フーリエ変換における窓関数の位相特性[†]

原 裕一郎*・井 口 征 士*

Phase Transmission Characteristics of Temporal Windows in Fourier Transformation

Yuichiro HARA* and Seiji INOKUCHI*

In harmonic analysis of periodic wave, the discontinuity at the boundary of observation interval increases the spectral leakage. Several temporal windows have been developed to improve the spectral resolution. In Fourier transformation, input signal is transformed into complex data consisting of amplitude and phase. This paper describes the phase transmission characteristics of temporal windows. The phase preservability that the phase of input sinusoidal wave is preserved in peak component, can be improved by applying the windows. Phase error caused by the other harmonics depends on the amplitude transmission characteristics of windows, especially on their band-width. The spectral peak moves from n -th bin to $(n+1)$ -th bin with the increase of input frequency. The frequency, at which the peak is shifted from n to $n+1$, becomes close to $n+0.5$ through temporal windows. Experiments of pitch-frequency detection using phase compensation method show that Hanning window and Cos window are more desirable than the others.

As a result, the temporal window improves the phase transmission characteristics.

Keyword: spectral analysis, window, pitch detection, Fourier transformation

1. ま え が き

ディジタル信号処理においては、無限に続くサンプル値系列を扱うことはできず、信号のサンプル値系列から一部分を切り出して処理することになる。最も代表的な、フーリエ変換によるスペクトル分析では、切り出した波形が繰り返し続くものとして、その周期波形

のフーリエ係数を求めている。したがって、信号の切り出し方が不適当であれば、原波形と切り出し部の繰り返し波形との間に違いが生じることになり、処理結果に大きな影響を与えることになる。

このような現象を防ぐため、種々の窓関数が提案され、その結果がくわしく比較評価されている^{1),2)}。しかし、これらの比較は、窓関数が主にスペクトルの分解能を高めることを目的としているとして、近接した周波数成分の分解能を決めるスペクトル漏洩や分解幅、等価雑音帯域幅、また振幅比が大きい二つの成分を分離抽出する場合に重要なサイドローブの減衰度などを主な評価項目としている。

確かに周波数分析の目的の多くはスペクトル分析であり、上の評価項目が重要であることは当然であるが、フーリエ変換によって得られる結果がベクトル量であると考えたとき、各成分の大きさのみならず位相に対する影響も同時に考慮しなければならない。

本論文では、窓関数によって位相がどのような影響を受け、またスペクトルピークのシフトがどのように変化するかについて述べる。またその応用として、位相変化を利用したピッチ周波数抽出における精度について実験結果を示す。

2. スペクトルピークの位相

ここで、原信号の位相とスペクトルピークを与える成分の位相との関係について考える。

2.1 単一正弦波の場合

いま Fig. 1(a)の実線のような、次式で表わされる正弦波を $x(t)$ とする。

$$x(t) = \sin \left\{ \frac{2\pi f t}{T} + \varphi \right\} \quad (2.1)$$

ここで、 f は観測区間 T に含まれる波数であり、以下この f を周波数と呼ぶ。また φ は区間 T の中央での位相である。この波形をフーリエ変換すると

[†] 第24回自動制御連合講演会で発表 (昭56・11)

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka

(Received January 22, 1983)

(Revised March 14, 1983)

Fig. 1 Input waveform and the 3rd component

Fig. 2 (a) Amplitude and (b) phase from Fourier transformation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}$$

$$a_k = \frac{(-1)^k \cdot f}{\pi(f^2 - k^2)} \sin \pi f \cdot \sin \varphi \quad (2.2)$$

$$b_k = \frac{(-1)^k \cdot k}{\pi(f^2 - k^2)} \sin \pi f \cdot \cos \varphi \quad (2.3)$$

となり、各成分の大きさと位相が求まる。

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \left| \frac{\sin(\pi f)}{\pi(f^2 - k^2)} \right| \sqrt{f^2 \sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi} \quad (2.4)$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \frac{a_k}{b_k}$$

$$= \begin{cases} k=2i \leq f \text{ または } k=2i+1 \geq f \text{ のとき} \\ \tan^{-1} \left(\frac{f}{k} \tan \varphi \right) \\ k=2i > f \text{ または } k=2i+1 < f \text{ のとき} \\ \tan^{-1} \left(\frac{f}{k} \tan \varphi \right) - \pi \end{cases} \quad (2.5)$$

Fig. 1(a)の波形に対する c_k と θ_k を、Fig. 2(a), (b)と示す。

上のフーリエ変換において f が整数 n に等しい場

Fig. 3 (a) Relation between original phase and component phase and (b) their difference

合、周期 T の繰返し波形は連続となり、フーリエスペクトル c_k は第 n 番目 ($k=n$) の成分のみの線スペクトルが得られ、その位相 θ_n は $x(t)$ の位相 φ に等しい。しかし Fig. 1 および 2 のように f が整数でない場合、区間 T の両隣では Fig. 1(a) の点線で示すような波形となり、区間両端で不連続となる。スペクトルのピークは f に近い整数 n (図に示す場合は 3) 番目に表われるが、区間両端の不連続性のためスペクトル漏洩が生じる。また、このピークに相当する成分の位相 θ_n は (2.5) 式に示すように φ に等しくない。

スペクトル分析において、周期波形の第一近似として、ピーク値を与える成分 n を用いることが考えられるが、第 n 成分の位相 θ_n と原波形の位相 φ とは上述のように異なったものである。Fig. 1(a) は $f=2.56$ の正弦波であり、(b) は第 3 成分の波形を示している。ここで θ_3 と φ は Fig. 3(a) のような関係となり、その差 $\Delta\theta_3 = \theta_3 - \varphi$ は同図(b)の実線で表わされる。この関係は原波形の周波数 f によって異なる。ここで $|\Delta\theta_n|$ の最大値、すなわち θ_n と φ の最大位相差 $|\Delta\theta_n|_{\max}$ を求めると、Fig. 4 の(1)の実線のように $f=n$ で極小、 $f=n \pm 0.5$ で極大となる。またその値は n が増加するにつれて小さくなる。このグラフは f が $[n-0.5, n+0.5]$ の範囲にあるときの $|\Delta\theta_n|_{\max}$ の値を n をパラメータとして表わしている。たとえば $f=2.56$ では θ_3 は φ から最大 0.085 rad の位相差を含むことを示している (図中点 P)。

θ_n は、区間 T で切り出され、両端に不連続部をもつ波形の第 n 成分の位相を表わしていて、原波形の位

Fig. 4 Maximum phase difference between θ_n and φ
 (1) Rectangular window, (2) Triangular window, (3) Cosine window, (4) Hanning window, (5) Hamming window, (6) Blackman-Harris window and (7) Gaussian window

相を表わしているのではない。ここで第 n 成分を $x(t)$ の近似として用いることを考えると、 θ_n が原波形 $x(t)$ の位相 φ を表わしていることが望ましい。このことはスペクトル分析においても同様のことがいえる。すなわち、区間 T で切り出すことによって生じるスペクトル漏洩は、切り出すことによって生じる不連続部を含めた波形の周波数成分を正しく表わしてはいるが、原波形にはないスペクトルであり、これを除いて原波形の性質を忠実に抽出する目的で各種窓関数が用いられている。位相測定においても、原波形の区間 T で位相を正しく抽出することができれば、種々の応用が期待できる。

Fig. 3 の実線は矩形窓の場合に相当するが、ここで Hanning 窓をかけると、 θ_n と φ の位相差 $\Delta\theta_n$ は著しく小さくなり、同図(b)の点線ようになる。そこで Hanning 窓をかけたときの $|\Delta\theta_n|_{\max}$ を求めると、Fig. 4 の(4)の破線で示すように、矩形窓に比べて、 $n=2$ で約 $1/10$ 、 $n \geq 3$ になると $1/50$ 以下になることが判明した。

そこでつぎに示す、代表的な 7 つの窓関数について比較を行った。

(1) 矩形窓 (Rectangular window)

$$w(n \cdot \Delta T) = 1$$

(2) 三角窓 (Triangular window)

$$w(n \Delta T) = 1 - |2n \Delta T / T|$$

(3) cos 窓

$$w(n \Delta T) = \cos(\pi n \Delta T / T)$$

(4) Hanning 窓

$$w(n \Delta T) = 0.5 + 0.5 \cos(2\pi n \Delta T / T)$$

(5) Hamming 窓

$$w(n \Delta T) = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n \Delta T / T)$$

(6) Blackman-Harris 窓

$$w(n \Delta T) = 0.40217 + 0.49703 \cos(2\pi n \Delta T / T) \\ - 0.09392 \cos(4\pi n \Delta T / T) \\ + 0.00183 \cos(6\pi n \Delta T / T)$$

(7) Gaussian 窓

$$w(n \Delta T) = \exp\{-0.5(\alpha \cdot 4\pi n \Delta T / T)^2\}$$

$$(\alpha = 2.5)$$

ただし、 $-(N/2) \leq n < (N/2)$, $N \Delta T = T$ である。

これらの窓関数をかけたときの $|\Delta\theta_n|_{\max}$ を Fig. 4 に示す。いずれの窓関数も矩形窓に比べて $|\Delta\theta_n|_{\max}$ を小さくする効果をもっていること、特に Blackman-Harris 窓、Hanning 窓が優れていること、cos 窓は $f = n \pm 0.5$ で $|\Delta\theta_n|_{\max}$ が極小になることなどが判明した。以上から、各種窓関数はスペクトル成分の分離抽出に効果があるだけでなく、位相の保存性に関しても望ましい特性を有しているといえることができる。

このような窓関数の効果は以下の考察によっても確かめられる。いま窓関数を $w(t)$ とすると、 $w(t)$ は偶関数であるから (2.2) (2.3) 式は

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \sin\left(\frac{2\pi f t}{T} + \varphi\right) \cos\frac{2\pi k t}{T} dt \\ = Cw(f, k) \sin \varphi \quad (2.6)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \sin\left(\frac{2\pi f t}{T} + \varphi\right) \sin\frac{2\pi k t}{T} dt \\ = Sw(f, k) \cos \varphi \quad (2.7)$$

ただし

$$Cw(f, k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \cos\frac{2\pi f t}{T} \cos\frac{2\pi k t}{T} dt \quad (2.8)$$

$$Sw(f, k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \sin\frac{2\pi f t}{T} \sin\frac{2\pi k t}{T} dt \quad (2.9)$$

のように、窓関数の効果と位相 φ の影響を分離して表わすことができる。したがって第 n 成分の位相は

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n} = \tan^{-1} \left\{ \frac{Cw(f, n)}{Sw(f, n)} \tan \varphi \right\}$$

となる。 $x \ll h$ に対して

$$\tan^{-1}(x+h) \doteq \tan^{-1} x + \frac{h}{1+x^2}$$

から,

$$\begin{aligned}\theta_n &= \tan^{-1} \{ \tan \varphi + \delta \tan \varphi \} \\ &= \varphi + \delta \frac{\tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}\end{aligned}\quad (2.10)$$

ただし, $\delta = Cw(f, n)/Sw(f, n) - 1$ である. また $\text{Max}(\tan \varphi / (1 + \tan^2 \varphi)) = 1/2$ から

$$|\Delta \theta_n|_{\max} = |\theta_n - \varphi|_{\max} = \delta/2$$

となり, (2.8), (2.9) 式の $Cw(f, n)$, $Sw(f, n)$ から窓関数による位相のずれの最大値を求めることができる. Fig. 4 は, 正弦波を実際にフーリエ変換した結果から求めたものであるが,

$$|\Delta \theta_n|_{\max} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Cw(f, n)}{Sw(f, n)} - 1 \right\} \quad (2.11)$$

から求めた結果と一致することが確かめられた.

2.2 高調波を含む場合

前節で単一正弦波について検討を行ったが, ここでは, 複数の正弦波が重なりあった信号として, 高調波を含む周期波形の場合について述べる. いま原波形を

$$x(t) = \sum_{j=1} A_j \sin \left\{ \frac{2\pi j f t}{T} + \varphi_j \right\} \quad (2.12)$$

とし, 周波数 f の第 1 近似である整数 m として f に最も近い整数, すなわち $[f + 0.5]$ ($[\cdot]$ はガウス記号) を選び, その位相 θ_m が高調波成分によってどのような影響を受けるかを考える.

$x(t)$ を区間 $[-(T/2), (T/2)]$ でフーリエ変換したとき, 第 m 番成分の実部, 虚部はそれぞれ,

$$\begin{aligned}a_m &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot w(t) \cdot \cos \frac{2\pi m t}{T} dt \\ &= \sum_{j=1} A_j \cdot Cw(jf, m) \cdot \sin \varphi_j \equiv \sum_{j=1} a_{mj} \quad (2.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_m &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot w(t) \cdot \sin \frac{2\pi m t}{T} dt \\ &= \sum_{j=1} A_j \cdot Sw(jf, m) \cos \varphi_j \equiv \sum_{j=1} b_{mj} \quad (2.14)\end{aligned}$$

と書ける. ただし, $Cw(\cdot, \cdot)$, $Sw(\cdot, \cdot)$ は (2.8), (2.9) に示されている. ここで

$$\alpha = \sqrt{\left(\sum_{j=2} a_{mj} \right)^2 + \left(\sum_{j=2} b_{mj} \right)^2} \quad (2.15)$$

とくと, α は高調波による合成ベクトルの大きさを表わし, これは φ_j によって変化する. そこで

$$\begin{aligned}\beta &= \sup_{\varphi_j} \alpha \leq \sum_{j=2} \sup_{\varphi_j} \sqrt{a_{mj}^2 + b_{mj}^2} \\ &\leq \sum_{j=2} A_j \cdot \text{Max} \{ Cw(jf, m), Sw(jf, m) \}\end{aligned}\quad (2.16)$$

とすると, 基本波によるベクトル (a_{m1}, b_{m1}) と, 高調波によるベクトル α は Fig. 5 に示す関係となり, 原波形 $x(t)$ をベクトル表現したものは半径 β の中に入る. そこで

Fig. 5 Vector representation of harmonics

Table 1 Maximum phase error (Calculated value $e_{\max}$ and measured value)

Window type	γ (rad)	$e_{\max}$ (rad)	Mesured value (rad)
Rectangular	0.1509	0.2356	0.169
Triangular	0.0173	0.0236	0.0209
Cosine	0.0425	0.0443	0.0391
Hanning	0.0112	0.0133	0.0123
Hamming	0.0135	0.0220	0.0181
Blackman-H.	0.0477	0.0486	0.0481
Gaussian	0.0209	0.0268	0.0226

$$\gamma = \sin^{-1} \frac{\beta}{A_1 \cdot \text{Min} \{ Cw(f, m), Sw(f, m) \}} \quad (2.17)$$

とくと, γ は高調波による位相のずれの最大値の上限を示している. 原波形の位相測定に伴う最大誤差 $e_{\max}$ は前出の $|\Delta \theta_n|_{\max}$ と γ の和と考えることができる. いま一例として, $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = A_4 = 0.5$, $f = 2.56$ の波形について述べる. $m = 3$ ($= [f + 0.5]$) の場合の位相のずれを, 7つの窓関数について求めると, Table 1 のような結果が得られる. 実測値とは, 最も影響の大きい φ_1 と φ_2 を変化させ, 波形を生成し, 実際にフーリエ変換して得られた結果から求めた誤差の最大値である. 計算結果の一例として, 2つの軸に φ_1 と φ_2 をとったときの位相誤差のマップを Fig. 6 に示す.

以上の結果から, 高調波の位相成分に対する影響を推定することができること, Fig. 5 から高調波の影響は高調波のベクトルの減衰の度合, すなわち窓関数の減衰特性に直接影響されること, その例として, Blackmann-Harris 窓は $|\Delta \theta_n|_{\max}$ は非常に小さく位相の保存性は優れていたが, メインローブの幅が非常に広い (3.0 dB 低下のバンド幅で, Hanning 窓: 1.44 bins, Hamming 窓: 1.30 bins に対して Blackman-Harris 窓: 1.74 bins¹⁾) ので, この例のように近くに第 2 高調波がある場合, 大きな影響を受け総合精度が悪化すること, 総合精度の点から Hanning 窓が最も優れていること, などが判明した.

Fig. 6 Phase error maps in peak component. (a) Rectangular window and (b) Hanning window

3. ピーク位置と窓関数

2. でスペクトルピークの成分における位相の保存性について述べたが、ここでは周波数 f とそれによって生じるスペクトルピークの位置との関係について述べる。一般に $f \cong n$ のとき、第 n 成分 c_n がピークとなる。 f を n と $n+1$ の間で変化させたとき、ピークも c_n から c_{n+1} に移るが、ここでも切り出し区間両端の不連続性のため、必ずしも $f \cong n+0.5$ に応じて $c_n \cong c_{n+1}$ になるわけではない。たとえば $f=2.48$ でも $\varphi=0$ では $c_2 < c_3$ となる。そこで (2.1) 式の $x(t)$ について $c_n = c_{n+1}$ となるときの f と φ の関係を求めると **Fig. 7** の実線群が得られる。この図から f と φ が与えられれば、何番目の成分がピークになるかを知ることができる。たとえば前出の $f=2.48, \varphi=0$ は図中 A で示すように第 3 成分がピークとなっている。このように波形の位相によってスペクトルピークの位置がシフトするのも、波形の切り出しによって観測区間両端に生じる不連続性によると考えることができ、ここでも窓関数の効果が期待される。そこで Hanning 窓について、上と同様に $c_n = c_{n+1}$ の関係を求めると、**Fig. 7** の点線群が得られ、窓関数の効果が大きいことがわ

Fig. 7 Relation between φ and f under $c_n = c_{n+1}$. (a) Rectangular window and (b) Hanning window

かる。そこで図中、 $|df_n|_{\max}$ と印したように、 $c_n = c_{n+1}$ なる f と $n+0.5$ との偏差の最大値を各 n について求めると、**Table 2** のようになる。

この結果、 $\cos$ 窓はすべての n について $|df_n|_{\max}$ が 0 であること、三角窓、Hanning 窓は f の増加、言換えれば n の増加、とともに $|df_n|_{\max}$ が急速に減小していくことなどが判明した。 $\cos$ 窓の特異な結果は **Fig. 4** からわかるように、 $f=n+0.5$ のとき $Sw(f, n) = Cw(f, n)$ となり、したがって $c_n = c_{n+1}$ は φ に無関係に $f=n+0.5$ で、 $Cw(f, n) = Cw(f, n+1)$ が成立することによる。

4. 位相補正によるピッチ周波数同定の精度

短時間スペクトルからピッチ周波数を同定する方法として位相補正法³⁾が用いられている。これは時間的に隔たった 2 点 t_1, t_2 におけるピーク周波数 f_n の位相 θ_{n1}, θ_{n2} を求め、定常性を仮定して、

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \{2\pi f_n t + \theta\} = f_n + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\theta_{n2} - \theta_{n1}}{t_2 - t_1} \quad (4.1)$$

から、周波数 f を算出する方法である。本原理は、すでに楽音分析のために用いられた例もあり⁴⁾、また筆

Table 2 Maximum frequency difference between f obtained from $c_n = c_{n+1}$ and $n+0.5$

Window type	$ df_n _{\max}$						
	Rect.	Tri.	Cos	Hanning	Hamming	B. H.	Gaussian
$n=1$	8.110	1.265	0.	2.953	0.362	2.404	1.621
2	4.945	0.247	0.	0.501	1.059	0.251	0.811
3	3.545	0.088	0.	0.173	0.882	0.141	0.617
4	2.759	0.041	0.	0.079	0.723	0.091	0.491
5	2.255	0.022	0.	0.043	0.605	0.065	0.406
6	1.904	0.014	0.	0.026	0.519	0.051	0.345

者らも自動採譜の手法として利用しており⁵⁾、その有効性は確かめられている。さらに窓関数とピッチ抽出精度について実験的に比較を行い、矩形窓より Hanning 窓が望ましいとの報告もある⁶⁾。

この方法は、スペクトルピーク f_n の抽出と、その位相 θ_{n1} , θ_{n2} の検出から成り立っており、それらの個々の精度が f の算出精度に影響を与える。このピークの抽出と位相の検出は、それぞれ 3. および 2. で述べた問題であり、いずれも窓関数によりその精度が大きく改善されることを示した。ここでは窓関数を用いることにより、ピッチ周波数同定の精度がどのように向上するかを示す。ここでは、電子楽器で生成したリード楽器音と弦楽器音の c_2 音 (130.8 Hz) から c_3 音 (261.6 Hz) までの 1 オクターブ (計 13 音) を用いて抽出音高のばらつきを各窓関数について比較した。測定法は以下の通りである⁵⁾。

- (1) 1 kHz をカットオフとする 3 次のローパスバターワースフィルタを通した音響信号を 10 kHz のサンプリングで、12 ビットに AD 変換し入力する。
- (2) $N=256$ ($T=25.6$ ms) ごとにブロック分けし窓関数をかけた後、フーリエ変換しピーク周波数 f_n を求める。
- (3) 相隣るブロック ($t_2-t_1=25.6$ ms) での位相差 $\theta_{n2}-\theta_{n1}$ によって補正を行う。

測定結果を Fig. 8 に示す。これは、各音ごとに 512 回計測し、その標準偏差 σ の平均周波数に対する割合 (パーセンテージ誤差) を求め、リード楽器音と弦楽器音について得られた 13 個の結果の括弧を $\circ$ — $\circ$ および $\bullet$ — $\bullet$ で示したものである。

上の結果から、リード音の場合弦楽器音に比べて精度が悪い。これは高調波成分の違いによっており、特に Blackman-Harris 窓でその違いが著しいこと、総

合的に見て、cos 窓と Hanning 窓が優れていることが判明した。特に Hanning 窓では、低音から 2 つの音が 0.1% を越えただけで、残りはすべて 0.1% 以下であった。

5. む す び

離散フーリエ変換における窓関数と位相特性の関係について述べた。窓関数はスペクトル分析を目的に、振幅特性、特にスペクトル分解能などが比較検討されてきたが、ここでは位相成分に対する影響について窓関数の効果を検討した。その結果、

- (1) 位相の保存性については、Blackman-Harris 窓、Hanning 窓が優れていること。
- (2) 位相に対する他の周波数成分の影響は、窓関数の減衰特性によって決まること。近くに他の周波数成分のある場合、Blackman-Harris 窓のように帯域の広い窓関数は望ましくないこと。
- (3) 周波数 f を n から $n+1$ の間で変化させたとき、スペクトルピークが n から $n+1$ にシフトする周波数は、窓関数をかけることにより $n+0.5$ に近づくこと。この効果は cos 窓、Hanning 窓、三角窓が優れていること

などが得られ、総合的に見て、Hanning 窓が優れていることが判明した。結論として、窓関数が位相伝達特性についても好ましい効果をもっていることが確認された。

最後に、日頃ご指導を頂く桜井良文教授に深く感謝します。また実験に協力された山本幸生君に感謝します。本研究は一部、文部省科学研究費 (56850118) によることを付記します。

参 考 文 献

- 1) F. J. Harris: On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform, Proc. IEEE, **66**-1, 51/83 (1978)
- 2) A. H. Nuttall: Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior, IEEE Trans. **ASSP**-29-1, 84/91 (1981)
- 3) M. D. Freedman: Analysis of Musical Instrument Tones, J. Acoust. Soc. Am. **41**-4, 793/806 (1967)
- 4) J. W. Beauchamp: A Computer System for Time-Variant Harmonic Analysis and Synthesis of Musical Tones, The Computer and Music, 19/62 Cornell University Press (1970)
- 5) 井口征士: 音楽情報の処理—電算機を用いた自動採譜—, 計測と制御, **19**-3, 314/319 (1980)
- 6) 安藤繁雄, 山口公典: DFT を用いた楽器音のピッチ変動の一抽出法, 日本音響学会誌, **37**-9, 421/429 (1981)

Fig. 8 Standard deviation of frequency error after phase compensation