非最小位相プラントのモデル適合†

市 川 邦 彦*

Exact Model Matching for Nonminimum Phase Plants

Kunihiko ICHIKAWA*

Exact model matching is considered to be the most reasonable design method for the control systems. As the means of exact model matching, two approaches have been developed; one is the time domain method and the other is the frequency domain method. The latter is more general than the former in that it can be applied to multivariable systems. Furthermore, the required calculations are far simpler for the frequency domain method. It has been recognized that the resultant control system consists of input dynamics and linear state variable feedback part in general. In the first half part of this paper, it is pointed out that the resultant control system for the scalar plant can always be transformed into the complete feedback control system.

It is well known that two conditions are necessary and sufficient to the achievement of exact model matching; (1) the plant is of minimum phase, and (2) the relative degree of the desired transfer function is not less than that of the plant. It is the fact that there are many nonminimum phase plants. Furthermore, the plant of minimum phase in continuous time turns to the nonminimum phase plants in discrete time often. The adaptive control of nonminimum phase plant is the recent important subject, and it should be noted that the basic concept for the adaptive control links firmly to the exact model matching theory.

The method to achieve exact model matching for the nonminimum phase plant is presented in the second half of this paper. The basic idea relies on the fact that any transfer function can be represented as the difference of two minimum phase transfer functions. The problem can be reduced to the ordinary exact

model matching one by setting up a compensator in parallel with the plant to be controlled. The design method is illustrated by an example.

Keyword: exact model matching, frequency domain method, nonminimum phase plant, control system design, scalar system

1. ま え が き

モデル適合 (exact model matching) の方法として、スカラー系に対して時間領域法¹⁾が、多変数系に対して周波数領域法²⁾が開発されている。後者は当然スカラー系に対して適用できるが、これまでスカラー系に対する適用についての例はわずかしかなかった³⁾。モデル適合は、プラントが最小位相系(注1)の場合に限られていた。それはプラントの零点が極零相殺されるからである。本論文は、周波数領域法によるスカラー系の設計法について簡単に述べたあと、本題であるところの非最小位相系のモデル適合についての新しい方法を述べたものである。最近適応制御の分野において非最小位相系の適応制御が論ぜられるようになった⁴⁾が、適応制御の原点がモデル適合にあることを考えれば、まず非最小位相の既知系に対するモデル適合法を確立しておくことは重要なことである。

2. モデル適合問題

プラントの伝達関数が

$$t(s) = r(s)p^{-1}(s) \quad (1)$$

として与えられているものとする。モデル適合とは、Fig. 1の構成において、基準入力 $v(s)$ から出力 $y(s)$ に至る間の伝達関数が、与えられた希望伝達関数

$$td(s) = r_d(s)p_d^{-1}(s) \quad (2)$$

† 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7-1

* Department of Mechanical Engineering, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received January 10, 1983)

(Revised March 11, 1983)

(注 1) 最小位相系という語は最近適応制御の分野で広く用いられ、零点がすべて s 左半平面にある系をいう⁵⁾。これに対して古くから最小位相推移系という語があるが、これは極も零点もすべて s 左半平面にある系をいう。

Fig. 1 Structure of control system

に等しくなるようにコントローラを決定することである。従来、モデル適合可能な必要十分条件はつぎのように明らかにされている^{1), 5)}。

- (1) $\partial[p_d(s)] - \partial[r_d(s)] \geq \partial[p(s)] - \partial[r(s)]$ (3)
- (2) $r(s)$ は漸近安定多項式(注2)

3. 周波数領域におけるモデル適合法

3.1 周波数領域における状態フィードバック

(1)式において、 $p(s)$ は n 次モニック多項式、 $r(s)$ はたかだか n 次多項式として一般性を失わない。

【定義】²⁾ $r(s) = r_0 + r_1s + \dots + r_{n-1}s^{n-1} + r_ns^n$, $p(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n$ とおく。つぎの式で定義される $2n \times 2n$ 数値行列 M_e を $r(s)$ と $p(s)$ のエリミナント行列という。

$$\begin{bmatrix} r(s) \\ sr(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}r(s) \\ p(s) \\ sp(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}p(s) \end{bmatrix} = M_e \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

《定理1》²⁾ $r(s)$ と $p(s)$ が互いに素な必要十分条件は M_e が正則なることである。

(証明省略)

《定理2》 $r(s)$ と $p(s)$ が互いに素なとき、任意の $2n-1$ 次式 $\beta(s)$ は、つぎの和の形に表わすことができる。

$$\beta(s) = \alpha_1(s)r(s) + \alpha_2(s)p(s) \quad (5)$$

そして、 $\alpha_1(s)$ および $\alpha_2(s)$ は $n-1$ 次を超えない。■

(証明) $\beta(s)$ を $\beta(s) = \beta^T[1 \ s \dots s^{2n-1}]^T$ と表わすことができる。仮定により M_e は正則であるから、 $\alpha^T = \beta^T M_e^{-1}$ を求めることができる。そうすると

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha^T M_e [1 \ s \dots s^{2n-1}]^T \\ &= \alpha^T [r(s) \ sr(s) \dots s^{n-1}r(s) \ p(s) \ sp(s) \\ &\quad \dots s^{n-1}p(s)] \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1s + \dots + \alpha_{n-1}s^{n-1})r(s) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}s \\ &\quad + \dots + \alpha_{2n-1}s^{n-1})p(s) \end{aligned}$$

(注2) その多項式を0とおいた根が s 右半平面(虚軸を含む)にないような多項式を漸近安定多項式という。

Fig. 2 A feedback control system

ここで $\alpha_0 + \alpha_1s + \dots + \alpha_{n-1}s^{n-1}$ を $\alpha_1(s)$, $\alpha_n + \alpha_{n+1}s + \dots + \alpha_{2n-1}s^{2n-1}$ を $\alpha_2(s)$ とおけば(5)式が得られる。 $\alpha_1(s)$ と $\alpha_2(s)$ が $n-1$ 次式なることはその形から明らかである。

Q. E. D.

次数が低い場合は、未定係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ を(5)式において同幕項を等値することによって求めるが、それは結局連立1次方程式の解を求めることであり、 α^T を $\beta^T M_e^{-1}$ として求めることと同じである。

《定理3》 $r(s)$ と $p(s)$ は互いに素であるとする。任意の $n-1$ 次多項式 $f(s)$ に対して、つぎの3条件を満足する多項式 $q(s)$, $k(s)$ および $h(s)$ が存在する。

- (1) $q(s)$ は漸近安定
- (2) $k(s)p(s) + h(s)r(s) = q(s)f(s)$ (6)
- (3) $q^{-1}(s)k(s)$ と $q^{-1}(s)h(s)$ はプロポ

(証明) $q(s)$ を任意の $n-1$ 次漸近安定多項式にとる。これによって(1)は満足される。そうすると $q(s)f(s)$ は $2n-2$ 次であり、定理2により $\alpha_1(s)r(s) + \alpha_2(s)p(s)$ という形に表わすことができる。 $\alpha_1(s)$ を $h(s)$, $\alpha_2(s)$ を $k(s)$ とおくと(2)が満足される。第3項は明らか。

Q. E. D.

任意の $n-1$ 次多項式 $f(s)$ が与えられたとき、定理3からきまる多項式 $q(s)$, $k(s)$, $h(s)$ を用い、Fig. 2のフィードバック系を構成する。この系が実現可能なことは明らかである。 $q(s)$ が安定多項式であることを用いれば、 $v(s)$ から $y(s)$ に至る間の伝達関数が

$$t_f(s) = r(s)[p(s) - f(s)]^{-1} \quad (7)$$

に等しいことは容易に示しうる。

ところで、プラントの運動を時間領域で $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, $y(t) = c^T x(t)$ と表わしたとき、状態フィードバック $u(t) = f^T x(t) + v(t)$ を行くと、閉ループ系の伝達関数の分子は $r(s)$ のままであるが、分母は $p(s) - f^T \text{adj}(sI - A)b$ となる。そして、 f の選択により、 $f^T \text{adj}(sI - A)b$ を任意に与えられた $n-1$ 次多項式 $f(s)$ に等しくすることができる。このよく知られた事実と(7)式の結果とより、Fig. 2は $f(s)$ が与えられていて $f(s) = f^T \text{adj}(sI - A)b$ となるようなフィードバック係数 f を用いて状態フィードバックしたものと同じになっていることがわかる。しかも、Fig. 2をみると、実際には状態 $x(t)$ を用いず、 $u(t)$ と $y(t)$ と

Fig. 3 Open loop control system which reduces to l. s. v. f.

Fig. 4 Open loop control system with general precompensator

Fig. 5 Feedback control system equivalent to Fig. 4

をフィードバックしている。このことは、Fig. 2 は Luenberger 観測器+状態フィードバックを施しているのと等価であることを意味している。このように、周波数領域法では、時間領域よりもはるかに簡単に極配置ができる。

3.2 周波数領域におけるモデル適合

Fig. 2 のフィードバック系と等価な開ループ制御系を Fig. 3 に示す。(a)図は(7)式をそのまま示したものであるが、これではプラントが隠れてしまう。(b)図はプラントと前置補償器という形に表わしたものである。重要なことは、前置補償器が $p(s)p_r^{-1}(s)$ という形であれば、開ループ制御系は Fig. 2 のような状態フィードバック系に直すことができるということである。

Fig. 6 Open loop compensation for exact model matching

Fig. 7 Feedback control+input dynamics for exact model matching

Fig. 8 Final feedback control system for exact model matching

さて、状態フィードバックだけでは $r(s)$ が不変だから、モデル適合はできない。そのために、Fig. 3 (b)より少し一般的補償系 Fig. 4 を考える。ここに $g(s)$ は任意の多項式である。この開ループ制御系は Fig. 5 のようなフィードバック系に変換できることは容易に示しうる。

プラントの伝達関数が $t(s)=r(s)p^{-1}(s)$ 、希望伝達関数が $t_d(s)=r_d(s)p_d^{-1}(s)$ のとき、開ループでモデル適合に必要な前置補償器は

$$t_c(s)=[r_d(s)p(s)]/[p_d(s)r(s)] \quad (8)$$

である。次数の仮定(3)式より、 $t_c(s)$ はプロパーであり実現可能である。 $r_d(s)/[p_d(s)r(s)]$ を既約形に直し、もし分母の次数が n より小となれば、分母の次数が n となるまで戻して $l(s)p^{-1}(s)$ と表わす。 $p(s)$ を $p(s)$ で割り、商を $g(s)$ 、剰余を $-f(s)$ とおくと

$$\bar{p}(s)=g(s)p(s)-f(s) \quad (9)$$

となる。したがって

$$t_c(s)=p(s)[g(s)p(s)-f(s)]^{-1}l(s) \quad (10)$$

となる。これを少し変形したのち、Fig. 6 のような開ループ制御系が得られ、Fig. 4→Fig. 5 の変換を用いると、Fig. 6 は Fig. 7 のように書き換えられる。ここで $g^{-1}(s)l(s)$ はループの外にあり、入力ダイナミクスと呼ばれる。多変数系のモデル適合の最終形は Fig. 7 に相当したものであるが、スカラー系の場合には、入力ダイナミクスを必ずループの中に入れ

ることができる。すなわち Fig. 8 がそれである。

以上が周波数領域におけるモデル適合の概略であるが、時間領域法¹⁾ よりもはるかに簡単である。

4. 非最小位相プラントのモデル適合

プラントが非最小位相である場合はしばしばある⁶⁾。殊にサンプル・ホールドをする離散時間系では、プラントが非最小位相になることは多い⁴⁾。

4.1 プラント伝達関数の分解

零点がすべて不安定であるようなモニック多項式はつぎのように表わすことができる。

$$r(s) = (s - \sigma_1)(s - \sigma_2) \cdots (s - \sigma_m) \quad (11)$$

ここに $\operatorname{Re} \sigma_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m$, いま

$$r(s) = (s + \rho)^m - \bar{r}(s) \quad (12)$$

とおく。 ρ を十分大きな正数とすると、 $\bar{r}(s)$ を最高次項係数が正なるたかだか $m-1$ 次漸近安定多項式ならしめることができる。すなわち、 $r(s)$ は漸近安定多項式の差として表わすことができる。その理由は容易に説明される。 $\bar{r}(s) = (s + \rho)^m - r(s)$ とおく。 $r(s)$ が s 右半平面内の $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ で 0 となるのに対し、 $(s + \rho)^m$ は絶対値が十分大きな複素数であって、 $\bar{r}(s)$ は s 右半平面では 0 になりえないからである。

例 $r(s) = (s-3)(s-5)$ のとき $\rho > \sqrt{3 \times 5}$ にとる。たとえば $\rho = 4$ ととる。 $r(s) = (s+4)^2 - 16(s+1/16)$ 。

$r(s) = (s-2)(s-3)(s-4)$ のとき $\rho > [(3 \times 4 + 4 \times 2 + 2 \times 3)/3]^{1/2}$ にとる。たとえば $\rho = 3$ ととる。 $r(s) = (s+3)^3 - 18(s^2 + (1/18)s + 51/18)$

【補題 1】 任意の n 次モニック多項式は、 n 次モニック漸近安定多項式と、最高次項係数が正なるたかだか $n-1$ 次の漸近安定多項式の差として表わしうる。■

(証明) 任意の n 次モニック多項式 $r(s)$ は

$$r(s) = r_+(s)r_-(s) \quad (13)$$

と表わしうる。ここに $r_+(s)$ は漸近安定多項式、 $r_-(s)$ はすべての零点が不安定な多項式。しかる $r_-(s)$ は漸近安定多項式の差として表わしうる。 Q. E. D.

《定理 4》 任意の伝達関数を $t(s) = r(s)p^{-1}(s)$ とする。ただし $r(s)$ の最高次項の係数は正であるとする。 $t(s)$ は 2 つの最小位相系の差 $t_1(s) - t_2(s)$ として表わすことができる。そして、 $t_1(s)$ の零点の個数は $t(s)$ のそれと等しく、 $t_2(s)$ の零点の個数は、たかだか $t(s)$ のそれよりも 1 だけ小である。 ■

証明は補題 1 より明らかである。

4.2 非最小位相プラントのモデル適合

一般的な非最小位相プラント $t(s) = r(s)p^{-1}(s)$ はつぎのように表わされる。

$$t(s) = \frac{r_+(s)r_-(s)}{p(s)} = \frac{r_1(s)}{p(s)} - \frac{r_2(s)}{p(s)} \quad (14)$$

ここで、 $r_+(s)$ は漸近安定多項式、 $r_-(s)$ は零点がすべて不安定な多項式（ただし最高次係数を正とする）とする。 $r_1(s)$ および $r_2(s)$ はいずれも漸近安定多項式であり、また $r_1(s)$ の次数は、 $t(s)$ の零点の個数、すなわち $\partial[r_+(s)] + \partial[r_-(s)]$ に等しい。さらに $p(s)$ が安定であると仮定する。

非最小位相系のモデル適合においては、希望伝達関数の零点に、プラントの不安定零点をすべて含ませなければならない。そこで、希望伝達関数を

$$t_d(s) = \frac{r_d(s)r_-(s)}{p_d(s)} \quad (15)$$

とおく。次数に関しては (3) 式の条件、すなわち希望伝達関数の相対次数はプラントの相対次数を下まわらないという制約が必要である。これより

$$\begin{aligned} \partial[p(s)] - \partial[r_1(s)] &\leq \partial[p_d(s)] + \partial[r_+(s)] \\ -\partial[r_d(s)] - \partial[r_1(s)] &\end{aligned} \quad (16)$$

なる関係を得る。

(14) 式より $t(s) + r_2(s)p^{-1}(s) = r_1(s)p^{-1}(s)$ となり、これは最小位相系となる。よって、(16) の不等式より希望伝達関数を $[r_d(s)r_1(s)]/[p_d(s)r_+(s)]$ にモデル適合させることができる。並列回路 $t(s) + r_2(s)p^{-1}(s)$ の共通入力を $u(s)$ 、 $t(s)$ の出力を $y(s)$ 、 $r_2(s)p^{-1}(s)$ の出力を $w(s)$ とすると、モデル適合がなされたとき

$$y(s) + w(s) = \frac{r_d(s)r_1(s)}{p_d(s)r_+(s)}v(s) \quad (17)$$

となっている。この並列回路は $r_1(s)p^{-1}(s)$ であるから

$$\frac{r_1(s)}{p(s)}v(s) = \frac{r_d(s)r_1(s)}{p_d(s)r_+(s)}v(s) \quad (18)$$

一方 $y(s) = t(s)u(s)$ である。(18) 式より

$$u(s) = \frac{r_d(s)r_1(s)}{p_d(s)r_+(s)r_1(s)p^{-1}(s)}v(s) \quad (19)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{r_+(s)r_-(s)}{p(s)} \cdot \frac{r_d(s)r_1(s)}{p_d(s)r_+(s)r_1(s)p^{-1}(s)}v(s) \\ &= \frac{r_+(s)r_1(s)}{r_+(s)r_1(s)} \cdot \frac{r_d(s)r_-(s)}{p_d(s)}v(s) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $r_+(s)$ および $r_1(s)$ はいずれも漸近安定多項式であるから極零相殺を行って差支えない。かくして

$$y(s) = \frac{r_d(s)r_-(s)}{p_d(s)}v(s) = t_d(s)v(s) \quad (21)$$

こうして、非最小位相プラントのモデル適合についてつぎの定理をうる。

《定理 5》 プラントが (14) 式、希望伝達関数が (15)

Fig. 9 Exact model matching scheme for nonminimum phase plant

式で表わされ、(16)の不等式が満足されているならば、Fig. 9 の回路構成によってモデル適合ができる。

Fig. 9 において、 $y(s)$ を 1 なる伝達関数を通してから $w(s)$ と加算しているのは、物理的ディメンジョンを合わせるためである。 $y(t)$ はプラントの出力で、たとえば炉の温度であったり、モータ軸の角変位であったりする。一方 $r_2(s)p^{-1}(s)$ は人工的な並列補償回路で $w(t)$ は普通は電圧になっている。 $p(s)$ が不安定の場合には、いったんよく知られた極配置の方法²⁾を用い、分母多項式の安定化を行った上で本方法を適用する必要がある。

4.3 例題

プラントの伝達関数が $(5s-10)/(s^2+s+25)$ であるとする。よって

$$\frac{5s-10}{s^2+s+25} = \frac{1 \times (5s-10)}{s^2+s+25} = \frac{5s+5}{s^2+s+25} - \frac{15}{s^2+s+25}$$

希望伝達関数をつぎのように与える。

$$t_d(s) = \frac{-10(5s-10)}{s^2+10s+100}$$

これは、ステップ応答における定常偏差がない $\zeta=0.5$ の系という意味である。これより

$$t(s) + \frac{r_2(s)}{p(s)} = \frac{5s+5}{s^2+s+25}$$

$$\frac{r_d(s)r_1(s)}{p_d(s)r_+(s)} = \frac{-50s-50}{s^2+10s+100}$$

すなわち $(5s+5)(s^2+s+25)^{-1}$ なるプラントを $(-50s-50)/(s^2+10s+100)$ なる希望伝達関数にモデル適合させる問題に帰着されている。よって、前置補償器は

$$\frac{-50s-50}{s^2+10s+100} \cdot \frac{s^2+s+25}{5s+5} = \frac{-10(s^2+s+25)}{s^2+10s+100}$$

よって $l(s) = -10$, $\bar{p}(s) = s^2+10s+100$,

Fig. 10 Exact model matching for the example

$\bar{p}(s) = g(s)p(s) - f(s)$ より

$$g(s) = 1, f(s) = -9s - 75$$

定理 3 における $q(s)$ を $s+5$ にとると

$$k(s)(s^2+s+25) + h(s)(5s+5) = -9s^2 - 120 - 375$$

となる。これより

$$k(s) = -\frac{264}{25}, h(s) = \frac{39}{125}s - \frac{111}{5}$$

かくして Fig. 10 の解を得る。

5. むすび

周波数領域におけるモデル適合の方法を述べ、さらに非最小位相プラントに対するモデル適合法についての新しい方法を述べた。ここでの制約は、希望伝達関数が、プラントの不安定零点をすべて自分の零点としてもたなければならないというものである。非最小位相系の伝達関数は、最小位相系の伝達関数の差として表わされるという事実を利用し、プラントに並列な補償回路を設けることによって、モデル適合を実現した。この研究は、適応制御の分野で重要な関心をもたれている非最小位相プラントの適応制御という課題に対する基礎を与えるものと思われる。

参考文献

- 1) 市川邦彦：制御工学入門，101，産業図書（1978）
- 2) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, 226, Springer-Verlag (1974)
- 3) 市川邦彦：2 ステップ式非干渉化アルゴリズム（周波数領域アプローチ），第 25 回自動制御連合講演会前刷，13/14（1982）
- 4) 藤井省三・水野直樹：むだ時間未知の非最小未知プラントに対する離散時間適応制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，18-12，1165/1172（1982）
- 5) K. Narendra, Y-H. Lin and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design, Part II Proof of Stability, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-25-3, 440/448（1980）
- 6) O. J. Smith: Feedback Control Systems, 112, McGraw-Hill (1958)