ハイゲインフィードバックレギュレータの設計[†]

安 藤 嘉 則^{*}・鈴 木 正 之^{*}

A Design of High-Gain Feedback Regulators

Yoshinori ANDO^{*} and Masayuki SUZUKI^{*}

It has been known that the high-gain feedback is very effective to reduce the parameter sensitivity, the effect of disturbances and so on. But the analyses of high-gain feedback systems are numerically stiff because of different magnitudes of their coefficients. In this study we remove this stiffness with singular perturbation method.

We consider regulators with high-gain feedback. In general it is not clear that we can get a highly accurate regulator when a scalar gain tends to infinity. Moreover the systems are sometimes unstable and even if the systems are stable, the responses often have remarkable peaks. Thus it is important to decide a class of systems such that a high-gain feedback is permitted.

First we show the conditions of gain matrices under which the regulator is stable and has arbitrary accuracy. Next we get a class of systems for which we can design the highly accurate regulator. Such systems are following:

- i) A dimension of input is greater than or equals to that of output.
- ii) They have minimum phase.
- iii) CB has full rank.

In addition authors present the procedure to design a highly accurate regulator by showing the algorithm for HRP (High-gain Regulator Problem) and demonstrate it for an example.

Keyword: high-gain feedback, singular perturbation, regulator, fast and slow modes

1. 序 論

フィードバックによって制御システムにおける種々

の特性を改善することが可能である。そこから起きる自然な発想としてフィードバック量を大きくすることによって改善の度合いがさらに大きくなるだろうと考えられる。従来の1入力1出力システムに対しては、安定なハイゲインフィードバックシステムはパラメータ感度が小さいとか外乱に対してその影響を減少させるなどという非常に良好な特性をもっていることが知られている^{1)~4)}。しかし、実際のシステムにおいてはゲインを大きくしていくとシステムはしばしば不安定になる。また安定であっても過大な行き過ぎ量をもつなどという好ましくない現象が起ることがある¹⁶⁾。したがって、ハイゲインフィードバックによって優れた特性をもたせることが可能なシステムとはどのようなシステムであるかを決めることは重要である^{5)~7)}。

本研究では次式で表わされるシステムについて考察する。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1a)$$

$$y = Cx \quad (1b)$$

ここで、 x は n 次元状態ベクトル、 u は r 次元操作量ベクトル、 y は m 次元出力ベクトルであり、 A , B , C は適当なサイズの定数行列である。ここでシステム(1)に対してハイゲインフィードバック

$$u = gKx \quad g: \text{十分大きな正数} \quad (2)$$

を用いることによって高性能のレギュレータを構成することを考える。一般性を失うことなく

$$r \leq n, \text{ rank } B = r \quad (3)$$

$$m \leq n, \text{ rank } C = m \quad (4)$$

と仮定できる。そしてレギュレータの性能を評価する指標として

$$J = \int_0^{\infty} y^T y dt \quad (5)$$

を考える。 g を十分大きくしたときに、システムが漸近安定でかつ J が十分小さくなるように K を決定すること、またそのような K が存在するシステムのクラスを決めることが本研究の目的である。

本研究で扱っている問題と類似した問題として最適

[†] 第3回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭56・1)

^{*} 名古屋大学工学部 名古屋千種区不老町

^{*} Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received November 17, 1982)

(Revised February 16, 1983)

レギュレータ問題におけるチープコントロール問題がある。この問題ではシステム(1)に対して

$$I = \int_0^\infty (y^T Q y + \varepsilon^2 u^T R u) dt \quad (6)$$

という評価関数を考える。ここで ε は小さな正のパラメータである。最適解を与えるフィードバックは

$$u = \frac{1}{\varepsilon} F_\varepsilon x \quad (7)$$

と得られるが、 ε が小さいので結果としてハイゲインフィードバックとなる。入力として(7)を用いたときに評価関数は最小値 $I_{\min}$ をとるが $\varepsilon \rightarrow 0$ で $I_{\min} \rightarrow 0$ となるかは明らかでない。Francis⁸⁾ や木村・藤井⁹⁾ はこの問題に対する必要十分条件を明らかにした。木村¹⁰⁾ は極配置という面から、システムが有限なピークをもち出力の2乗積分が漸近的に0となるいわゆる完全レギュレータが構成されるための必要十分条件を得ており、レギュレータシステムの設計に対して一つの指針を与えている。これらの研究においては最適レギュレータや極配置による設計の結果としてハイゲインフィードバックシステムを考察している。これに対して本研究では、ハイゲインフィードバックを最初に(2)の形で与え、このシステムの性質を調べている。この点が Francis 等や木村との基本的な差異である。著者等は(2)のような1パラメータのハイゲインフィードバックは構成が最も自然であり工学的に実現が容易であることから、より実際的であると考えた。

一方、Willems¹¹⁾ は Almost Invariant Subspace という概念を導入して類似した問題を考察しているが、この幾何学的方法は優れた解析法を与えるが設計手法という点ではやや難点があるように思われる。

一般にハイゲインフィードバックシステムでは行列の要素の間に大きな差があるために行列の固有値の大きさに大きな差が現れいわゆるスティフなシステムになる。Young 等¹²⁾ は出力をハイゲインで直接フィードバックしたシステムの挙動を特異摂動法を用いて解析している。本研究では Young 等の方法に従ってハイゲインフィードバックシステムを特異摂動法を用いて速いモードと遅いモードをもつ二つのサブシステムに分割し、それぞれのサブシステムに対して設計することにより、全体のハイゲインフィードバックシステムの設計を行う。この方法の利点は、(i) サブシステムの次数は全体のシステムの次数より小さいので設計が容易である、(ii) 係数の大きさに差があるシステムで数値計算を行う際に生ずるスティフネスという数値解析上の困難を回避できる、ことなどである。

2章では問題を定義し、3章ではシステムを二つの

サブシステムに分割して挙動を明らかにしている。ここでの問題の解が満たすべき条件を4章で示し、解が存在するシステムのクラスを5章で求めている。さらに6章でアルゴリズムを示し、それによって例題を解いている。

2. ハイゲインレギュレータ問題

システム(1)に対してハイゲインフィードバック(2)を用いることによって、安定でかつ評価関数 J が $g \rightarrow \infty$ のときに0へ漸近していく K を決定すること、ならびにそのような K が存在するシステムを決定することが本研究の目的である。以下の考察において K はつぎの集合 $\mathcal{K}$ から選ぶことにする。

$$\mathcal{K} = \{K | \text{rank } KB = r\}$$

このような $\mathcal{K}$ から K を選ぶということは r 個の入力をすべて有効に用いることを意味している。 $\mathcal{K}$ の要素でない K を用いた場合については付録を参照されたい。

つぎにハイゲインレギュレータ問題 (HRP) を以下のように定める。

【定義】 つぎの(i), (ii)を満たす $K \in \mathcal{K}$ が存在するときにハイゲインレギュレータ問題 (HRP) は可解であるという。

- (i) ある正数 g^* が存在し、 g^* より大きいすべての g に対して $A + gBK$ は漸近安定
- (ii) 任意の初期状態に対して $\lim_{g \rightarrow \infty} J = 0$

またこのとき K を HRP の解と呼ぶ。

3. システムの分割

システム(1)にハイゲインフィードバック(2)を適用して、両辺に $\mu (\triangleq 1/g)$ を乗ずる。

$$\mu \dot{x} = (\mu A + BK)x \quad (8)$$

ここで一般に BK は正則でないので(8)に直接特異摂動法を用いることはできない。そこで変換

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Mx, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n-r \\ r \end{matrix}$$

を行う。ここで M は

$$MB = \begin{bmatrix} O \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} n-r \\ r \end{matrix} \quad (9)$$

を満たす基本行変換行列の積である。(3)より B_2 は正則である。ここで

$$MAM^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$CM^{-1} = [C_1 \quad C_2]$$

$$KM^{-1} = [K_1 \quad K_2]$$

と置く。このとき(8)は

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (10a)$$

$$\mu\dot{x}_2 = (\mu A_{21} + B_2K_1)x_1 + (\mu A_{22} + B_2K_2)x_2 \quad (10b)$$

となる。\$K\$ は \$\mathcal{K}\$ に属しており、\$KB=B_2K_2\$ であるので \$K_2\$ は正則である。このとき \$\mu \rightarrow 0\$ で \$\mu A_{22} + B_2K_2\$ は正則な \$B_2K_2\$ に収束する。よって、(10) に特異摂動法を用いることができるが、さらに挙動を明らかにするために

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

と再度変換する。このとき (10) より

$$\dot{z}_1 = F_{11}z_1 + F_{12}z_2 \quad (12a)$$

$$\mu\dot{z}_2 = \mu F_{21}z_1 + (\mu F_{22} + K_2B_2)z_2 \quad (12b)$$

を得る。ここで

$$F_{11} = A_{11} - A_{12}K_2^{-1}K_1$$

$$F_{12} = A_{12}K_2^{-1}$$

$$F_{21} = K_1A_{11} - K_2A_{21} - F_{22}K_1$$

$$F_{22} = (K_1A_{12} + K_2A_{22})K_2^{-1}$$

である。(12) に特異摂動法を適用する。遅いサブシステムを得るために \$\mu=0\$ と置いて退化システム

$$\dot{z}_1 = F_{11}z_1 \quad (13)$$

を得る。また境界層システムは

$$\mu\dot{z}_2 = K_2B_2z_2 \quad (14)$$

となる。この二つのサブシステム (13), (14) の解を用いて元来のシステムの解は

$$z_1(t) = e^{F_{11}t}z_1(0) + O(\mu) \quad (15a)$$

$$z_2(t) = e^{gK_2B_2t}z_2(0) + O(\mu) \quad (15b)$$

と表わすことができる。

さて、2 度の変換後の状態と最初の状態の間には

$$x = Nz_1 + B(KB)^{-1}z_2 \quad (16)$$

なる関係がある。ここで

$$N = S_1 - S_2K_2^{-1}K_1$$

$$M^{-1} = [S_1 \ S_2]$$

であるが、簡単な計算によって

$$KN = 0$$

が示される。よって (16) の右辺第 1 項は \$\text{Ker } K\$ の元となり、また第 2 項が \$\text{range } B\$ の元であることも簡単に示される。結局 (8) の解は

$$x = Ne^{F_{11}t}z_1(0) + B(KB)^{-1}e^{gK_2B_2t}z_2(0) + O(\mu) \quad (17)$$

と表わすことができる。

4. HRP の解

特異摂動システム (12) においてある正数 \$\mu^*\$ が存在してすべての \$\mu \in (0, \mu^*)\$ (ある正数 \$g^*\$ が存在してすべての \$g \geq g^*\$) に対してシステムが安定であるためには、二つのサブシステム (13) と (14) が共に安定である

ことが必要十分である¹⁴⁾。\$B_2\$ は正則であるので \$K_2\$ を適当に選んで \$B_2K_2\$ を安定にできる。つまり、\$K\$ を \$\mathcal{K}\$ から選らぶとすれば境界層システム (速いサブシステム) を常に安定にすることができる。

$$\text{rank}[sI - A \ B] = \text{rank}[sI - A_{11} \ A_{12}] + r \quad (18)$$

という関係が成り立つことより、\$(A, B)\$ が可安定であることと \$(A_{11}, A_{12})\$ が可安定であることは等価となる。\$(A, B)\$ が可安定であるとする、\$A_{11} - A_{12}\bar{K}_1 (= \bar{F}_{11})\$ が安定となるように \$\bar{K}_1\$ を決めることができる。このとき \$K_1 = K_2\bar{K}_1\$ と置けば、\$F_{11} = \bar{F}_{11}\$ となり退化システムも安定となる。以上より、\$(A, B)\$ が可安定であればハイゲインフィードバック (2) を用いてシステムを安定にできることがわかる。

出力に遅いモードが現れていると仮定すると、このモードは \$g\$ が大きくなっても変動の速さに大きな変化がないので、高性能の達成は不可能と思われる。つぎの補題はこれを明らかにしている。

[補題 1] \$(A, B)\$ は可安定であるとする。\$K\$ を \$B_2K_2\$、\$F_{11}\$ が安定となるように選んだとき、この \$K\$ が HRP の解であるための必要十分条件は

$$\text{Ker } K \subset \text{Ker } C \quad (19)$$

が成り立つことである。

(証明) (19) が成り立てば

$$CN = 0$$

が成立するので、出力は (17) より

$$y = CB(KB)^{-1}e^{gK_2B_2t}z_2(0) + O(\mu) \quad (20)$$

となる。ここで \$KB\$ は安定であるので、ある正の定数 \$\sigma\$ が存在して任意の \$t \geq 0\$ に対して

$$\|e^{KBt}\| \leq \sigma$$

が成立し、さらに

$$\|e^{KBt}\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となるので、任意の \$t > 0\$ に対して

$$\|e^{gKBt}\| \rightarrow 0 \quad (g \rightarrow \infty)$$

となる。これより、任意の \$t > 0\$ に対して

$$\|y(t)\| \rightarrow 0 \quad (g \rightarrow \infty)$$

が成立する。また \$\|y\|\$ は有界であるので \$g \rightarrow \infty\$ のとき \$J \rightarrow 0\$ となる。

つぎに (19) が成り立たないとする。上と同様にして任意の \$t > 0\$ に対して

$$y(t) \rightarrow CNe^{F_{11}t}z_1(0) \quad (g \rightarrow \infty)$$

となる。このとき

$$CNe^{F_{11}t}z_1(0) \equiv 0$$

が成立しない \$z_1(0)\$ が存在する。この \$z_1(0)\$ に対して

$$\|y\| \rightarrow 0 \quad (g \rightarrow 0)$$

は成立しない。よって、\$J \rightarrow 0 (g \rightarrow \infty)\$ となるためには (19) は必要となる。\$K\$ が HRP の解であれば (19) は

成立している。

この補題により、任意の初期状態 $x(0)$ に対して高性能なレギュレータでは出力には速いモードだけが現れていなければならないことがわかる。

5. HRP の解の存在

HRP の解の満たすべき条件は明らかになった。つぎにどのようなシステムに対して HRP が可解であるかを明らかにする必要がある。まずつぎの補題を示す。

【補題 2】 $\text{Ker } K \subset \text{Ker } C$ を満たす $K \in \mathcal{K}$ が存在するための必要十分条件は、 $m \leq r$ ならびに $\text{rank } CB = m$ が成立することである。

(証明) 必要性: $\text{Ker } K \subset \text{Ker } C$ を満たす $K \in \mathcal{K}$ が存在するとする。このとき、 $\text{rank } K = r$ は明らかであり、 $m \leq r$ は成り立つ。さらに、最大階数をもつ $m \times r$ 行列 Q を用いて

$$C = QK \quad (21)$$

と書くことができる。よって

$$CB = QKB$$

となり、両辺の階数を比較して $\text{rank } CB = m$ が成立する。

十分性: $m \leq r$ かつ $\text{rank } CB = m$ が成り立つとする。このとき明らかに

$$\text{rank } C_2 = m$$

である。よって、ある $r \times (r-m)$ 行列 C_4 が存在して、 $\begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix}$ は正則となる。このとき正則行列 P を用いて

$$K_2 = P \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

において、 P を適当に選ぶことによって K_2 を任意の正則行列にできる。さらに $(n-r) \times (r-m)$ 行列 C_3 を任意に選び

$$K_1 = P \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

とすれば、 $P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ として

$$[C_1 \ C_2] = Q_1 [K_1 \ K_2]$$

つまり

$$C = Q_1 K$$

が成り立つ。これより

$$\text{Ker } K \subset \text{Ker } C$$

が導かれる。上での K_2 の決め方より、 K は $\mathcal{K}$ の元となる。■

この補題で高性能の達成には、出力の次元が入力の次元以下でありかつ CB が最大階数をもたなければ

ならないことが明らかになった。補題における十分性の証明の中で適当に C_3 を選んで F_{11} が安定になればよい。 K_1 を決めるにあたって、 $m=r$ と $m < r$ の二つの場合に分けて考える。それに先だって、つぎのような $G(s)$ を導入する。

$$G(s) = \begin{pmatrix} sI - A & B \\ C & O \end{pmatrix}$$

この $G(s)$ は Rosenbrock¹⁴⁾ のシステム行列と同じものである。

まず $m=r$ の場合を考える。また CB は正則とする。このとき C_2 は正則となり (21) より

$$K_2^{-1} K_1 = C_2^{-1} C_1$$

という関係が得られ

$$F_{11} = A_{11} - A_{12} C_2^{-1} C_1$$

となる。ここで簡単な計算より

$$\text{rank } G(s) = \text{rank}(sI - F_{11}) + 2m \quad (23)$$

なる関係が成り立つ。 F_{11} が安定であるための必要十分条件は任意の $s \in \mathbf{C}^+$ に対して

$$\text{rank}[sI - F_{11}] = n - m \quad (24)$$

が成立することである。ここで $\mathbf{C}^+$ は虚軸を含む複素右半平面を表わす。(23) より (24) は

$$\text{rank } G(s) = n + m$$

と等価である。またこのとき $C = P^{-1}K$ であるので

$$u = gPy \quad (25)$$

となり、状態フィードバックでなく出力フィードバックでもって目的のレギュレータを構成できる。

つぎに $r > m$ とする。 C_3 を適当に選ぶことによって F_{11} を安定化することを考える。 C_2 の階数は m だから正則行列 T が存在して

$$C_2 T = [D \ 0] \quad (26)$$

となる。ここで D は正則である。さらに

$$T^{-1} A_{22} T = \begin{pmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} A_{21} = \begin{pmatrix} H_{21} \\ H_{31} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} T = (H_{12} \ H_{13})$$

と置けば

$$\text{rank } G(s) = \text{rank} [sI - A_{11} + H_{12} D^{-1} C_1 : -H_{13}] + m + r$$

が B_2 と D の正則性より導かれる。したがって

$$\text{rank } G(s) = n + m \quad (27)$$

と

$$\text{rank}[sI - A_{11} + H_{12} D^{-1} C_1 : -H_{13}] = n - r \quad (28)$$

は等価となる。(27) が任意の $s \in \mathbf{C}^+$ に対して成り立つときには、 $(A_{11} - H_{12} D^{-1} C_1 - H_{13} G_2)$ を安定にする G_2 が存在する。この G_2 を用いて

$$K_1 = K_2 T \begin{pmatrix} D^{-1} C_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

と決めれば

$$F_{11} = A_{11} - H_{12}D^{-1}C_1 - H_{13}G_2$$

となり, F_{11} は安定である. この K_1 に対して $\text{Ker } K \subset \text{Ker } C$ は成立する. したがって

$$K = [K_1 \ K_2]M$$

は HRP の解である. また, 任意の $s \in \mathbf{C}^+$ に対して (27) が成り立たないときに F_{11} を安定にする K_1 が存在しないことは明らかである.

以上の考察をまとめてつぎの定理を得る.

《定理》 システム (1) において HRP が可解であるための必要十分条件は, つぎの (i) ~ (iii) が同時に成り立つことである.

- (i) $m \leq r$
- (ii) $\text{rank } CB = m$
- (iii) 任意の $s \in \mathbf{C}^+$ に対して,
 $\text{rank } G(s) = n + m$

この定理の条件 (ii) は 1 入力 1 出力系における相対次数が 1 であることの多入力多出力系への拡張であると考えられる. 条件 (iii) はシステムが最小位相であることを意味しており, 伝達ゼロが負の実部をもっていると言い換えてもよい. 最適レギュレータ問題において Francis⁸⁾ や木村・藤井⁹⁾ ならびに極配置に基づく完全制御において木村¹⁰⁾ がこの定理と同様な結果を得ている.

[系 1] $m \leq r$ のとき, つぎの (i), (ii) を満たす $r \times m$ 行列 R が存在するとする.

- (i) $\text{rank} \begin{pmatrix} sI - A & BR \\ C & O \end{pmatrix} = n + m$
- (ii) $\text{rank } CBR = m$

このとき

$$u = g\tilde{K}y$$

なる出力のハイゲインフィードバックで安定で高性能をもつ ($g \rightarrow \infty$ で $J \rightarrow 0$ となる意味で) レギュレータを構成できる.

(証明) $\tilde{K} = \tilde{K}C$ と置けば, 付録より $\tilde{K}$ は $\mathcal{K}_m$ の要素であることがわかる. したがって $\tilde{K}$ を適当に選んで安定で高性能をもつレギュレータを構成できる. ■

6. アルゴリズムと例題

前章で HRP が可解であるための条件が求まり, その考察の中で K の決め方も述べてあるが, ここでは決め方を整理しそのアルゴリズムを与える. HRP がシステム (1) において可解であるときに, アルゴリズムは六つのステップよりなる.

[step 1] 変換行列 M を (9) を満たすように求め, $A_{ij}(i, j=1, 2)$, B_2 , C_1 , C_2 を計算する.

[step 2] K_2 を K_2B_2 が安定になるように決める.

[step 3] (26) を満たす T を求め, D , H_{12} , H_{13} を計算する.

[step 4] F_{11} が安定となるように G_2 を決める.

[step 5] (29) より K_1 を決定する.

[step 6] $K = [K_1 \ K_2]M$ より K を求める.

つぎにこのアルゴリズムを用いてつぎのシステム

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して, HRP を解く. ここで [step 0] として, HRP の可解性を判定する.

[step 0] $n=4$, $r=3$, $m=2$ であるので, $m \leq r$ は成立する. $\text{rank } CB = 2$ は明らかであり, 簡単な計算により任意の $s \in \mathbf{C}^+$ に対して $\text{rank } G(s) = 6$ がわかる. よって HRP は可解である.

[step 1] ここでは M を

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする. このとき

$$MAM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad MB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる.

[step 2] $K_2 = -I$ とすれば, $K_2B_2 = -I$ となる.

[step 3] T をつぎのように選ぶ.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このときに D , H_{12} , H_{13} はつぎのようになる.

$$C_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

[step 4] $F_{11} = 5 + 3G_2$ となるので $G_2 = -3$ とすれば, $F_{11} = -4$ となる.

[step 5] (29) により

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

となる。

[step 7] 結局 K はつぎのように決まる。

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

このようにして求められた K に対して、ハイゲインフィードバックシステムは

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -g & 5+g & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2-2g & -g & 0 \\ 0 & 1-3g & 2 & 1-g \end{bmatrix} x$$

となる。

入力と出力の次元が等しい ($r=m$) 場合には、このアルゴリズムを用いなくとも簡単に HRP を解くことができる。この場合 HRP が可解であれば CB は正則であるので、適当に P を選んで PCB を安定な行列にできる。このとき、 PC は HRP の解であり、

$$u = gPy$$

なる出力のハイゲインフィードバックでハイゲインレギュレータを構成できる。

7. 結 論

本文では、(2) で表わされる 1 パラメータの簡単ではあるが現実的なハイゲインフィードバックを用いた安定でありかつ高性能をもつレギュレータの構成を考えてきた。この問題は HRP と呼ばれ、HRP が可解であるための必要条件を求めた。さらに HRP の解を求めるためのアルゴリズムを示し、ハイゲインレギュレータを構成する方法を明らかにした。

実際の立場から見ると、常に飽和という問題があるのでゲインを無限大にすることは不可能である。したがって実際に用いることのできるのは有限のゲインである。 g^* は安定を保証する g の下限を意味している。使用可能なゲインが g^* より大きければ安定性は確保される。ただし、 g^* は一般に K に依存しているので K の決定にあたってこの点を考慮しなければならない。この問題は残された課題である。

6 章で示したアルゴリズムにより得られるハイゲインフィードバックシステムは、出力が速やかに 0 へ向うという特性ばかりでなく、外乱の出力への影響が小さいとかパラメータ変動に対する感度が小さいという種々の優れた特性をもつことも明らかであるが、それらを示すのはほかの機会に譲る。

参 考 文 献

- 1) H. W. Bode: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Princeton, NJ, van Nostrand (1945)
- 2) M. V. Meerov: Automatic Control Systems Stable with Indefinitely Large Value of Gain, *Avtomatika i Telemekhanika*, 8-4 (1947)
- 3) J. L. Willems: Disturbance Isolation in Linear Feedback Systems, *Int. J. Syst. Sci.*, **6**-3, 233/238 (1975)
- 4) E. J. Davison and S. H. Wang: Properties and Calculations of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems, *Automatica*, **10**-6, 643/658 (1974)
- 5) W. R. Evans: Graphical Analysis of Control Systems, *AIEE Trans.*, **67**, 547/551 (1948)
- 6) S. S. Sastry and C. A. Desoer: Asymptotic Unbounded Root Roci by the Singular Value Decomposition, Memorandum No. VCB/ERL, M 79/63 (1979)
- 7) U. Shaked and B. Kouvaritakis: Asymptotic Behavior of Root-Locus of Linear Multivariable Systems, *International J. of Control*, **23**-3, 297/340 (1976)
- 8) B. A. Francis and K. Glover: Bounded Peaking in the Optimal Linear Regulator with Cheap Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-23**-4, 608/617 (1978)
- 9) 木村, 藤井: 多変数制御系の理論と応用-II, システムと制御, **22**-6, 340/349 (1978)
- 10) H. Kimura: A New Approach to Perfect Regulation and Bounded Peaking in Linear Multivariable Control Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-26**-1, 253/270 (1981)
- 11) J. C. Willems: Almost Invariant Subspaces: An Approach to High Gain Feedback Design Part 1: Almost Controlled Invariant Subspaces, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-26**-1, 235/252 (1981)
- 12) K. D. Young, P. V. Kokotovic and V. I. Utkin: A Singular Perturbation Analysis of High-Gain Feedback Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-22**-6, 931/937 (1977)
- 13) A. I. Kimushev and N. N. Krasovskii: Uniform Asymptotic Stability of Systems of Differential Equations with Small Parameter in the Derivative Terms, *Prikl. Math., Mekh.*, **25**-4, 680/690 (1961)
- 14) H. H. Rosenbrock: State-Space and Multivariable Theory, Wiley-Interscience (1970)
- 15) W. M. Wonham: Linear Multivariable Control—A Geometric Approach, Berlin, Germany, Springer-Verlag (1974)
- 16) T. Mita: On Zeros and Responses of Linear Regulators and Linear Observers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-23**-3, 423/428 (1977)
- 17) S. L. Campbell and N. J. Rose: Singular Perturbation of Autonomous Linear Systems, *SIAM J. Math. Anal.* **10**-3, 542/551 (1979)

《付 録》

システム(1)にハイゲインフィードバック(2)を用いたときに、 $g \rightarrow \infty$ でシステムの解があるシステムの

解に収束するときには BK が準安定であることがわかって¹⁷⁾いる. BK が準安定であれば K_2B_2 も準安定でありさらに

$$\text{rank } K = \text{rank } K_2 \quad (\text{A } 1)$$

も成り立つ.

ここでつぎのように $\mathcal{K}_\nu$ を定める.

$$\mathcal{K}_\nu = \{K | \text{rank } KB = \text{rank}(KB)^2 = \nu\}$$

もちろん $\nu \leq r$ であり, $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}$ である. さらに

$$\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_r$$

とする. K_2B_2 が準安定であれば K は $\overline{\mathcal{K}}$ の元となる. $K \in \mathcal{K}_\nu$ であれば

$$LK = \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} \begin{matrix} \nu \\ r-\nu \end{matrix} \quad (\text{A } 2)$$

を満たす $r \times r$ の正則行列 L が存在する. ここで

$$BL^{-1} = \begin{bmatrix} \underbrace{E}_\nu & \underbrace{F}_{r-\nu} \end{bmatrix} \quad (\text{A } 3)$$

とすれば $BK = EG$ であるので (1), (2) の代りに

$$\dot{x} = Ax + Ev \quad (\text{A } 4 \text{ a})$$

$$y = Cx \quad (\text{A } 4 \text{ b})$$

$$v = gGx \quad (\text{A } 5)$$

を考えてもよい. システム (A 4) はシステム (1) において入力次元を故意に下げたシステムになっており, (A 4) において HRP が可解であれば (1) において HRP が可解であることは明白である. したがって, 本文中のように K は $\mathcal{K}$ から選ぶとして十分である.