ロボットアーム動特性の幾何学的解析法

浅 田 春 比 古*

A Geometrical Analysis of Manipulator Dynamics

Haruhiko ASADA*

Robot manipulators and mechanical arms have complicated behavior including interactions among multiple joints, nonlinear effects such as Coriolis and centrifugal forces, and varying inertia depending on the arm configuration. In this paper, a new approach to the geometrical representation of manipulator dynamics is presented. The inertia ellipsoid, which is used to represent dynamic characteristics of a single rigid body, is extended to a series of rigid bodies in order to represent the manipulator dynamics. The geometrical representation of the generalized inertia ellipsoid (GIE) represents the characteristics of the manipulator as a whole. One can understand the complicated inertia effect and nonlinearity of multi-degree-of-freedom motion by simply investigating the GIE configuration. In the latter half of the paper, the presented method is applied to aid the design of a mechanical arm, in which dimensions of an arm structure and its mass distribution are optimized through the evaluation and graphical representation of the arm dynamics.

Keyword: manipulator dynamics, robot arm design, CAD, inertia tensor

1. 緒 言

多自由度のロボットアームは、関節相互の運動の干渉や、腕の姿勢に応じて変化する慣性、さらに速度の積に比例する非線形力のため、複雑な動力学特性を有する。特にロボットの運動速度が速く、要求される精度が高くなるにつれ、これらの複雑な特性はいっそう顕著に現れるため¹⁾、制御系設計の段階はもちろん

のこと、機械設計の段階でも動力学的特性について十分な理解をもつことが必要とされる。

一般にロボットアームの運動方程式は、関節トルクを τ_i 、関節変位を θ_i としたときつぎの式で与えられる²⁾。

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + g_i + f_i$$

ここで右辺第1項は慣性力、第2項はコリオリ力、遠心力と呼ばれる非線形力、第3、第4項は重力および摩擦力を表わす。従来この種の方程式の計算には莫大な演算量が必要とされたが、最近になって漸化式を用いた効率的な計算方法が発見され^{3)~5)}、高速演算シミュレータに応用されたり⁶⁾、実時間制御への応用にも見通しが得られるようになった⁴⁾。このように運動方程式の計算方法は飛躍的に発展したが、一方でロボットアームの特性を解析する手段については特筆すべき発展がない。

ロボットのメカニズムや制御系を設計する設計者にとっては、ロボットの特性を適格に把握することが重要で、そのためには複雑な特性を理解しやすい方法で表わす手段が必要とされる。運動方程式に含まれる係数の組の α_{ij} 、 β_{ijk} などはロボットの特性を厳密に記述するものであるが、数が多く、複雑でかつ腕の姿勢によっても変化するため、これより具体的なロボットの運動特性を知るのには不可能に近い。またシミュレーションは具体的な系の応答を逐一調べるには有用であるが、ロボットの包括的または大域的な特性を知るには適さない。このように現在のところ複雑なロボットの特性を知る有効な手段はなく、その全体像を適格につかむのは非常に困難なのが実情である。

本文では運動方程式に対して幾何学的な表現方法を導入し、非線形で強い干渉のある複雑な特性を、理解しやすい幾何学的方法で解析する。ロボットアームの運動特性を解析するうえで最も困難なのは、運動方程式の第1、第2項に現れる複雑な慣性力と非線形力である。運動方程式をラグランジェの運動方程式を用い

* マサチューセッツ工科大学 Cambridge, Massachusetts 02139, U. S. A.

* Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts (Received July 17, 1982)
(Revised March 16, 1983)

て導く場合、これらの項はロボットアームの運動エネルギーから生れることが知られている²⁾。そこで本文では運動エネルギーに着目し、これに幾何学的な意味と表現方法を与え、複雑な運動特性に明確な解釈を行う。また本文の後半では、ロボットアームの計算機援用設計 (CAD) への応用を意図しつつ、図式表示による運動特性の評価方法とそれに基づいた設計方法を示す。

2. 運動エネルギー

本節ではロボットアームの有する運動エネルギーについてさまざまな表現式を導く。Fig. 1 はロボットアームのモデルで、基底部より手先に向かって番号づけられた $n+1$ 個のリンクと n 個の関節からなり、各リンクは剛体と仮定される。一般に剛体の運動は質量中心に関する並進運動と質量中心回りの回転運動に分解される。剛体の並進速度を 3 次元ベクトル $\mathbf{v}$ で、回転速度を同じくベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で表わせば、運動エネルギー T は、

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

と表わされる。ここに m は質量、 $\mathbf{I}$ は慣性テンソル、また記号 T は行列やベクトルの転置を表わす。

さてロボットアームを構成する各リンクの運動は各関節を駆動するアクチュエータによってひき起こされたものなので、各リンクの速度は関節の速度 $\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n$ によって表わされる。すなわち i 番目のリンクの並進速度 $\mathbf{v}_i$ と回転速度 $\boldsymbol{\omega}_i$ はつぎの $\dot{\theta}_j$ の 1 次結合で表わされる³⁾。

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i \mathbf{a}_j \dot{\theta}_j, \quad \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^i \mathbf{b}_j \dot{\theta}_j \quad (2)$$

Fig. 1 に示すような回転関節からなるロボットアームの場合には、係数 $\mathbf{a}_j$ は j 番目の関節軸の方向を示す単位ベクトル、係数 $\mathbf{b}_j$ は、図中に示すように、関

Fig. 1
Manipulator

節軸 j 上の 1 点からリンク i の質量中心に至る位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ と単位ベクトル $\mathbf{a}_j$ のベクトル積である。

(1) 式で与えられる単一の剛体の運動エネルギーを、ロボットアームを構成する全リンクについて加え合せ、さらに (2) 式を用いて関節速度への変数変換を行えば、次式のようなアーム全体のもつ運動エネルギー T が求められる。

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{H} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3)$$

ここに $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ と $\mathbf{H}$ は $n \times 1$ ベクトルと $n \times n$ 行列で、

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \text{col.} [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i^T \mathbf{I}_i \mathbf{A}_i + m_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i) \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_i = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}], \quad \mathbf{B}_i = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]$$

単一の剛体についての慣性テンソル $\mathbf{I}_i$ に対し、行列 $\mathbf{H}$ は互いに連った複数の剛体全体が有する慣性を表わす。行列 $\mathbf{H}$ を関節座標に関する剛体系の慣性テンソルと呼ぶ。運動エネルギーは静止状態以外は正値をとることから、行列 $\mathbf{H}$ は正定値対称であることが容易に導かれる。

関節座標に関する表現式のみならず、運動エネルギーはさまざまな座標系で表わすことができる。 $\mathbf{q} = \text{col.} [q_1, \dots, q_n]$ をロボットアームの運動を記述する一般化座標とし、ある領域内の関節座標と $\mathbf{q}$ は 1 対 1 に対応するものとする。このとき運動エネルギーと慣性テンソルは

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{R}^T \mathbf{H} \mathbf{R} \quad (5)$$

に変換される。ここに $\mathbf{R}$ は $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ から $\dot{\mathbf{q}}$ への座標変換に係わるヤコビ行列の逆行列で、 $\mathbf{G}$ は正定値対称である。 $\mathbf{G}$ を剛体系の一般化慣性テンソルと呼ぶ。

3. 一般化慣性楕円体

本節では剛体系の一般化慣性テンソルについて幾何学的な解釈を与え、ロボットアームのもつ運動特性の図式表現方法を検討する。

一般化慣性テンソルに対し、つぎの 2 次形式で与えられる 2 次曲面を考える、

$$\mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} = 1 \quad (6)$$

$\mathbf{G}$ は正定値行列であるので、上式の表わす立体は楕円体である。単一の剛体の場合にはこの楕円体は慣性楕円体として知られている⁷⁾ が、上式の場合、これが複数の剛体からなる剛体系のテンソルに対するまで拡張されている。この新しい楕円体を一般化慣性楕円体 (Generalized Inertia Ellipsoid) と呼び、GIE と略す。

GIE は主軸を有する。主軸の方向は行列 $\mathbf{G}$ の固有

singular point

Fig. 2

Generalized inertia ellipsoid for two-degree-of-freedom arm
 $l_1=l_2=0.5\text{m}$,
 $g_1=g_2=0.25\text{m}$,
 $m_1=50\text{kg}$, $m_2=30\text{kg}$, $I_1=5\text{kg/m}^2$,
 $I_2=3\text{kg/m}^2$

ベクトルで与えられ、主軸の長さは対応する固有値の平方根に反比例する。すなわち GIE の姿勢と形状は行列 $\mathbf{G}$ の固有ベクトルと固有値により定まる。

さてロボットは一般に手先に取付けられる end effector によって実際に作業を行うものであるから、われわれは通常手先の運動特性に関心がある。Fig. 2 は 2 関節ロボットの場合の例で、手先の関心点の空間座標 xy を一般化座標として GIE を描いたものである。すなわち運動エネルギーを手先の座標に関して記述し、一般化慣性テンソルの固有値固有ベクトルを求め、手先位置を中心とする楕円を描いた。通常の慣性楕円体と異なり、GIE は腕の姿勢によって形状が変わるので、図中鎖線で示す手先の到達可能範囲内の各点で GIE を描いた。このような GIE の分布図を描くことにより、腕の慣性の変化が一覧でき、大域的特性がわかる。

4. 剛体系の慣性モーメント

この節では単一の剛体についての慣性モーメントの概念を互いに連った複数の剛体にまで拡張し、剛体系の運動特性を解析するとともに、これが GIE の分布図のうえでどのように表わされているかを検討する。

一般に単一の剛体の場合、つぎのようにして運動エネルギーから慣性モーメントが導かれる⁷⁾。すなわち剛体の回転運動について、角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ 、回転方向を示す単位ベクトルを $\mathbf{n}$ 、角速度の大きさを ω とすれば運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (7)$$

となる。ここでスカラー量 $I = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n}$ のことを回転軸 $\mathbf{n}$ のまわりの慣性モーメントと呼んでいる。したがって慣性モーメントとは、運動エネルギーの 2 倍と角速

度の大きさの 2 乗の比、 $I = 2T/\omega^2$ としても定義される。これを複数の剛体からなる系にまで拡張する。そのためには、単一剛体の角速度の大きさを ω で与えたように、 n 自由度の剛体系の運動についてもその速度の大きさを測る尺度が存在しなければならない。慣性モーメントを剛体系にまで拡張するとき、一般化速度についてつぎのノルム V が存在するものとする。

$$V = \sqrt{\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}} \quad (8)$$

Fig. 2 では V は通常の意味での手先速度を示す。(8) 式の速度ノルムが存在するとき、次式で与えられるスカラー量 h を剛体系の一般化慣性モーメントと呼ぶ。

$$h = \frac{2T}{V^2} = \frac{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}}{\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}} \quad (9)$$

一般化慣性モーメント h は空間内の位置のみならず運動方向によっても変化する。そこで興味ある問題は空間内の各点で慣性モーメントが最大あるいは最小となる方向とその大きさを求めることである。この問題はいわゆる固有値問題の一つで、その解は行列 $\mathbf{G}$ の最大・最小の固有値とそれらに対応する固有ベクトルで与えられる。前節で述べたように GIE の主軸の長さは、固有値の平方根に反比例する。したがって最大の固有値は GIE の短軸に対応し、短軸方向に慣性モーメントは最大、逆に長軸方向に最小となる。一方等しい運動エネルギーをもつ運動のなかでは、長軸方向の運動が最高の速度、短軸方向が最低の速度をもつ。

すべての主軸の長さが等しい場合、すなわち GIE が球面の場合、慣性モーメントは方向によらず一定となる。逆に主軸間の長さの違いは慣性テンソルのもつ異方性を表わしている。Fig. 2 の例では GIE は鎖線の領域の端で細長くなり、異方性が顕著になっている。同図には特別な場合として腕を伸ばしきった状態も描かれている。この位置では半径方向に動けないため、特異点になっている。特異点に近くなるにしたがい、GIE の短軸の長さは零に収束している。したがって短軸の長さより特異性の程度を知ることができる。

5. 非線形力

コリオリ力、遠心力と呼ばれる非線形力はロボットアームの動力学を特徴づける重要なものであるが、その複雑さのため、容易には理解できない。本節では GIE の分布図のうえで、この非線形力の発生機構がどのように解釈されるかを探り、非線形力を図式に調べる方法を検討する。

空間中に 1 点 A を固定する。 A 点における GIE の主軸を座標軸に用いれば、主軸座標 $\mathbf{p} = \text{col. } [p_1, \dots,$

p_n] に関して、つぎのラグランジェの運動方程式を得る。

$$\mathbf{Q} - \mathbf{D}_A \dot{\mathbf{p}} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}_A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \dot{\mathbf{p}} \cos \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \mathbf{D}_A}{\partial \mathbf{p}_1} \dot{\mathbf{p}}, \dots, \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \mathbf{D}_A}{\partial \mathbf{p}_n} \dot{\mathbf{p}} \right] = 0 \quad (10)$$

ここで $\mathbf{Q}$ はポテンシャル力も含めた主軸方向の一般力、 $\mathbf{D}_A$ は A 点における慣性テンソルに主軸変換を施して得た対角行列、 $\text{diag.} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ である。したがって上式第 2 項は非干渉化された慣性力を表わす。第 3、第 4 項は速度の積からなる非線形項で、慣性テンソルの空間微分 $\partial \mathbf{D}_A / \partial \mathbf{p}_i$ に比例している。すなわち第 3、第 4 項は慣性テンソルが空間的に変化することによって発生する力を表わしている。慣性テンソルは GIE によりその空間的な分布が表わされているので、われわれは非線形力を GIE の変化のし方に結びつけて幾何学的に解釈しなおすことを試みる。

A 点の近傍に点 B を考え、B 点における慣性テンソルを $\mathbf{G}_B$ とする。ただし $\mathbf{G}_B$ は A 点における主軸を座標軸として表わす。適当な直交行列 $\mathbf{C}$ を用いれば、行列 $\mathbf{G}_B$ は次式のように対角形に変換される。

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{C} \mathbf{D}_B \mathbf{C}^T \quad (11)$$

ここで $\mathbf{D}_B$ は $\mathbf{G}_B$ の固有値を成分にもつ対角行列である。楕円体の形状は主軸の長さによって形状が定まるので、行列 $\mathbf{D}_B$ は GIE の形状を表わす。一方直交行列は座標の回転を表わすので、行列 $\mathbf{C}$ は GIE の姿勢の変化を表わしていることになる。このように GIE の変化は主軸の長さ、すなわち形状の変化と、主軸の回転、すなわち姿勢の変化に分解される。Fig. 3 はそれぞれの変化を図に示している。図 (a) の場合、各主軸の長さが l_i より $l_i + \delta l_i$ に変化することにより慣性テンソルは

$$\mathbf{D}_B = \text{diag.} \left[\frac{1}{l_i^2} - \frac{2}{l_i^3} \delta l_i \right] = \text{diag.} [\lambda_i + \delta \lambda_i] \quad (12)$$

Fig. 3 Change of GIE configuration and nonlinear effect, (a) change in lengths of principal axes, (b) change in orientation

に変化する。ここに λ_i は慣性テンソルの固有値で、主軸の長さとし、 $\lambda_i = 1/l_i^2$ の関係にある。一方図 (b) に示すように、第 i 軸と j 軸を含む平面内で、GIE が微小回転角 $\delta \phi_{ij}$ だけ回転するとすれば、対応する直交行列は一般に次式で与えられる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1, & -\delta \phi_{12}, \dots, & -\delta \phi_{1n} \\ \delta \phi_{12}, & 1, & \dots, & -\delta \phi_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta \phi_{1n}, & \delta \phi_{2n}, & \dots, & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(12), (13) 式を (11) 式に代入し、2 次以上の微小項を無視すれば、慣性テンソルの微小変化 $\delta \mathbf{D}_A = \mathbf{G}_B - \mathbf{D}_A$ は、

$$\delta \mathbf{D}_A = \begin{bmatrix} \delta \lambda_n, & (\lambda_1 - \lambda_2) \delta \phi_{12}, \dots, & (\lambda_1 - \lambda_n) \delta \phi_{1n} \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \delta \phi_{12}, & \delta \lambda_2, & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ (\lambda_1 - \lambda_n) \delta \phi_{1n}, & \dots, & \delta \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。ここでロボットアームが i 番目の主軸の方向に速度 $\dot{p}_i$ で進む場合を考えれば、(10) 式第 3、第 4 項に (14) 式を用いてつぎの非線形力 $\mathbf{F}_N$ が発生することが導かれる。

$$\mathbf{F}_N \bigg|_{\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{p}_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_1} - (\lambda_1 - \lambda_i) \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial p_i} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_{i-1}} - (\lambda_{i-1} - \lambda_i) \frac{\partial \phi_{i-1,i}}{\partial p_i} \\ \vdots \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_i} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_n} - (\lambda_n - \lambda_i) \frac{\partial \phi_{ni}}{\partial p_i} \end{bmatrix} \dot{p}_i^2 \quad (15)$$

ここで偏微分 $\partial \phi_{ij} / \partial p_i$ は i 番目の主軸がその方向を変える曲率を、また $\partial \lambda_i / \partial p_i$ は固有値の変化率を示す。

(15) 式の解析結果よりつぎのことが明らかになった。第 i 軸の方向に速度 $\dot{p}_i$ でアームが運動するとき、 i 番目の主軸の長さがこの方向に変化するのにもなって、非線形力 $-\dot{p}_i^2 / 2 \cdot \partial \lambda_i / \partial p_i$ が運動方向に作用し、同じく i 番目の主軸の長さが第 j 軸 ($j \neq i$) の方向に変化するのにもない $\dot{p}_i^2 / 2 \cdot \partial \lambda_i / \partial p_j$ が j 軸方向に作用する。また $p_i - p_j$ 平面内で GIE が回転すれば、固有値の差と回転角速度に比例した力 $-(\lambda_i - \lambda_j) \partial \phi_{ji} / \partial p_i \cdot \dot{p}_i^2$ が j 軸の方向に作用する。

Fig. 3 の図 (a) では第 1 軸の方向に長軸の長さが伸びているので、この方向には図中に示す非線形力が

発生する。また図(b)では p_1 – p_2 平面内で GIE が p_1 軸より p_2 軸の方向に回転している。このとき、 p_2 軸より p_1 軸の主軸のほうが長いので、図中の非線形力が p_2 軸の正方向に作用する。なお GIE の回転によって生じる非線形力は主軸の長さの差に依存するので、異方性の強い慣性テンソルの場合に顕著になる。

6. ロボットアーム設計への応用

ロボットアームの設計においては、従来、各関節ごとの動特性や、動作範囲などの運動学的特性に注意が払われたが、多自由度の動力学的特性については、その解析の難しさのために、十分な検討がなされていなかった。前節までに議論した GIE はロボットアームの動力学的特性を設計者に理解しやすい形で表わすので、アームの設計に有用なデータと考えられる。そこでこの節では GIE を設計問題に応用し、多自由度運動の動力学的特性を総合的に評価しながら設計を進める手法について検討する。

ここでは Fig. 4 に示す 2 関節ロボットを対象とする。設計すべきパラメータは図中に示す 4 種類、リンク長さ、質量、質量中心の位置および慣性モーメントで、これらによってアームの形状と質量の分布が表わされる。

Fig. 2 に示した GIE の分布図は、上腕と下腕が同長さでかつ図の注釈に示すパラメータを用いた場合である。この図より明らかとなる動力学的特性の問題点は、i) GIE の長軸と短軸の差が大きいので、手先に関する一般化慣性モーメントは運動方向によって大きく異なる、ii) GIE の形状と姿勢は空間内の位置に応じて大きく変化しているので、著しい非線形力の影響が予想されることである。そこでリンク形状と質量の分布を改善することにより、非線形力の発生を抑制し、かつ一般化慣性テンソルの異方性を減少させることを検討する。すなわち GIE の形状が広い範囲にわたってほぼ円形になるよう上記の設計変数を修正する。

GIE の変化が少なく異方性もわずかなロボットアームは制御が容易であるばかりでなく、塗装ロボットの場合、特につぎのような意義をもつ。すなわち塗装ロボットでは運動軌道を教えこむ際、人間作業者がスプレイガンを手に持ち、模範的動作を示す。このときスプレイガンの付けられているロボットアームが、著しい非線形性と異方性の強い運動特性をもつならば、人間作業者の動作を防げることになり、良質なデータが得られにくい。したがって操作のしやすさでも異方

Fig. 4 Dimensions and mass distribution of two d.o.f. arm

性のない様な運動特性が望まれる。

Fig. 4 より関節座標に関してつぎの慣性テンソルが得られる。

$$H = \begin{bmatrix} I_1 + m_1 g_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 g_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 g_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & I_2 + m_2 g_2^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

一方関節座標から手先の空間座標への座標変換について、つぎのヤコビ行列が得られる。

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & -l_2 \sin \theta_2 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

手先位置に関する一般化慣性テンソル G は上式を (5) 式に代入して導かれる。慣性テンソルが等方、すなわち行列 G が等しい固有値をもつには、

$$\theta_1 - \theta_2 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 \quad (18)$$

が成立する必要がある。ここに H_1, H_2 は (16) 式の行列 H の第 1 および第 2 対角要素である。上式の最初の条件は上腕が下腕に対して垂直であることを意味し、第 2 条件はそれぞれの関節軸の回りの慣性モーメント、 H_1 と H_2 の比が両リンクの長さの比の 2 乗に一致することを意味する。

Fig. 5 はリンク長さや質量の分布を変え、(18) 式の条件が成立するように改善した一例である。図中の破線上に手先位置があるときには、上腕の曲げ角は 90 度になっており、この線上で GIE は真円となっている。ところが破線からはずれ周辺に向うにつれて、GIE は急激に形状を変え、細長くなる。急激な GIE の形状変化は前述のように著しい非線形力の発生を伴うとともに、極端に細長い GIE は短軸方向への著しい運動性の低下を意味する。そこで第 2 ステップの改善として、より広い範囲で GIE の形状がほぼ円形に保たれるよう工夫する。

Fig. 5 Modified GIE configuration (isotropic on center line)
 $l_1=0.6\text{m}$, $l_2=0.4\text{m}$, $g_1=0$, $g_2=0.28\text{m}$
 $m_1=50\text{kg}$, $m_2=30\text{kg}$, $I_1=3.492\text{kg/m}^2$,
 $I_2=4\text{kg/m}^2$

Fig. 6 Modified GIE configuration II (isotropic and uniform)
 $l_1=0.4\text{m}$, $l_2=0.6\text{m}$, $g_1=0$, $g_2=0.42\text{m}$
 $m_1=50\text{kg}$, $m_2=30\text{kg}$, $I_1=1.552\text{kg/m}^2$
 $I_2=9\text{kg/m}^2$

すなわち上腕の下腕に対する曲げ角が 90 度より大きくはなると (18) 式の条件はもはや成立しないので、上腕の曲げ角を狭い範囲に制限するとともに、上腕を下腕に対して長くし、ほぼ以前と同じだけの動作範囲が得られるようにする。Fig. 6 はこのようにして修正した GIE の分布図で、広い範囲で GIE がほぼ円形になっていることがわかる。さらに Fig. 2 と比べれば主軸の方向の変化もわずかなので、非線形性と干渉が著しく改善されていることがわかる。このように GIE の分布図を用いれば、多自由度アームの構造と質量分布を、動力学的見地から総合的に評価することができ、機械設計に有用なデータが得られる。

7. 結 言

本文の主な結果を列挙する。

- (1) 単一の剛体についての慣性楕円体を複数の剛体からなる剛体系にまで拡張し (GIE), ロボットアームの動力学的特性を幾何学的かつ大域的に表示する方法を提案した。
- (2) 剛体系の慣性の大きさを測る尺度として一般化慣性モーメントを導入し、これが GIE の長軸方向に最小、短軸方向に最大となることを示した。
- (3) コリオリカや遠心力と呼ばれる非線形力を GIE の形状と姿勢の変化によって説明し、非線形力の発生を幾何学的に解析する方法を示した。
- (4) GIE をロボットアームの設計に応用し、慣性に方向差が少なく、非線形性の弱いロボットアームの設計を示した。

本文に示した設計例では試行錯誤的に設計パラメータを修正していったが、今後より多くの自由度を扱う場合、特性の表示方法のみならず設計パラメータのシステマックな修正方法を確立する必要がある。また実用的な観点からは、本文で扱った動力学的解析のほか、各リンクの動力バランスや強度解析など、幅広い設計項目も含めて、総合的な計算機援用設計システムを開発することが望まれる。

謝 辞

本研究について貴重な助言をいただいた、マサチューセッツ工科大学機械工学科助教授、Warren Seering Neville Hogan ならびに電気工学科助教授、Tomas Lozano-Perez 諸氏に深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 浅田：ダイレクト=ドライブロボットの開発とその制御性能の評価，計測自動制御学会論文集，19-1，78/85 (1983)
- 2) R. P. Paul: Robot Manipulators, Chapter 6, M. I. T. Press (1981)
- 3) Y. Stepanenko and S. Vukobratovic: Dynamics of Articulated Open-Chain Active Mechanisms Mathematical Biosciences, No. 28, 137/170 (1976)
- 4) J. Y. S., Luh, M. W. Walker, and R. P. Paul: On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 102-2, 69/76 (1980)
- 5) J. M. Hollerbach: A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity, IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics, SMC-10-11, 730/736 (1980)
- 6) M. W. Walker and D. E. Orin: Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, Proc. of 1981 Joint Automatic Control Conference, WP-2B (1981)
- 7) H. Goldstein: Classical Mechanics, Addison-Wesley (1950)