周期係数線形離散時間システムの左可逆性†

河野 通夫*

Left Invertibility in Linear Periodic Discrete-Time Systems

Michio KONO

1. ま え が き

多くの制御問題において可逆性は重要な役割を演じている。たとえば、定係数線形システムにおいて動的非干渉制御が可能であるための必要十分条件は制御対象が右可逆なことである。定係数線形システムの可逆性について数多くの研究がなされてきた^{1)~5)}。それらの結果を変係数線形システムの場合に拡張することは興味深い。Silverman は正則な変係数線形連続時間システムに対して左可逆性の必要十分条件を与えた⁴⁾。滑らかな連続時間システムの場合には正則という仮定は一般性を失うものではない。すなわち、正則でない場合でも時間区間を適当に分割することにより各区間においては正則にすることができる。ところが離散時間システムの場合には、このようなことはできないので、正則という仮定はシステムのクラスをかなり限定することになる。Kono は変係数線形離散時間システムに対し、右可逆性、左可逆性、弱右可逆性、弱左可逆性を定義し、右可逆性(弱右可逆性)が左可逆性(弱左可逆性)と双対な関係にあることを示したが⁶⁾、可逆性のクライテリオンは与えていない。

変係数線形離散時間システムのうちでも、周期係数の場合は特に重要であり⁷⁾、周期係数線形システムは必ずしも正則でない。本稿の目的は、周期係数線形離散時間システムに対して左可逆性のクライテリオンを与えることにある。

2. 問題の定式化

r 入力 m 出力変係数線形離散時間システム

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad t \in \mathbf{Z} \quad (1b)$$

を考える。ただし、 $\mathbf{Z}$ は整数の集合であり、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$

($\mathbf{R}$ は実数の集合)、 $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $y(t) \in \mathbf{R}^m$, $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $C(t) \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $D(t) \in \mathbf{R}^{m \times r}$ である。システム(1)に対し、弱左可逆性および左可逆性の定義を与える。

【定義 1】⁶⁾ σ を t_1 に依存する非負の整数とする。任意の非負の整数 k に対し、 $x(t_1 - k) = 0$ でかつ入力列 $u(t_1 - k), u(t_1 - k + 1), \dots, u(t_1), 0, 0, \dots$ をシステム(1)に加えたとき、出力列 $y(t_1 - k), y(t_1 - k + 1), \dots, y(t_1 + \sigma)$ から $u(t_1 - k), u(t_1 - k + 1), \dots, u(t_1)$ が一意に決定できるとき、システム(1)は時刻 t_1 において σ -delay で弱左可逆であるという。

【定義 2】⁶⁾ σ を t_1 に依存する非負の整数とする。任意の非負の整数 k に対し、 $x(t_1 - k) = 0$ のとき出力列 $y(t_1 - k), y(t_1 - k + 1), \dots, y(t_1 + \sigma)$ から入力列 $u(t_1 - k), u(t_1 - k + 1), \dots, u(t_1)$ が一意に決定できるとき、システム(1)は時刻 t_1 において σ -delay で左可逆であるという。

(注意 1)

(a) ある σ に対して、システム(1)が時刻 t_1 において σ -delay で左可逆 [弱左可逆] であるとき、システム(1)は時刻 t_1 において左可逆 [弱左可逆] であるという。

(b) システム(1)がすべての時刻において左可逆 [弱左可逆] であるとき、システム(1)は左可逆 [弱左可逆] であるという。

(注意 2)

定係数システムにおいては、左可逆性の必要十分条件と弱左可逆性の必要十分条件は一致する。定係数システムの左可逆性のクライテリオンは数多くあるが、Brockett と Mesarovic のクライテリオンは弱左可逆性のクライテリオンに対応している。

(注意 3)

システム(1)は、時刻 t_1 において左可逆 [弱左可逆] であれば、 t_1 以前のすべての時刻において左可逆 [弱左可逆] である。

システム(1)の推移行列を

$$X(t, s) \triangleq A(t-1)A(t-2) \cdots A(s), \quad t > s \quad (2a)$$

$$X(t, t) \triangleq I \quad (2b)$$

と定義し、行列 $H(t, s)$ を

† Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (昭 53. 12)

* 東京商船大学 東京都江東区越中島 2-1-6

* Tokyo University of Mercantile Marine, Kohto-ku, Tokyo

(Received January 19, 1983)

Keyword: invertibility, discrete-time systems, periodic systems

$$H(t, s) \triangleq C(t)X(t, s+1)B(s), \quad t \geq s \quad (3a)$$

$$H(t, t) \triangleq D(t) \quad (3b)$$

$$H(t, s) \triangleq 0, \quad t > s \quad (3c)$$

と定義する。さらに k, l を非負の整数としたとき、行列 $L_{k, l}(t_1)$ を

$$L_{k, l}(t_1) \triangleq \begin{bmatrix} H(t_1 - k, t_1 - k) & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ H(t_1, t_1 - k), \dots, H(t_1, t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ H(t_1 + l, t_1 - k), \dots, H(t_1 + l, t_1 + l) \end{bmatrix}$$

と定義しておく。

3. 主な結果

第2章では一般の変係数システムに対し、定義を与えたが、以下では $A(t), B(t), C(t), D(t)$ が周期 τ の場合を考察する。

周期性と注意3からただちにつぎの命題が得られる。

【命題1】 周期係数システム(1)は、ある時刻において左可逆【弱左可逆】であれば、左可逆【弱左可逆】である。

周期係数システムにおいては左可逆性と弱左可逆性が等価であることがつぎの命題によって示される。

【命題2】 周期係数システム(1)に対し、つぎの四つの主張は等価である。

(i) システム(1)は弱左可逆である。

(ii) ある正整数 σ に対し、

$$\text{rank } L_{\tau-1, \sigma}(0) - \text{rank } L_{0, \sigma-1}(1) = \tau r \quad (4a)$$

または

$$\text{rank } L_{\tau-1, 0}(0) = \tau r \quad (4b)$$

が成立する。

(iii) ある非負の整数 σ に対し、 $x(-\tau+1)$ が既知のとき、出力列 $y(-\tau+1), y(-\tau+2), \dots, y(\sigma)$ から入力列 $u(-\tau+1), u(-\tau+2), \dots, u(0)$ が一意に決定できる。

(iv) システム(1)は左可逆である。

(証明) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) を示す。(iv) $\Rightarrow$ (i) は定義から明らか。

(i) $\Rightarrow$ (ii). (ii) が成立しないと仮定すれば、任意の l に対し、

$$\text{rank } L_{\tau-1, l\tau}(0) - \text{rank } L_{0, l\tau-1}(1) \leq \tau r - 1$$

$$\text{rank } L_{\tau-1, 0}(0) \leq \tau r - 1$$

となるが、周期性によってこれらの式は

$$\text{rank } L_{0, (l+1)\tau-1}(1) - \text{rank } L_{0, l\tau-1}(1) \leq \tau r - 1$$

$$\text{rank } L_{0, \tau-1}(1) \leq \tau r - 1$$

と変形できる。したがって、任意の l に対し、

$$\text{rank } L_{0, (l+1)\tau-1}(1) \leq (\tau r - 1)(l+1) \quad (5)$$

が成立する。任意の σ に対して $\sigma = q_\sigma \tau + r_\sigma$ となる整数 $q_\sigma, r_\sigma (0 \leq r_\sigma \leq \tau - 1)$ が一意に存在し、周期性と(5)式によって

$$\begin{aligned} \text{rank } L_{k\tau-1, \sigma}(0) &\leq \text{rank } L_{k\tau-1, (q_\sigma+1)\tau-1}(0) \\ &= \text{rank } L_{0, (q_\sigma+k+1)\tau-1}(1) \\ &\leq (\tau r - 1)(q_\sigma + k + 1) \end{aligned}$$

となる。行列 $J_{k, l}(t_1)$ を

$$J_{k, l}(t_1) \triangleq \begin{bmatrix} H(t_1 - k, t_1 - k), & \dots, & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ H(t_1, t_1 - k), & \dots, & H(t_1, t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ H(t_1 + l, t_1 - k), & \dots, & H(t_1 + l, t_1) \end{bmatrix}$$

と定義すれば、 $\text{rank } J_{k\tau-1, \sigma}(0) \leq \text{rank } L_{k\tau-1, \sigma}(0)$ であるから、

$$\text{rank } J_{k\tau-1, \sigma}(0) \leq (\tau r - 1)(q_\sigma + k + 1)$$

が成立する。 k を十分大きくすれば、

$$\text{rank } J_{k\tau-1, \sigma}(0) < r k \tau$$

となり、文献6)の Proposition 1 によってシステム(1)は弱左可逆でない。

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 一般性を失うことなく、 $x(-\tau+1) = 0$ と仮定することができ、文献6)の Proposition 3 の証明において $k = \tau - 1$ とおけば明らかである。

(iii) $\Rightarrow$ (iv). (iii) が成立すれば、周期性によって $y(-l\tau - \tau + 1), y(-l\tau - \tau + 2), \dots, y(-l\tau + \sigma)$ および $x(-l\tau - \tau + 1)$ から $u(-l\tau - \tau + 1), u(-l\tau - \tau + 2), \dots, u(-l\tau)$ が一意に決定できる。任意の k に対して $k = q_k \tau + r_k$ となる整数 $q_k, r_k (0 \leq r_k \leq \tau - 1)$ が一意に存在する。時刻 $-k$ からの挙動を考えかわりに時刻 $-q_k \tau - \tau + 1$ からの挙動を考え、 $x(-q_k \tau - \tau + 1) = 0, u(-q_k \tau - \tau + j) = 0 (j = 1, \dots, \tau - r_k - 1)$ とすれば、 $y(-q_k \tau - \tau + j) = 0 (j = 1, \dots, \tau - r_k - 1), x(-k) = 0$ となる。 $x(-q_k \tau - \tau + 1) = 0, y(-q_k \tau - \tau + j) = 0 (j = 1, \dots, \tau - r_k - 1)$ であり、 $y(-k), \dots, y(-q_k \tau + \sigma)$ は与えられるから、 $u(-k), \dots, u(-q_k \tau)$ は一意に決定でき、 $x(-q_k \tau + 1)$ も計算できる。つぎに $y(-q_k \tau + 1), \dots, y(-q_k \tau + \tau + \sigma)$ および $x(-q_k \tau + 1)$ から $u(-q_k \tau + 1), \dots, u(-q_k \tau + \tau)$ が一意に決定できる。以下同様に $u(-q_k \tau + \tau + 1), \dots, u(0)$ を決定できる。

Q. E. D.

行列 M_j を

$$M_j \triangleq L_{0, j-1}(1), \quad j \geq 1$$

と定義すれば、左可逆性のクライテリオンがつぎの定理によって与えられる。

《定理》 周期係数システム(1)が左可逆であるための必要十分条件は

$$\text{rank } M_{\tau(n+1)} - \text{rank } M_{\tau n} = \tau r \quad (6)$$

である。

十分性は命題 2 から明らかである。必要性は文献 3) の系 1 の証明を周期係数の場合に拡張することによって示すことができるが、紙面の都合で省略する。

4. 数 値 例

$\tau=2$ の 1 入力 1 出力システム

$$A(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C(0)=[1, 0], \quad C(1)=[0, 1], \quad D(t)=0$$

を考える。rank $C(t+1)B(t)$ は一定でないから、このシステムは正則でない。

$$M_{\tau n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\tau(n+1)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

rank $M_{\tau n}=2$, rank $M_{\tau(n+1)}=4$, $\tau r=2$ であるから、条件 (6) を満たしている。したがって、このシステムは左可逆である。

5. あ と が き

周期係数線形離散時間システムにおいては弱左可逆性と左可逆性が等価であることを示し、左可逆性のクライテリアを与えた、左可逆システムの構成は今後に残された問題である。

参 考 文 献

- 1) R. W. Brockett and M. D. Measarooyic: The Reproducibility of Multivariable Systems, J. Math. Anal. Appl., **11**, 548/563 (1965)
- 2) J. L. Massey and M. K. Sain: Inverses of Linear Sequential Circuits, IEEE Trans. on Computers, **C-17-4**, 330/337 (1968)
- 3) M. K. Sain and J. L. Massey: Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14-2**, 141/149 (1969)
- 4) L. M. Silverman: Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-14-3**, 270/276 (1969)
- 5) F.-M. Yuan: Minimal Dimension Inverses of Linear Sequential Circuits, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-20-1**, 42/52 (1975)
- 6) M. Kono: Invertibility of Linear Time-Varying Discrete-Time Systems, Syst. Control Lett., **1-2**, 148/153 (1981)
- 7) 河野: 周期係数線形離散時間系の固有値設定, 計測自動制御学会論文集, **15-2**, 182/192 (1979)