目標値フィルタを備えた PID 制御系の設計法†

重 政 隆*・森 泰 親*・市 川 義 則*

A Design Method for a PID Control System with a Reference Filter

Takashi SHIGEMASA*, Yasuchika MORI* and Yoshinori ICHIKAWA*

1. はじめに

どのような制御系でも、(i)目標値に対する応答の速応性と、(ii)外乱に対する応答の抑制性は重要な性質である。この両性質ともすぐれた制御系の一つにサーボ系があり、状態空間からの設計法¹⁾が Davison らを始めとして広く研究されている。しかしながら、プロセス制御系を設計する際、プロセスの動特性が正確に測定できる場合はまれであり、状態空間からのサーボ系設計法の適用を難しくしている。これらの点をふまえて、北森は PID と I-PD の制御系に対する制御対象の部分的知識に基づいたモデルマッチングによる設計法^{2),3)}を提案している。プロセス制御の現場で広く用いられている PID 制御方式は、応答の速応性と抑制性の両立性がない、つまり、速応性を重視して設計すると外乱の抑制力が甘くなり、逆に抑制性を重視すると目標値に対する速応性が低下するという問題がある。そこで、PID 制御方式の性能を向上すべく、目標値フィルタを付加した構成とし、北森のモデルマッチングの原理を応用した設計則に基づき速応性と抑制性が両立する連続系とサンプル値系に対する設計公式を導出するとともに設計例により有効性を示す。

設計則

- (A) 出力に外乱による定常偏差が零となるように PID 演算部の積分器の次数を決める。
- (B) 外乱印加時に出力の応答の減衰特性が参照モデルのインパルス応答の減衰特性に許すかぎり高次まで一致するように PID 演算部を設計する。
- (C) 制御系の目標値から出力間の伝達特性を同じく参照モデルの伝達特性に許すかぎり高次まで

一致するように目標値フィルタを設計する。

2. PID 制御系の設計方法

ここで検討するのは目標値フィルタ $H(s)$ を付加した Fig. 1 の PID 制御系である。設計公式を簡潔にするために制御対象プロセス $G_p(s)$ と PID 演算部 $G_c(s)$ をそれぞれ次式で表現しておく。

$$G_p(s) = 1/g(s) \quad (1)$$

$$G_c(s) = c(s)/s^n \quad (2)$$

$$g(s) = g_0 + g_1s + g_2s^2 + g_3s^3 + \dots \quad (3)$$

$$c(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + \dots \quad (c_0 \neq 0) \quad (4)$$

ここで、 n は PID 演算部の積分器の次数である。外乱 $d(t)$ から出力 $y(t)$ 間の伝達関数 $Y(s)/D(s)$ は

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{s^n}{c(s) + s^n g(s)} \quad (5)$$

となり、設計則 (A) の出力のオフセット零の条件より

$$\lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{n+1} D(s)}{c(s) + s^n g(s)} = 0 \quad (6)$$

となる。しかも外乱に対する出力の変動を抑えるためには、(6)式の零点が1次であることが望ましい。

これらより、ステップ外乱 $D(s) = 1/s$ では $n=1$ となり $IPDD^2 \dots$ 系列の PID 演算部となる。さらに、ランプ外乱 $D(s) = 1/s^2$ では、 $n=2$ となり $I^2IPD \dots$ 系列の PID 演算部となる。プロセス制御ではステップ外乱とステップ目標値までを考慮すれば、ほぼ十分なので以下 $n=1$ の場合で検討する。

つぎに設計則 (B) より、ステップ外乱 $D(s) = 1/s$ に対する出力応答 $Y(s)$ を参照モデル $G_m(s)$ のインパルス応答形状にマッチングさせると次式が求まる。

$$Y(s) = 1/(c(s) + sg(s)) = G_m(s)/c_0 \quad (7)$$

$$G_m(s) = 1/[1 + \sigma s + a_2(\sigma s)^2 + a_3(\sigma s)^3 + \dots] \quad (8)$$

ここで σ は参照モデルのステップ応答の立ち上り時間であり、 $\{a_2, a_3, \dots\}$ は応答形状を規定する係数で

Fig. 1 A PID Control System

† 第 25 回自動制御連合講演会で発表 (昭 57・11)

* 東京芝浦電気(株)総合研究所 川崎市川崎区浮島町 4-1

* Research and Development Center, Toshiba Corp., Kawasaki

(Received October 15, 1982)

(Revised February 7, 1983)

Keyword

Keyword: reference filter, PID control system, sample-data PID control, model matching, design method

ある。(7)式と(8)式より、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g_0 + c_1 &= \sigma c_0 \\ g_i + c_{i+1} &= a_{i+1} \sigma^{i+1} c_0 \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

つぎに目標値信号 $r(t)$ から出力 $y(t)$ 間の伝達関数 $Y(s)/R(s)$ は

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H(s) \cdot c(s)}{c(s) + s g(s)} \quad (10)$$

となる。(7)式を条件に、設計則(C)より伝達特性をマッチングさせることにより目標値フィルタ $H(s)$ は

$$H(s) = c_0 / c(s) \quad (11)$$

となる。(9)式で設計定数の数と必要な式の数に合わせて解くことにより、設計公式は以下ようになる。

PI 動作

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= (a_2 g_2) / (a_3 g_1) \\ c_0 &= (a_3^2 g_1^2) / (a_2^2 g_2^2) \\ c_1 &= (a_3 g_1^2) / (a_2^2 g_2) - g_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

PID 動作

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= (a_3 g_3) / (a_4 g_2) \\ c_0 &= (a_4^2 g_2^2) / (a_3^2 g_3^2) \\ c_1 &= (a_4^2 g_2^2) / (a_3^2 g_3) - g_0 \\ c_2 &= (a_2 a_4 g_3^2) / (a_3^2 g_3) - g_1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

なお、制御対象が原点に 1 次の極をもつ無定位置系に対しても、この設計公式をそのまま用いて設計できる。

PID 演算部 $G_c(s)$ は一般に次式で表現され、

$$G_c(s) = K_c \cdot [1 + 1/(T_i s) + T_d s] \quad (14)$$

比例ゲイン K_c 、積分時定数 T_i 、微分時定数 T_d は

$$K_c = c_1, \quad T_i = c_1 / c_0, \quad T_d = c_2 / c_1 \quad (15)$$

により求めることができる。

3. サンプル値 PID 制御系の設計方法

ここでは目標値フィルタ $H(z^{-1})$ を付加したサンプル値 PID 制御系 (Fig. 2) で検討する。目標値信号 $r(t)$ と出力 $y(t)$ の各ラインに挿入されたサンプラと目標値フィルタ $H(z^{-1})$ とサンプル値 PID 演算部 $G_c(z^{-1})$ は、すべて同じサンプル周期 τ で同期して動作するものとする。プロセス制御であることを考慮して、ステップ外乱とステップ目標値に対する設計公式を導出する。したがって、サンプル値 PID 演算部 $G_c(z^{-1})$ の積分器の次数は $n=1$ となる。

まず、連続時間表現と極限で一致するように

$$G_c(z^{-1}) = \left[\frac{c_0 + c_1 \Delta + c_2 \Delta^2 + \dots}{\Delta} \right]_{\Delta = \frac{1-z^{-1}}{\tau}} \quad (16)$$

で表現する。さらに τ が十分小さい場合、Holder の出力 $U(s)$ は次式で近似できる³⁾。

$$\begin{aligned} U(s) &= [H(e^{-\tau s}) \cdot R(s) - Y(s)] \cdot G_c(e^{-\tau s}) \cdot (1 - e^{-\tau s}) / \tau s \\ &= [H(e^{-\tau s}) \cdot R(s) - Y(s)] \cdot c'(s) / s \end{aligned} \quad (17)$$

Fig. 2 A Sampled-data PID Control System

$$\begin{aligned} c'(s) &= c_0 + c_1 s + (c_2 - \tau c_1 / 2) s^2 \\ &\quad + (c_3 - \tau c_2 + \tau^2 c_1 / 6) s^3 + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

連続系の場合と同様にして、設計則(B)と(C)を適用すると、まず目標値フィルタ $H(z^{-1})$ は

$$\begin{aligned} H(z^{-1}) &= c_0 / [c_0 + c_1 \cdot (1 - z^{-1}) / \tau \\ &\quad + c_2 \cdot (1 - z^{-1})^2 / \tau^2 + \dots] \end{aligned} \quad (19)$$

となり、各制御定数の設計公式はつぎようになる。

PI 動作

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + \tau g_0 / 2) a_3 \sigma^2 + (-g_2 + \tau g_0 / 6) a_2 \sigma \\ - (g_2 / 2 + \tau g_1 / 6) \tau = 0 \\ c_0 = (g_1 + \tau g_0) / (a_2 \sigma^2 + \tau \sigma / 2) \\ c_1 = c_0 \sigma - g_0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

PID 動作

$$\left. \begin{aligned} (g_2 + \tau g_1 + \tau^2 g_0 / 3) a_4 \sigma^3 \\ + (-g_3 + 7\tau g_1 / 12 + \tau^2 g_0 / 4) a_3 \sigma^2 \\ + (-g_3 - 7\tau g_2 / 12 + \tau^2 g_1 / 18) \tau a_2 \sigma \\ - (g_3 / \tau + \tau g_2 / 4 + \tau^2 g_1 / 18) \tau^2 = 0 \\ c_0 = (g_2 + \tau g_1 + \tau^2 g_0 / 3) / (a_3 \sigma^3 + \tau a_2 \sigma^2 + \tau^2 \sigma / 3) \\ c_1 = c_0 \sigma - g_0 \\ c_2 = a_2 \sigma^2 c_0 + \tau c_1 / 2 - g_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

なお、 σ は(20)式と(21)式の最初の方程式を解いてその正の最小根を用いる。

4. 設計例

無定位置プロセス $G_p(s) = 6 \times 10^{-3} / (s^2 + 1.4s + 1)$ に対し、(12)式より PI 制御系を構成した。参照モデルの応答形状パラメータとして、 $a_2=0.5$ 、 $a_3=0.15$ を用いた場合の設計結果は $K_c=71.4$ 、 $T_i=4.67$ 、 $H(s)=1/(1+4.67s)$ となった。Fig. 3 (a) は $H(s)=1$ の場合の応答であり、Fig. 3 (b) は設計結果の応答である。図中 Reference と Disturbance とあるのは、それぞれ目標値のステップ変化とステップ外乱に対する制御系の応答である。

つぎに定位置プロセス $G_p(s) = 1/(1+13s+32s^2+20s^3)$ に対してサンプル値 PID 制御系を構成した。 $\tau=1$ 、 $a_2=0.466$ 、 $a_3=0.107$ 、 $a_4=0.0188$ を用い、まず文献 3) の設計法に基づいて設計すると $K_c=3.21$ 、 $T_i=11.35$ 、 $T_d=1.55$ となり、その応答を Fig. 4 (a)

Fig. 3 Step response curves

に示した。(21)式的设计法では, $K_c=5.93$, $T_i=4.92$, $T_d=1.44$, $H(z^{-1})=1/[1+4.92(1-z^{-1})+7.06(1-z^{-1})^2]$ となった。Fig. 4 (b) は目標値フィルタが $H(z)^{-1}=1$ の場合の応答であり, Fig. 4 (c) は, 設計どおりの目標値フィルタを用いた場合の応答である。

いずれの設計例も目標値フィルタを用いた本設計法により, 外乱に対する抑制性と目標値に対する速応性がともにすぐれた PID 制御系が構成されていることがわかる。

5. おわりに

PID 制御方式の問題点である速応性と抑制性の両立性を向上すべく, 目標値フィルタを備えた PID 制御系とその設計公式を提案した。この設計法では, (i) 外乱と目標値に対して定常偏差が残らない, (ii), 外乱に対してモード消去が生じない, (iii) 対象の定位性・無定位性にかかわらず同じ設計法が適用できる, などの利点がある。

Fig. 4 Step response curves

最後に, ご検討いただいた東京大学工学部北森俊行教授に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) E. J. Davison: The Output Control of Linear Time Invariant Multivariable Systems with Unmeasurable Arbitrary Disturbances, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-17-5, 621/629 (1972)
- 2) 北森俊行: 制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法, 計測自動制御学会論文集, 15-4, 549/555 (1979)
- 3) 北森俊行: 制御対象の部分的知識に基づくサンプル値制御系の設計法, 計測自動制御学会論文集, 15-5, 695/700 (1979)
- 4) 重政 隆, 他: 目標値フィルタを備えた PID 制御系の設計法, 第 25 回自動制御連合講演会, 1071 (1982)