2 次遅れむだ時間プロセスの設定値に対する PI 調整†

深 田 悟*・田 村 英 之*

PI Controller Tuning of Second-Order Lag Plus Dead Time Processes
Subject to a Reference Input

Satoru FUKATA* and Hideyuki TAMURA*

1. ま え が き

制御パラメータの調整に際して、評価関数として時間 2 乗の重み付き偏差 2 乗面積 (ISTSE) を用いると、かなりよい応答特性が得られることが示されている¹⁾。本稿では、2 次遅れむだ時間要素で近似される制御対象の PI 制御を取り上げて、ISTSE を評価関数にとり、設定値に対する制御パラメータの調整式を求めてみた。

2 次遅れむだ時間系

$$G_p(s) = \frac{ke^{-Ls}}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, \quad 0 \leq \frac{T_2}{T_1} \leq 1 \quad (1)$$

に対して、PI 制御

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_I}{s} \quad (2)$$

を考える (Fig. 1)。このとき、設定値入力 y_s に対して、評価関数

$$J = \int_0^\infty t^2(y_s - y)^2 dt \quad (3)$$

を最小にする制御パラメータ k_p と k_I を制御対象の時定数 T_1 と T_2 、むだ時間 L で与えることを考える。

Fig. 1 PI control system

2. 制御パラメータの求め方

最適化計算に文献 1) の方法を用いる。そのために、

† 第 25 回自動制御連合講演会で発表 (昭 57・11)

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka

(Received January 17, 1983)

(Revised March 9, 1983)

Keyword: PI controller tuning, second-order lag plus dead time process, ISTSE performance index

まずむだ時間要素をつぎの 4 次の Páde 近似で近似する²⁾。

$$e^{-Ls} \approx \frac{1680 - 840Ls + 180L^2s^2 - 20L^3s^3 + L^4s^4}{1680 + 840Ls + 180L^2s^2 + 20L^3s^3 + L^4s^4} \quad (4)$$

この伝達関数で与えられる入出力関係は、状態ベクトル x_L 、出力変数 y_L 、入力変数 u_L を用いてつぎのように表わされる³⁾。

$$\begin{cases} \dot{x}_L = A_L x_L + b_L u_L, & x_L(0) = 0 \\ y_L = c_L' x_L + u_L \end{cases} \quad (5)$$

ここで、

$$A_L = \begin{bmatrix} -\frac{20}{L} & \alpha & 0 & 0 \\ -\frac{180}{\alpha L^2} & 0 & \alpha & 0 \\ -\frac{840}{\alpha^2 L^3} & 0 & 0 & \alpha \\ -\frac{1680}{\alpha^3 L^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_L = \begin{bmatrix} -\frac{40}{\alpha L} \\ 0 \\ \frac{1680}{\alpha^3 L^3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_L' = [\alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

上式において、 α は任意の正数でスケールファクタとして用いることができる。

この結果を用いて、制御対象を近似的につぎのように表わす。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & x(0) = 0 \\ y = c'x \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 x は $T_2=0$ のとき 5 次元の、 $T_2 \neq 0$ のとき 6 次元の状態ベクトルである。 $T_2 \neq 0$ のとき、 A 、 b 、 c' はつぎのように与えられる。

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_2} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} & \frac{\alpha}{T_1} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{4 \times 2} & \vdots & A_L & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_1} \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix}$$

$$c' = [k \quad 0_{1 \times 5}]$$

また、PI 制御はつぎのように書かれる。

$$u = k_I z + k_P(y_s - y) \quad (7)$$

$$\dot{z} = y_s - y, \quad z(0) = 0 \quad (8)$$

以上のことから、問題は制御対象(6)と制御則(7)に対して、評価関数(3)を最小にする k_I と k_P を求めることになる。この問題に対する解法は文献1)に述べられており、解は必要条件式を解くことによって得られる。

制御対象は見かけ上4個のパラメータをもつが、時間のスケール変換と、 k を k_P と k_I に含めることによって2個のパラメータで取り扱うことができる。すなわち、 $T_1=1$, $k=1$ とし、 L と T_2 をパラメータにして解をもとめて、時間スケールと k をもとに戻すともとの系の調整パラメータが得られる。このとき、解は設定値の大きさに依存しないので、 $y_s=1$ とする。求めた数値結果を曲線近似して調整式を求める。

3. 調整式

制御パラメータの調整式をつぎのような形で求めた。

$$k k_I = \frac{0.56}{L} \left(1 + \frac{3.6}{\frac{L}{T_1} + 0.05} \cdot \frac{T_2}{T_1} \right)^{-0.3(L/T_1)^{-1/4}} \quad (9)$$

$$k k_P = \left(0.56 \frac{T_1}{L} + 0.2 \right) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{T_2}{L}}} + \frac{1}{2 + 0.2 \left(\frac{L}{T_1} \right)^{-1.5} \cdot \frac{T_2}{T_1}} \right] \quad (10)$$

ただし、

$$0.05 \leq \frac{L}{T_1} \leq 1 \quad (11)$$

(6)の制御対象に対して、数値計算例をまとめると、上の調整則はつぎのような特徴をもつことがわかる。

- 1) 設定値に対する応答は約10%のオーバーシュートを示す。
- 2) 制御系の極は、虚数部と実数部の絶対値の比の最大なものがおおよそ2~2.2になるように与えられる。

求めた結果は、むだ時間要素に4次のPáde近似を用いたものであるが、近似の精度は $L/T_1 < 1$ では十分であるとみられる。

4. 例題

4次遅れ系の制御対象

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(1+4s)} \quad (12)$$

Fig. 2 Open-loop step responses of models

Fig. 3 Step response of PI control system

に対して、2次遅れむだ時間要素近似

$$G_{p2}(s) = \frac{e^{-2s}}{(1+4s)^2} \quad (13)$$

を考える。Fig. 2 にこれらのステップ応答を示す。(13)は(12)をよく近似している。(13)に対して求めた制御パラメータ ($k_I=0.136$, $k_P=1.10$) を用いたときの(12)のPI制御系のステップ応答をFig. 3に示す。応答は12%のオーバーシュートを示す。また、このとき制御系の極の、虚数部と実数部の絶対値の比の最大は2.44である。

Fig. 2 には1次遅れむだ時間要素近似

$$G_{p1}(s) = \frac{e^{-4.1s}}{1+6.7s} \quad (14)$$

のステップ応答をも示している。これは、(12)の応答が定常値の10%に達する時間をむだ時間とし、63%に達する時間とそれとの差を1次遅れの時定数としたものである。初期よりも後期の応答をかなりよく近似しているとみられる。これに対する調整値は(13)のそれに近い。この例は、本稿で求めた調整式では、応答の後期部分に重みをおいたモデル化が望ましいということを示すものと考えられる。

参考文献

- 1) 深田 悟, 毛利 彰, 高田 勝: 時間重み付き2次形式評価を用いた線形制御系の制御パラメータの決定, 第20回 SICE 学術講演会予稿集, 321/322 (1981)
- 2) 黒川一夫: アナログ・ハイブリッド計算機, 190, オーム社 (1969)
- 3) K. Ogata: State Space Analysis of Control Systems, 182/186, Prentice-Hall Inc. (1967)