$$

を施すと次式が得られる.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -T\hat{A} + DT + E\hat{c}e^{-\hat{A}L} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \\ y_L(t) = [-F, -FT - H\hat{c}e^{-\hat{A}L} + \hat{c}] \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad t \geq L \quad (26)$$

したがって

$$T\hat{A} - DT = E\hat{c}e^{-\hat{A}L} \quad (27)$$

$$FT + H\hat{c}e^{-\hat{A}L} = \hat{c} \quad (28)$$

であれば

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \\ y_L(t) = [-F \ 0] \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad t \geq L \quad (29)$$

となり、 $\dot{x}(t)$ ($G(s)$ と $1/s$ の極に対応するダイナミカル・モード) をモデルの出力 y_L からみて不可観測にできる。かくして、(27), (28) 式からわかるように、モデルおよび積分器の極に対応するダイナミカル・モードをモデルの出力 y_L からみて不可観測にする外乱補償器 ((23) 式) は、(22) 式に対する関数オブザーバ⁶⁾である。(19), (20) 式から $(\delta, \hat{A})$ は可観測なので、少なくとも、 $m=n$ にとり、 D の固有値を $\hat{A}$ のそれと異なるものを選べば (27), (28) 式を満たす D, E, F, H, T が存在する。かくして、(27), (28) 式を満たす D, E, F, H を求め、それらを用いて (23) 式の外乱補償器をつくり (伝達関数は $M(s)=F(sI-D)^{-1}E+H$) Fig. 3 に示すように Smith 法の系に加える外乱に対する制御特性を改善できる。

(注意 1) 上記のことは、前章の制御対象 (9) 式に対する外乱補償器 (10) 式 (ただし、 $\omega_i \neq \omega_j$, $\omega_i \neq \alpha_j$) が存在することを意味している。

(注意 2) 上記の方法は無定位系にも適用できるが、つぎの注意が必要である。モデルおよび積分器の極に対応するダイナミカル・モードはモデルの出力 y_L からみて不可観測になっているので制御出力 y には現れない。しかし、モデルの中の積分要素は $G_c(s)$ の中の積分器の出力を常時積分している。 $G_c(s)$ の中の積分器の出力は、ステップ外乱を補償するため $t \rightarrow \infty$ で非零の一定値となる。モデルの積分器はそれを積分するので無限大へ発散する。すなわち、無定位系に対する Smith 法 ($G_c(s)$ に積分器をもつ) は内部不安定である。したがって、文献 3) と同様、無定位形プロセスモデルを近似的に定位形モデルに置き換える必要がある。

前章で、制御対象の一部の極が s 平面左半平面の原点の近くにあり、残りの極が原点から十分左側に離れている場合、低次の外乱補償器で外乱に対する制御特性を改善できることを述べた。これを状態方程式を用いて考察すると以下ようになる。(17) 式が

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ \bar{y}(t) = [c_1 \quad c_3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (30)$$

に分割されたとしよう。ただし、 $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$ ($n_1+n_2=n$)、 $A_1, A_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ はそれぞれ適当な大きさの実数行列、 A_1 の固有値は原点の近くにあり、 A_2 の固有値は原点から左側に十分離れているとする。(21), (30) 式から次式が得られる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & b_1 \\ 0 & A_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} \\ \bar{y}(t) = [c_1 \quad c_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (31)$$

仮定より、 A_1, A_2 は固有値を含まないから $\text{diag}(A_1, A_2)$ は正則であり、次式を満たす $n_1 \times 1, n_2 \times 1$ 実数行列 T_1, T_2 が存在する。

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

(31) 式につぎの正則変換

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ x_I(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1 \times n_1} & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

を行うと次式が得られる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{x}_I(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ x_I(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ \bar{y}(t) = [c_1, -c_1 T_1 - c_2 T_2, c_2] \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ x_I(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (34)$$

(34) 式のサブシステム $\bar{x}_1(t), x_I(t)$ に上記で述べた方法を適用すると、それらの固有値に対応するダイナミカル・モードをモデルの出力 y_L からみて不可観測にする補償器 $M(s)$ を構成できる。すなわち、(19), (20) 式から (34) 式は可観測であり、

$$\left([c_1 \quad -c_1 T_1 - c_2 T_2], \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

は可観測対である。したがって、

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - D T = E [c_1, -c_1 T_1 - c_2 T_2] \\ \cdot \exp \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \} (-L) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} F T + H [c_1, -c_1 T_1 - c_2 T_2] \exp \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \} (-L) \right\} \\ = [c_1, -c_1 T_1 - c_2 T_2] \end{aligned} \quad (36)$$

を満たす $D \in R^{n_1 \times n_1}$, $E \in R^{n_1 \times 1}$, $F \in R^{1 \times n_1}$, $H \in R$, $T \in R^{n_1 \times (n_1+1)}$ が存在し、それらを用いて

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = D z(t) + E \bar{y}(t-L) \\ \bar{y}(t) = F z(t) + H \bar{y}(t-L) \end{cases} \quad t \geq L \quad (37)$$

をつくれば、これが A_1 および積分器の固有値に対応するダイナミカル・モードをモデルの出力 y_L からみて不可観測にする動的補償器である。

(注意 3) Smith 法の外乱に対する欠陥はつぎの制御構造に起因する。Fig. 1 の系で制御対象 $G(s)e^{-sL}$ とそのモデルは制御入力 u に関して並列に接続されている。しかも、制御対象とモデルは等しい固有値をも

Fig. 5 Modified Smith predictor control system (reduced version)

っているので不可制御な成分が存在する⁷⁾。(2)式右辺第2項は、この不可制御な成分の大きさが外乱によってかわり、それが制御出力 y からみて可観測になっていることを示している。むだ時間を補償するためにモデルを用いる場合この不可制御な成分の存在はさけられないので、外乱に対する制御特性を望み通りに調整できるようにするには、この不可制御な成分を不可観測にするしかない⁷⁾。(8)式、Fig. 4(b)からわかるように、それはモデルの極に対応するダイナミカル・モードをモデルの出力からみて不可観測にすることによりなされる⁷⁾。上記で求めた外補償器 $M(s)$ を Fig. 3 のように入れることにより、入-出力伝達特性をかわずに不可制御な成分を不可観測にできる。

(注意 4) Fig. 3 の系は Fig. 5 の系に等価である ($M(s)=1$ とすると Fig. 1 の系に等価である)。したがって、実際に制御系を構成するときは Fig. 5 のように構成すればよく、 $G(s)$ のモデル、外乱補償器 $M(s)$ を 1 個づつですますことができる。

5. ミスマッチの影響

Smith 法を実際の系に適用したとき、制御対象の同定誤差、パラメータ変動などによって制御対象とモデルの間にずれ (ミスマッチ) を生ずる。そこで、ミスマッチの影響を簡単に考察しておこう。Fig. 5 の系で制御対象が $G(s)e^{-sL}$ でなく $G_p(s)e^{-sL_p}$ であつたとしよう。このとき、目標入力 r から制御出力 y までの伝達関数は次式となる。

$$G_r^*(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{Q(s)e^{-sL_p}}{1 + Q(s)M(s)I(s)e^{-sL_p}} \quad (38)$$

ただし、

$$Q(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (39)$$

$$I(s) = 1 - \frac{G(s)}{G_p(s)}e^{sL} \quad (40)$$

$$L = L_p - L \quad (41)$$

である。 $G_p(s)=G(s)$ 、 $L_p=L$ のとき

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Q(j\omega)M(j\omega)| > \frac{1}{2} \quad (42)$$

であれば、どのような小さいむだ時間のずれ $|L| > 0$ があっても閉ループ系は不安定になる¹¹⁾。しかし、(42)が満たされるのは 1 次の位相遅れ制御対象に PD 制御器といった特別の場合に限られ、一般に $Q(s)$ は strictly proper で

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Q(j\omega)M(j\omega)| = 0 \quad (43)$$

である。このときは、高周波領域で $|Q(j\omega)M(j\omega)|$ の値が $1/2$ より十分小さくなるので、小さいむだ時間のずれに対して閉ループ系を安定に保つことができる。 $G_p(s) \neq G(s)$ の場合も含め同様のことがいえる²⁾。また、このときはパラメータのずれが小さければ (1) 式の応答に近い応答が得られる。すなわち、(38)式の閉ループ系の極は、 $1 + G_c(s)G(s)$ のゼロ点の近くとそれより十分左側に離れたところに位置する⁸⁾。このとき、外乱に対する制御特性についてつぎのことがいえる。

外乱-制御出力間の伝達関数は、

$$G_p^*(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{Q_p(s)e^{-sL_p}}{1 + Q(s)M(s)I(s)e^{-sL_p}} + \frac{Q(s)e^{-sL_p}}{1 + Q(s)M(s)I(s)e^{-sL_p}} \cdot \{G(s) - M(s)G(s)e^{-sL}\} \quad (44)$$

$$Q_p(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

である。パラメータ変動があっても $\{G(s) - M(s)G(s)e^{-sL}\}$ で $G(s)$ の極は $1 - M(s)e^{-sL}$ のゼテ点で消去されていることに注意されたい。したがって、(44)式の閉ループ系の極は、 $1 + G_c(s)G(s)$ のゼロ点、 $M(s)$ の極の近くと、それらから十分左側に離れたところに位置する。かくして、パラメータ変動があってもそれがあまり大きくない限り、外乱に対する出力偏差を速く 0 に近づけることができる。

6. 数値例

つぎの制御対象を考える。

$$G(s)e^{-sL} = \frac{0.2}{s+0.2}e^{-s}$$

制御器 $G_c(s)$ を

$$G_c(s) = \frac{29.45s + 16.9}{s(s+4.3)}$$

にとると $1 + G_c(s)G(s) = 0$ の根は $-1.5, -1.5, -1.5$ である。このとき、Smith 法のステップ外乱に対する制御応答は Fig. 6(A) で示され、長時間外乱の影響が出力に残ることがわかる。上記に述べた方法で外乱

Fig. 6 Responses of (A) Smith predictor control system and (B) modified one to step disturbance

Fig. 7 Responses of (A) Smith's system and (B) modified one to step disturbance (mismatch case)

補償器 $M(s)$ を

$$M(s) = 2.63 - \frac{3.26}{s+2}$$

にとると、同じステップ外乱に対する制御応答は Fig. 6(B) のように改善される。

また、制御対象のむだ時間の大きさが 1.0 から 0.8 に変動したときの応答は **Fig. 7** となり、ミスマッチがあっても応答が改善されていることがわかる。

7. む す び

Smith 法の外乱に対する欠陥を、入一出力伝達特性を変えずに補償する方法を与えた。ここでは入力出力

系について述べたが、多入力多出力系の拡張することもできる。

最後に、本研究に協力いただいた石山泰律君 (現 YHP) に感謝します。

参 考 文 献

- 1) O. J. M. Smith: A Controller to Overcome Dead Time, *ISA J.*, **6**-2, 28/33 (1959)
- 2) 沢野: むだ時間を含む系のある制御法についての研究, *自動制御*, **7**-3, 122/127 (1960)
- 3) 沢野: むだ時間を含む無定位形制御対象の制御, *自動制御*, **7**-5, 248/254 (1960)
- 4) J. E. Marshall: Control of Time Delay Systems, Peter Peregrinus Ltd. (1979)
- 5) J. C. Kantor and R. P. Andres: The Analysis and Design of Smith Predictors Using Singular Nyquist Arrays, *International J. of Control*, **31**-4, 655/644 (1980)
- 6) T. E. Fortman and D. Williamson: Design of Low-order Observer for Linear Feedback Control Law, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-17**, 301/308 (1972)
- 7) K. Watanabe and M. Ito: A Process-Model Control for Linear Systems with Delay, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-26**-6, 1261/1269 (1981)
- 8) A. Manitius and A. W. Olbrot: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-24**-4, 541/553 (1979)
- 9) K. Watanabe and M. Ito: Modified Smith Predictor Control for multivariable Systems with Multiple Delays Subject to Unmeasurable Disturbances, *IFAC 8th world Conference*, 4.5, pp. I-108/I-113, Kyoto (1980)
- 10) B. Porter and R. Grossley: Modal Control, Taylor & Francis (1972)
- 11) Z. Palmor: Stability properties of Smith Dead-Time Compensator Controllers, *International J. of Control*, **32**-6, 937/949 (1980)