線形離散値システムにおけるプロセスと

雑音特性の逐次形次数決定法[†]

五反田 博*・相良 節夫**・和田 清**

Recursive Order Determination of Process and Noise Dynamics
in Linear Discrete Systems

Hiromu GOTANDA*, Setsuo SAGARA** and Kiyoshi WADA**

In the present paper, we propose a computationally efficient order test which first determines the process order and then the noise order. The process order is determined comparing the instrumental residuals derived from the input instrumental product moment matrix. The noise order is evaluated by the statistics yielded from the cross-covariances of the observed output and the composite noise which is a linear combination of the noise with the coefficient of the process parameter.

The noise covariances may be the useful information for determination of the noise order. Under the situation required for the process identification, however, the estimates of the noise covariances can not give the proper order because of the poor accuracy of them, even applying them to the order test. We, therefore, take advantage of the cross-covariance estimates of the composite noise and observed output since they have good accuracy for the purpose. We calculate the order test statistics from them by the recursive algorithm and determine the order.

Keyword: linear discrete system, noise process, identification, order determination

1. ま え が き

未知のシステムを同定するにあたって、雑音の特性を把握することは重要である。特に制御や予測を念頭

においた状況では、プロセスのみならず雑音過程をも同定しなければならない場合が多い^{1)~4)}。またカルマンフィルタなどにより状態推定を行うとき、雑音共分散をあらかじめ知ることが不可欠である^{5), 6)}。プロセスのみの同定に限っても、たとえば最小2乗法や最尤法などにおいて見られるように、仮定された雑音過程に誤りがあった場合、真の入出力関係は得られない^{7)~9)}。したがって、雑音過程の同定はプロセスの同定に劣らず重要であるにもかかわらず、これまで雑音過程も含めたシステム同定に関する研究は少ないようである。

プロセスと雑音過程の同時パラメータ推定手法として、拡大最小2乗法や一般化最小2乗法がよく知られており、Åström¹⁰⁾や Box & Jenkins, Young¹¹⁾らも幾つかの方法を提案している。しかし、これらの方法では、プロセスと雑音過程の次数は既知と仮定している。次数決定を含む同定法としては、Van Den Boom & Van Den Enden¹²⁾によって発表されている以外あまり見当たらないようである¹³⁾。この方法は、パラメータ推定法としての拡大最小2乗法¹⁴⁾を次数決定に応用したものである。拡大最小2乗法では、雑音とその励起系列を推定しなければならないため、計算量が多くなることがよく知られている。彼らは、プロセスと雑音過程のそれぞれに対し次数を仮定し、その組合せのおのおのに対し拡大最小2乗法を適用して次数評価のための統計量を計算する方法をとっている¹²⁾。したがって、組合せが多くなるにつれ計算量は増大する。

われわれは、先に、過去の入力を操作変数として nesting property をもつ入力操作変数積率 (IIPM: Input Instrumental Product Moment) 行列より次数評価のための統計量とパラメータを逐次求めるアルゴリズムを導出して、雑音の影響のないプロセス同定法を提案した¹⁵⁾。本論文では、この方法によりプロセ

[†] 第23回自動制御連合講演会で発表 (昭55・11)

* 近畿大学第2工学部 飯塚市柏森 11-6

** 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* The 2nd Faculty of Engineering, Kinki University, Iizuka

** Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received July 27, 1982)

(Revised December 6, 1982)

ス次数を決定し、しかるのちにプロセスパラメータを係数とする雑音の線形結合からなる合成雑音と観測出力の相互共分散を推定し、これより次数評価のための統計量を逐次アルゴリズムで求めて、雑音過程の次数を決定する方法を提案する。雑音過程の次数は、雑音共分散の推定値をもとに決定できるはずであるが、プロセスも同定しなければならない状況のもとで得られる雑音共分散¹⁶⁾の推定値は精度が悪いため、実際に次数決定に適用しても適切な次数を求めることができない。そこでわれわれは、プロセスの同定結果から合成雑音と観測出力との相互共分散¹⁷⁾が精度よく推定されることに着目し、この推定値をもとに次数評価のための統計量を逐次計算して次数を決定する方法を提案する。

ここでは、プロセスと雑音過程の次数を個々に決定しているため、Van Den Boom らの方法のように組合せを考える必要がない。また、プロセスおよび雑音過程の次数評価のための統計量は、それぞれの場合において逐次アルゴリズムにより計算されるので、計算量は少なくすむ。ここで提案した方法は、NS (Noise-to-Signal) 比が 50% 程度になってもデータ数が 1,000 個あれば十分良好な結果が得られることが Monte Carlo シミュレーションにより確かめられた。

2. 問題設定

Fig. 1 に図示される単一入出力線形離散値システムのプロセスと雑音過程を、それぞれつぎのように s 次の差分方程式および n 次の自己回帰移動平均 (AR-MA) 過程で記述する。

$$y_t = \sum_{i=1}^s \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^s \beta_i u_{t-i} \quad (2.1)$$

$$v_t = \sum_{i=1}^n f_i v_{t-i} + \sum_{i=0}^n h_i w_{t-i} \quad (2.2)$$

ここに、 u_t , y_t は時刻 t でのプロセスの入力と出力で、 v_t は雑音である。雑音系列 v_t は u_t と統計的

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - \alpha_1 q^{-1} - \alpha_2 q^{-2} - \cdots - \alpha_s q^{-s} \\ B(q^{-1}) &= \beta_1 q^{-1} + \beta_2 q^{-2} + \cdots + \beta_s q^{-s} \\ F(q^{-1}) &= 1 - f_1 q^{-1} - f_2 q^{-2} - \cdots - f_n q^{-n} \\ H(q^{-1}) &= h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \cdots + h_n q^{-n} \end{aligned}$$

Fig. 1 Block Diagram of the System;

に独立とする。励起系列 w_t は平均値ゼロの白色雑音系列を仮定している。プロセスの出力は雑音に乱されて

$$z_t = y_t + v_t \quad (2.3)$$

と観測される。 z_t を観測出力と呼ぶことにする。

問題は N 個の入力および観測出力の組 (u_t, z_t) から、プロセスの次数 s と雑音過程の次数 n を決定することである。以下での議論の便宜のため、プロセスパラメータを $\varphi = [\alpha_s, \beta_s, \alpha_{s-1}, \beta_{s-1}, \dots, \alpha_1, \beta_1]^T$, 雑音過程の自己回帰 (AR) パラメータを $f = [f_n, f_{n-1}, \dots, f_1]^T$ のようにベクトル表示する。ここに、 T は転置を表わす。

3. プロセス次数

プロセスの次数は、前に報告した方法により決定する。すなわち、nesting property をもつ IIPM 行列をつくり、これをもとに次数評価のための統計量としての操作変数残差 (IR: Instrumental Residuals) を逐次アルゴリズムにより求め、IR を比較してプロセス次数を決定する¹⁵⁾。

m 次のプロセスモデルに対する IIPM 行列は、操作変数としての入力 u_t を $u_t^m = [u_t, u_{t+1}, u_{t-1}, u_{t+2}, \dots, u_{t-m+1}, u_{t+m}]^T (2m \times 1)$ のようにならべたベクトルと入力および観測出力からなるベクトル $x_t^m = [z_{t+1}, u_{t+1}, z_{t+2}, u_{t+2}, \dots, z_{t+m}, u_{t+m}]^T (2m \times 1)$ により $P_m = \sum_{t=1}^N u_t^m x_t^{mT} / N$ としてつくられる。これを

$$P_m = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum u_t z_{t+1} & \sum u_t u_{t+1} & \vdots & \sum u_t z_{t+2} & \sum u_t u_{t+2} & \vdots & \sum u_t z_{t+m} & \sum u_t u_{t+m} \\ \sum u_{t+1} z_{t+1} & \sum u_{t+1}^2 & \vdots & \sum u_{t+1} z_{t+2} & \sum u_{t+1} u_{t+2} & \vdots & \sum u_{t+1} z_{t+m} & \sum u_{t+1} u_{t+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum u_{t-1} z_{t+1} & \sum u_{t-1} u_{t+1} & \vdots & \sum u_{t-1} z_{t+2} & \sum u_{t-1} u_{t+2} & \vdots & \sum u_{t-1} z_{t+m} & \sum u_{t-1} u_{t+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum u_{t-2} z_{t+1} & \sum u_{t-2} u_{t+1} & \vdots & \sum u_{t-2} z_{t+2} & \sum u_{t-2} u_{t+2} & \vdots & \sum u_{t-2} z_{t+m} & \sum u_{t-2} u_{t+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum u_{t-m+1} z_{t+1} & \sum u_{t-m+1} u_{t+1} & \vdots & \sum u_{t-m+1} z_{t+2} & \sum u_{t-m+1} u_{t+2} & \vdots & \sum u_{t-m+1} z_{t+m} & \sum u_{t-m+1} u_{t+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum u_{t+m} z_{t+1} & \sum u_{t+m} u_{t+1} & \vdots & \sum u_{t+m} z_{t+2} & \sum u_{t+m} u_{t+2} & \vdots & \sum u_{t+m} z_{t+m} & \sum u_{t+m}^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

と要素表示してわかるように、IIPM 行列は nesting property をもつ。この nesting property を利用して、初期値を $Q_1^* = (\sum_{i=1}^N u_i z_{i+1}/N)^{-1}$ とする次式で表わされる逐次アルゴリズムを導くことができる。

$$\lambda_m^* = d_m^* - r_m^{*T} Q_m^* c_m^* \quad (3.2)$$

$$Q_m = \begin{bmatrix} Q_m^* & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} + \lambda_m^{*-1} \begin{bmatrix} Q_m^* & c_m^* \\ -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_m^{*T} Q_m^* & -1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\theta_m = Q_m c_{m+1} \quad (3.4)$$

$$\lambda_m = d_{m+1} - r_{m+1}^T \theta_m \quad (3.5)$$

$$Q_{m+1}^* = \begin{bmatrix} Q_m & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} + \lambda_m^{-1} \begin{bmatrix} \theta_m \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{m+1}^T Q_m & -1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ここに、

$$P_m = \begin{bmatrix} P_m^* & c_m^* \\ r_m^{*T} & d_m^* \end{bmatrix} \quad (2m \times 2m) \quad (3.7)$$

$$P_{m+1}^* = \begin{bmatrix} P_m & c_{m+1} \\ r_{m+1}^T & d_{m+1} \end{bmatrix} \quad (2(m+1) \times 2(m+1)) \quad (3.8)$$

で、 r_m^* と c_m^* は $(2m-1)$ 次元ベクトル、 r_{m+1} と c_{m+1} は $(2m+1)$ 次元ベクトル、 d_m^* と d_{m+1} はスカラーである。また、 $Q_m = P_m^{-1}$ 、 $Q_m^* = P_m^{*-1}$ の関係がある。

次数が m 次のモデルを、モデル出力を η_t^m として、

$$\eta_t^m = \sum_{i=1}^m \alpha_i^m \eta_{t-i}^m + \sum_{i=1}^m \beta_i^m u_{t-i} \quad (3.9)$$

と記述し、モデルパラメータを $\varphi_m = [\alpha_m^m, \beta_m^m, \alpha_{m-1}^m, \beta_{m-1}^m, \dots, \alpha_1^m, \beta_1^m]^T$ のようにベクトル表示するとき、

(3.4) の θ_m は φ_m のパラメータ推定値となっている。特に、 $\theta_s[a_s, b_s, a_{s-1}, b_{s-1}, \dots, a_1, b_1]^T$ は φ の操作変数推定値となっており、一致性を満足する¹⁾⁻⁴⁾。さらに、(3.5) の λ_m を要素表示すると、

$$\lambda_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{i-m} \{z_{i+m+1} - [z_{i+1}, u_{i+1}, z_{i+2}, u_{i+2}, \dots, z_{i+m}, u_{i+m}] \theta_m\} \quad (3.10)$$

が得られるが、この式からわかるように、 λ_m は漸近的につぎの性質を満たす。

$$\lambda_m \begin{cases} \neq 0 & m < s \\ = 0 & m \geq s \end{cases} \quad (3.11)$$

したがって、これを IR と呼び、IR の絶対値 $|\lambda_m|$ を統計量として次数を評価した。以上のことからわかるように、IR は次数に関して逐次計算され、パラメータはバイアスのない一致推定量として得られる。また、操作変数のながれをくむアプローチに従ったことからわかるように、プロセス次数は、雑音過程とは独立に決定できる。

4. 雑音過程の次数決定

プロセスが既知、すなわち、雑音 v_i が観測できた場合、雑音過程の次数決定問題は、 v_i を出力

とする確率システムの次数決定問題に帰着される。この場合、データ v_i から自己共分散 $r_v(i) = E[v_i v_{i+i}]$ の推定値 $\hat{r}_v(i)$ を計算し、この自己共分散情報により雑音システムの次数を決定できることがよく知られている¹⁸⁾。ここに、 $E[\cdot]$ は期待値オペレータである。

しかしながら、問題設定で述べたように v_i が観測できない場合、 v_i も推定する必要があるため、この推定値 $\hat{v}_i$ から計算される $\hat{r}_v(i)$ は精度が悪い。このため、雑音自己共分散情報 $\{\hat{r}_v(i)\}$ を利用して雑音過程の次数を決定しようとしても適切な次数は得られない¹⁶⁾。

われわれは、雑音過程の次数決定に必要な雑音情報を得るにあたり、合成雑音を

$$e_i = v_i - \sum_{j=1}^s \alpha_j v_{i-j} \quad (4.1)$$

で定義し、観測出力 z_i と e_i の相互共分散 $r_{ez}(i) = E[e_i z_{i+i}]$ が精度よく推定されることに着目した。この推定値 $\hat{r}_{ez}(i)$ から計算される“雑音モデル共分散残差”(NCR: Noise-Model Covariance Residuals) は真の次数以上の雑音モデルに対して漸的に零となる性質を利用して次数評価のための統計量を構成した。NCR を求めるにあたっては、Hankel 行列の LDU 分解に対する逐次アルゴリズムを次数決定に適用し、これにより NCR を逐次求める

4.1 合成雑音と観測出力の相互共分散

(2.1), (2.3) から雑音 v_i は u_i, z_i と

$$v_i = \sum_{j=1}^s \alpha_j v_{i-j} = z_i - \sum_{j=1}^s (\alpha_j z_{i-j} + \beta_j u_{i-j}) \quad (4.2)$$

のように関係づけられることから、(4.1) で定義される合成雑音 e_i は

$$e_i = z_i - \sum_{j=1}^s (\alpha_j z_{i-j} + \beta_j u_{i-j}) \quad (4.3)$$

とも記述される。 z_i の自己共分散を $r_z(i) = E[z_i z_{i+i}]$ 、 u_i と z_i の相互共分散を $r_{uz}(i) = E[u_i z_{i+i}]$ とするとき、 e_i と z_i の相互共分散 $r_{ez}(i) = E[e_i z_{i+i}]$ は(4.3)より

$$r_{ez}(i) = r_z(i) - \sum_{j=1}^s \{\alpha_j r_z(i+j) + \beta_j r_{uz}(i+j)\} \quad (4.4)$$

と表わされる。したがって、(4.4) において α_j, β_j を(3.4)のプロセスパラメータ推定値 θ_s の a_j, b_j で、また $r_z(i)$ および $r_{uz}(i)$ をそれぞれの推定値

$$\hat{r}_z(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i z_{i+i}, \quad (4.5)$$

$$\hat{r}_{uz}(i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i z_{i+i} \quad (4.6)$$

で置き換えることにより, $r_{ex}(i)$ の推定値 $\hat{r}_{ex}(i)$ が求まる. 雑音共分散はプロセスパラメータの非線形関数で与えられる¹⁶⁾ためその推定精度は悪いが, (4.4) からわかるように $r_{ex}(i)$ はプロセスパラメータの線形関数となっている¹⁷⁾ため, $\hat{r}_{ex}(i)$ は精度よく求められる. このことが, われわれが雑音共分散情報の代りに合成雑音と観測出力の相互共分散情報を用いて雑音過程の次数を決定した理由である.

4.2 雑音モデル共分散残差

はじめに, 前節で定義した $r_{ex}(i)$ により雑音過程の解明の糸口となる関係式を与え, これに準拠して次数評価のために望ましい性質をもつ量 NCR を $r_{ex}(i)$ と AR パラメータで定義する. つぎに, $r_{ex}(i)$ を要素とする行列に nesting property をもたせて Hankel 行列を構成し, これを介して各次数の雑音モデルに対する NCR と AR パラメータを一つの行列関係式にまとめて表現し, Hankel 行列に対する逐次アルゴリズムを次数決定に適用して NCR が逐次求められるようにした. nesting property のみに着目した場合, 3 章で記述した逐次アルゴリズムからも NCR は計算できるが, ここでは nesting property のほかにさらに有用な性質である Hankel 性を考慮することによってより効率的に NCR を求められるようにした.

(4.1) の合成雑音 e_i と (2.2) の雑音過程 v_i はそれぞれ

$$e_i = A(q^{-1})v_i \quad (4.7)$$

$$F(q^{-1})v_i = H(q^{-1})w_i \quad (4.8)$$

とラグオペレータ q^{-1} により表現される. ここに

$$\begin{bmatrix} r_{ex}(-s-k-1) \\ r_{ex}(-s-k-2) \\ \vdots \\ r_{ex}(-s-2k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ex}(-s-k) & r_{ex}(-s-k+1) & \cdots & r_{ex}(-s-1) \\ r_{ex}(-s-k-1) & r_{ex}(-s-k) & \cdots & r_{ex}(-s-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ex}(-s-2k+1) & r_{ex}(-s-2k+2) & \cdots & r_{ex}(-s-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^k \\ f_2^k \\ \vdots \\ f_k^k \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{matrix} r_{ex}(k+1) & R_{ex}(k) & f_k \end{matrix}$$

により規定されるが, $k \leq n$ のとき $R_{ex}(k)$ は正則であるから f_k は一意に定まる. いま, (4.12) を満たす f_k により, $r_{ex}(-s-2k-i)$ ($i=1, 2, \dots$) に対する近似誤差

$$\varepsilon_i^k = r_{ex}(-s-2k-i) - \sum_{j=1}^k f_j^k r_{ex}(-s-2k-i+j) \quad (4.13)$$

を考える. ε_i^k は次数 k を大きくするとそれだけ近似がよくなるため $k < n-1$ に対し $|\varepsilon_i^{k-1}| > |\varepsilon_i^k| > 0$ となり, $k=n$ のとき $\varepsilon_i^k = 0$ となる. また, $k \geq n+1$ の場合, $R_{ex}(k)$ は非正則となるため f_k は一意に求められないが, (4.12) で規定される解空間を $F_k (k \geq n+1)$ と

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 - \sum_{j=1}^s \alpha_j q^{-j}, \quad B(q^{-1}) = \sum_{j=1}^s \beta_j q^{-j}, \quad F(q^{-1}) = 1 \\ &- \sum_{j=1}^n f_j q^{-j} \quad \text{および} \quad H(q^{-1}) = \sum_{j=0}^n h_j q^{-j} \quad \text{である.} \quad (4.8) \end{aligned}$$

の両辺に $A(q^{-1})$ をかけると, (4.7) によって

$$A(q^{-1})F(q^{-1})v_i = F(q^{-1})e_i = A(q^{-1})H(q^{-1})w_i \quad (4.9)$$

となることから e_i と w_i の関係は

$$\begin{aligned} e_i &= f_1 e_{i-1} - \cdots - f_n e_{i-n} \\ &= h_0' w_i + h_1' w_{i-1} + \cdots + h_{s+n}' w_{i-s-n} \end{aligned} \quad (4.10)$$

と記述できる. ここに $\sum_{j=0}^{s+n} h_j' q^{-j} = A(q^{-1})H(q^{-1})$. w_i は白色雑音という仮定より (4.2) あるいは (4.8) は v_{i-i} が $w_{i-i+1}, w_{i-i+2}, \dots$ と無相関になることを意味する. したがって, $v_{i-i} (i \geq s+n+1)$ は (4.10) の $w_{i-s-n}, w_{i-s-n+1}, \dots, w_{i-1}, w_i$ と無相関となる. この事実と y_i と w_i は無相関ということ considering $z_{i-i} (i \geq s+n+1)$ を (4.10) の両辺にかけて期待値をとると $r_{ex}(i)$ に関してつぎの関係式を得る.

$$r_{ex}(-i) = \sum_{j=1}^n f_j r_{ex}(-i+j) \quad i \geq s+n+1 \quad (4.11)$$

これは雑音過程の AR パラメータを係数とする線形表現であることから, $\{r_{ex}(-i)\} (i \geq s+n+1)$ は n 次元線形空間を張ることがわかる. このことは以下の議論で重要となる.

つぎに, 次数評価のための統計量を (4.11) に準拠して導くため, 雑音過程に対し ARMA モデルを考えそのモデルの AR パラメータを $f_k = [f_1^k, f_2^k, \dots, f_k^k]^T$ とする. このとき, f_k は k 個の方程式

するとき, $f_k \in F_k$ なる f_k が得られれば, $k \geq n+1$ に対しても $\varepsilon_i^k = 0$ となる. すなわち, $\{r_{ex}(-i)\} (i \geq s+n+1)$ は n 次元線形空間であるから, $i \geq 1$ に対して

$$\begin{cases} |\varepsilon_i^{k-1}| > |\varepsilon_i^k| > 0 & k < n-1 \\ \varepsilon_i^k = \varepsilon_i^{k+1} = 0 & k \geq n \end{cases} \quad (4.14)$$

が成立し, 次数を評価するのに有用な性質であることがわかる. したがって, ε_i^k を k 次の雑音モデルに対する雑音モデル共分散残差 (NCR) と呼び, NCR $\{\varepsilon_i^k\} (k \geq 0, i \geq 1)$ を雑音過程の次数決定に利用する.

(4.12) の $R_{ex}(k)$ は nesting property をもたないが, (4.12) を書き改めて

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} R(1) & R(2) & R(3) & & \\ r_{ez}(-s-k-1) & r_{ez}(-s-k-2) & r_{ez}(-s-k-3) & \cdots & r_{ez}(-s-k) \\ r_{ez}(-s-k-2) & r_{ez}(-s-k-3) & r_{ez}(-s-k-4) & \cdots & r_{ez}(-s-k-1) \\ r_{ez}(-s-k-3) & r_{ez}(-s-k-4) & r_{ez}(-s-k-5) & \cdots & r_{ez}(-s-k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{ez}(-s-2k) & r_{ez}(-s-k) & r_{ez}(-s-k-1) & r_{ez}(-s-k-2) & \cdots & r_{ez}(-s-2k+1) \end{matrix} = \begin{matrix} R(k) & \\ & \end{matrix} \begin{matrix} f_k^k \\ f_{k-1}^k \\ f_{k-2}^k \\ \vdots \\ f_1^k \end{matrix} \quad (4.15) \\
 & \begin{matrix} r_{ez}(k+1) & R(k) & \bar{f}_k \end{matrix}
 \end{aligned}$$

と記述される $R(k)$ は nesting property をもつ。

(4.15) の k 個の方程式と (4.13) のうち i 番目までの方程式をまとめて nesting property を失わないように表現することにより、

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_{k+1} \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_k & r_{k+1} & \cdots & r_{2k} \\ r_{k+1} & r_{k+2} & \cdots & r_{2k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k+i} & r_{k+i+1} & \cdots & r_{2k+i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_k^k \\ -f_{k-1}^k \\ \vdots \\ -f_1^k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon_1^k \\ \vdots \\ \varepsilon_i^k \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

を k 次の雑音モデルに対して得る。ここに $r_i = r_{ez}(-s-i)$ 。転置をとることにより (4.16) は

$$\begin{aligned}
 & [-f_k^k, -f_{k-1}^k, \dots, -f_1^k, 1] \\
 & \times \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_k & r_{k+1} & \cdots & r_{k+i} \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_{k+1} & r_{k+2} & \cdots & r_{k+i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k+1} & r_{k+2} & \cdots & r_{2k} & r_{2k+1} & \cdots & r_{2k+i} \end{bmatrix} \\
 & = [0, 0, \dots, 0, \varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_i^k] \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

となる。検定の対象となる雑音モデルの最大次数を k 次とすると、 $k=0, 1, 2, \dots, K$ 次の雑音モデルに対しても (4.17) と同様な関係式を得るが、これらは nesting property を利用してつぎのような一つの行列関係式にまとめられる。

$$C_K R_K = E_K \quad (4.18)$$

ここに、

$$C_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{K1} & c_{K2} & \cdots & c_{K,K-1} & 1 & 0 \\ c_{K+1,1} & c_{K+1,2} & \cdots & c_{K+1,K-1} & c_{K+1,K} & 1 \end{bmatrix} \quad (K+1 \times K+1), \quad (4.19)$$

$$R_K = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_K & r_{K+1} \\ r_2 & r_3 & r_4 & \cdots & r_{K+1} & r_{K+2} \\ r_3 & r_4 & r_5 & \cdots & r_{K+2} & r_{K+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_K & r_{K+1} & r_{K+2} & \cdots & r_{2K-1} & r_{2K} \\ r_{K+1} & r_{K+2} & r_{K+3} & \cdots & r_{2K} & r_{2K+1} \end{bmatrix} \quad (K+1 \times K+1), \quad (4.20)$$

$$E_K = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \cdots & \varepsilon_{1K} & \varepsilon_{1,K+1} \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \cdots & \varepsilon_{2K} & \varepsilon_{2,K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \varepsilon_{K+1,K+1} \end{bmatrix} \quad (K+1 \times K+1) \quad (4.21)$$

で $\varepsilon_{k+1,k+i} = \varepsilon_i^k$, $c_{k+1,k-i+1} = -f_i^k$ としてある。

(4.18) に着目すると、 R_K は nesting property のみならず Hankel 性も有しており、 C_K は下三角行列、 E_K は上三角行列となっていることから、(4.18) は Hankel 行列の LU 分解とも解釈できる。Ris-sanen¹⁹⁾ は Hankel 行列の LDU 分解に対し逐次アルゴリズムを提案しているが、われわれはこの逐次アルゴリズムを利用して NCR を求める。逐次アルゴリズムはつぎのように記述される。

$$\varepsilon_{1,2k+j} = r_{2k+j} \quad j=0, 1 \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i-1,j+1} + s_{i-1} \varepsilon_{i-1,j} + t_{i-2} \varepsilon_{i-2,j}$$

$$\begin{matrix} (i=2, 3, \dots, k \\ j=2k-i+1, 2k-i+2) \end{matrix} \quad (4.23)$$

$$t_{k-1} = -\varepsilon_{kk} / \varepsilon_{k-1,k-1} \quad (k \geq 2) \quad (4.24)$$

$$s_k = -(\varepsilon_{k-1,k} + \varepsilon_{k,k+1}) / \varepsilon_{kk} \quad (k \geq 1) \quad (4.25)$$

$$\varepsilon_{k+1,k+1} = \varepsilon_{k,k+2} + s_k \varepsilon_{k,k+1} + t_{k-1} \varepsilon_{k-1,k+1} \quad (4.26)$$

$$c_{k+1,j} = c_{k,j-1} + s_k c_{k,j} + t_{k-1} c_{k-1,j} \quad (j=1, 2, \dots, k-1) \quad (4.27)$$

ここに $c_{ii}=1$, $c_{ij}=0$ ($i < j, j=0$), $\varepsilon_{ij}=0$ ($i > j$), $t_0=s_0=0$ である。このアルゴリズムにおいて、 $k=0, 1, 2, \dots$ と計算していくと、 k 次の雑音モデルに対する NCR と AR パラメータ $\{f_j^k\} (= -c_{k+1,k-j+1})$ ($j=1, 2, \dots, k$) が逐次得られることがわかる。NCR については、 $k=0$ のとき $\{\varepsilon_{11}\}$, $k=1$ のとき $\{\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}\}$, $k=2$ のとき $\{\varepsilon_{14}, \varepsilon_{15}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{24}, \varepsilon_{33}\}$ のようにもまとめるので、次節ではこのことを利用して次数評価のための統計量を構成する。

4.4 次数評価のための統計量

(4.22) から (4.27) の逐次アルゴリズムにおいて r_i ($=r_{ez}(-s-i)$) の代りに 4 章 1 節で与えられた推定値 $\hat{r}_{ez}(-s-i)$ を用いて計算すると、 k 次の雑音モデル

に対して, NCR $\{\hat{\varepsilon}_{k+1, k+i}\}$ と AR パラメータ $\{f_i (= -c_{k+1, k-j+1})\}$ を得るが, ここでは NCR に基づく次次評価のための統計量について述べる. 検定の対象となるモデルの最大次数は k 次とする.

(4.14) の性質に注目して直ちに考えられる統計量として, NCR の絶対値がある. これを SNCR (Singel NCR) と呼び, k 次のモデルに対して

$$\text{SNCR}(k) = |\hat{\varepsilon}_{k+1, K+1}| \quad k=0, 1, \dots, K \quad (4.28)$$

と定義されるものを次次評価の一つとして用いる. さらに逐次アルゴリズムから k 次のモデルに対し $\hat{\varepsilon}_{k+1, k+1}, \hat{\varepsilon}_{k+1, k+2}, \dots, \hat{\varepsilon}_{k+1, 2K-2k+1}$ の $(2K-2k+1)$ 個の NCR が同時に得られることを考慮して, NCR の 2 乗平均 (Mean squares of NCR)

$$\text{MNCR}(k) = \frac{1}{2K-2k+1} \sum_{j=k+1}^{2K-2k+1} \hat{\varepsilon}_{k+1, j}^2 \quad k=0, 1, \dots, K \quad (4.29)$$

をもう一つの統計量として用いる.

これまで NCR を近似誤差としてみてきたが, (4.12) を $\{f_i\}$ について解き (4.13) に代入することにより

$$\varepsilon_{k+1, k+i} = \frac{1}{\det R_{k-1}} \det \begin{bmatrix} & & & r_{k+1} \\ & & & r_{k+2} \\ & & & \vdots \\ & & & r_{2k} \\ r_{k+i}, & r_{k+i+1}, & \dots, & r_{2k+i-1}, & r_{2k+i} \end{bmatrix} \quad k \geq 1 \quad (4.30)$$

のように NCR は行列式比で記述されることがわかる. (4.30) は $k=1, 2, \dots$ に対し定義され, $k=0$ に対しては定義されないことに注意されたい. また, (4.30) で $i=1$ としたときの $\varepsilon_{k+1, k+1} = \det R_k / \det R_{k-1}$ は積率行列に基づいて次数を決定するさいによく知られている行列式比である^{20)~22)}.

5. シミュレーション

プロセス次数 s が雑音過程次数 n より大きく, 雑音 v_i が ARMA 過程, すなわち,

(A) $s=4, n=2$ で

$$y_i = y_{i-1} - 0.18y_{i-2} + 0.784y_{i-3} - 0.656y_{i-4} + 0.115u_{i-1} + 0.115u_{i-3} \quad (5.1)$$

$$v_i = 1.5v_{i-1} - 0.7v_{i-2} + w_i + w_{i-1} + 0.5w_{i-2} \quad (5.2)$$

$$u_i = 0.5u_{i-1} + x_{i-1} \quad (5.3)$$

の場合と, $s < n$ で, v_i は AR 過程, すなわち,

Fig. 2 Noise-Model Covariance Residuals MNCR and SNCR ($n=2$)

Fig. 3 Noise-Model Covariance Residuals MNCR and SNCR ($n=3$)

(B) $s=2, n=3$ で

$$y_i = 1.5y_{i-1} - 0.7y_{i-2} + u_{i-1} + 0.5u_{i-2} \quad (5.4)$$

$$v_i = 2.0v_{i-1} - 1.45v_{i-2} + 0.35v_{i-3} + w_i \quad (5.5)$$

の場合についてモンテカルロシミュレーションを行った. これらの例題は前に発表したものと同じである¹⁵⁾. w_i, x_i および u_i は平均値ゼロの正規乱数とし, u_i の分散が $\sigma_u^2=1$ となるようにした. 入力 u_i と観測出力 z_i のデータ個数は, $N=1,000$ とした. プロセス次数は $\text{IR}|\lambda_m|(m=0, 1, 2, \dots)$ により決定した.

雑音過程の次次評価のための統計量 SNCR, MNCR について, 例題 (A), (B) に対し乱数をかえて 20 回の試行を行ったが, ほとんど相異なる結果が得られたのでその例を Fig. 2 と Fig. 3 に示す. $\rho (= \sigma_v / \sigma_u)$ は NS (Noise-to-Signal) 比で, σ_v と σ_u はそれぞれ v_i と y_i の標準偏差である. 雑音モデルとしては次数が 6 次までのものを考えた.

Fig. 2 からわかるように, 統計量 SNCR, MNCR は $k \leq n$ で単調に減少したのち, $k=n+1$ で増加し, $k > n+1$ では不規則な動きを呈している. $k \leq n$ の場合, $\hat{R}_{\varepsilon}(k)$ は正則であり f_k は一意に得られ $|\hat{\varepsilon}_{k+1}|$

$>|\hat{\varepsilon}_k|$ となることから, SNCR, MNCR は (4.14) と同じように単調減少するが, $k \geq n+1$ の場合 (4.14) の性質にそぐわない. このことは, 数値計算上つぎのように説明される. すなわち, $k \geq n+1$ のとき, 有限個のデータにより推定される $\hat{R}_{xx}(k)$ は推定誤差も含む数値誤差のため非正則とはならないが, 数値誤差に対し敏感な条件数の大きい行列となる. したがって, 逐次アルゴリズムは $k \geq n+1$ でも発散することなく続行するが, $f_k \in F_k$ となり (4.13) での近似が悪くなるため, $\hat{\varepsilon}_k$ はもはや (4.14) の性質をもたず $\hat{\varepsilon}_k = \hat{\varepsilon}_k^{*1}(k \geq n)$ が保証されない. また, 行列式比の観点からつぎのように説明される. すなわち, (4.30)において, $k < n$ のとき分子・分母ともに 0 でないことから $|\hat{\varepsilon}_k| > 0$, $k = n$ のとき分母 $\neq 0$ で分子はほぼ 0 となり $|\hat{\varepsilon}_k| \approx 0$ となる. $k \geq n+1$ に対しては, 分子・分母ともほぼ 0 になるため $|\hat{\varepsilon}_k|$ は不定となる. すなわち, $\hat{R}_{xx}(k)$ は $k \geq n+1$ のとき条件数の大きい行列となるため, $\hat{\varepsilon}_k$ は 0 以外の値をとる. 以上のことから, 数値計算上は

$$\begin{cases} \text{SNCR}(k-1) > \text{SNCR}(k) & k \leq n \\ \text{SNCR}(k) < \text{SNCR}(k+1) & k = n \end{cases} \quad (5.6)$$

あるいは

$$\begin{cases} \text{MNCR}(k-1) > \text{MNCR}(k) & k \leq n \\ \text{MNCR}(k) < \text{MNCR}(k+1) & k = n \end{cases} \quad (5.7)$$

に基づいて次数を決定すればよい. すなわち, 統計量 SNCR, MNCR が単調に減少したのち増加する次数を雑音過程の真の次数とすればよい.

$N=1,000$ とデータ数が少ない場合, Fig. 3 にみられるように 1 個の NCR を統計量とした SNCR から真の次数が得られないことがあるが, NCR の 2 乗平均からなる MNCR によれば Fig. 2 および Fig. 3 のように真の次数が得られる. また他のいくつかの例についても検討したが, 同様な傾向がみられるので, SNCR に較べて MNCR はデータが少ない場合でも有効かつ頑強であるように思われる.

6. あとがき

IIPM 行列によりプロセス次数を決定し, しかるのちに合成雑音と観測出力の相互共分散により雑音過程の次数を決定する方法を提案した. それぞれの場合において, 次数評価のための統計量は逐次アルゴリズムにより効率よく求められる.

雑音過程の次数は雑音共分散情報により決定できるはずであるが, 雑音共分散はプロセスパラメータの非線形関数となるため, プロセス同定も必要な状況で得られる雑音共分散の推定値は精度が悪い. そこでわれ

われは, 合成雑音と観測出力の相互共分散がプロセスパラメータの線形関数で表われ精度よく推定されることに着目し, この推定値から NCR を逐次計算して得られる統計量 SNCR・MNCR により次数を決定した. シミュレーションにより SNCR・MNCR の有効性を調べた結果, MNCR はデータが少ない場合でも有効であるように思われる.

通常次数決定はパラメータ推定の前処理として比較的少数のデータで行われるので, 本方法の副産物として得られるプロセスパラメータや AR パラメータの推定値は, 次数を既知としてパラメータを推定するさいの初期値として有効に利用できるであろう.

参考文献

- 1) K. J. Åström and P. Eykhoff: System Identification-A Survey, *Automatica* **7**, 123/162 (1971)
- 2) G. E. P. Box and G. M. Jenkins: Time Series Analysis, Forecasting Control, 386, Holden-Day (1976)
- 3) P. Eykhoff: System Identification, 197, John Wiley & Sons, Inc. (1974)
- 4) H. Theil: Principles of Econometrics, 193, John Wiley & Sons, Inc. (1979)
- 5) R. E. Kalman: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. ASME*, **82**-sir. D, 35/43 (1960)
- 6) R. E. Mehra: On the Identification of Variance and Adaptive Kalman Filtering, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-15**-2, 175/184 (1970)
- 7) S. Sagara, K. Wada and H. Gotanda: On Asymptotic Bias of Linear Least Squares Estimator, 5th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, Darmstadt, 307/313 (1979)
- 8) L. G. Godfrey: Testing against General Autoregressive and Moving Average Error Models When the Regressors Include Lagged Dependent Variables, *Econometrica*, **46**-6, 1293/1301 (1978)
- 9) A. C. Harvey and G. D. A. Phillips: Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with Autoregressive-Moving Average Disturbances, *Biometrika*, **66**-1, 49/58 (1979)
- 10) K. J. Åström: On the Achievable Accuracy in Identification Problems, *Proc. IFAC Symp. Identification in Autom. Control Systems*, Prague, Paper 1, 8 (1967)
- 11) P. Young and A. Jakeman: Refined Instrumental Variable Methods of Recursive Time-Series Analysis, *International J. of Control*, **29**-1, 1/30 (1979)
- 12) A. J. W. van den Boom and A. W. H. van den Enden: The Determination of the Orders of Process and Noise Dynamics, *Automatica*, **10**, 245/256 (1970)
- 13) 相良節夫, 秋月影雄, 中溝高好, 片山 徹: システム同定, 168, 計測自動制御学会 (1980)
- 14) J. L. Talmon and A. J. N. van den Boom: On the Estimation of Process and Noise Dynamics Using a Single-Stage Estimation, 3rd IFAC Symp. on Identification, Hague/Delft, 711/720 (1973)

- 15) S. Sagara, H. Gotanda, K. Wada: Dimensionally Recursive Order Determination of Linear Discrete System, *International J. of Control*, **35-4**, 637/651 (1982)
 - 16) 相良節夫, 五反田博, 和田 清: 線形離散系および雑音プロセスの次数決定, 第 23 回自動制御連合講演会前刷, 169/170 (1980)
 - 17) 相良節夫, 五反田博, 和田 清: 雑音プロセスの次数決定, 昭和 56 年電気学会全国大会講演論文集, **14**, 1740/1741 (1981)
 - 18) J. C. Chow: On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-17-5**, 707/709 (1972)
 - 19) J. Rissanen: Algorithm for Triangular Decomposition of Block Hankel and Toeplitz Matrices with Application to Factoring Positive Matrix Polynomials, *Mathematics of Computation*, **27-121**, 147/154 (1973)
 - 20) C. M. Woodside: Estimation of the Order of Linear Systems, *Automatica*, **7**, 727/732 (1971)
 - 21) P. E. Wellstead: An Instrumental Product Moment Test for Model Order Estimation, *Automatica*, **14**, 89/91 (1978)
 - 22) H. Unbehauen and Göhring: Tests for Determining Model Order in Parameter Estimation, *Automatica*, **10**, 233/244 (1974)
-